Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 6, стр. 300 –302 *25 сентября 1988 г.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ДЕТЕРМИНАНТА В ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ СТРУН

А.С.Лосев

Предложено прямое вычисление детерминанта скалярного лапласиана на римановой поверхности с краем через детерминант скалярного лапласиана на дубле и матрицу периодов дубля.

1. В формализме первичного квантования для открытых струн вычисляются интегралы по полям на римановых поверхностях с краем. Риманова поверхность Σ с p ручками и краем Γ, состоящем из $m+1$-компонент, может быть представлена как фактор-пространство замкнутой римановой поверхности D рода $2p+m$ (называемой дублем) по антиголоморфной Z_2-изометрии: $\Sigma = D/Z_2$. Граница Γ состоит из неподвижных точек этой изометрии, Z_2-симметрия дубля индуцирует Z_2-симметрию голоморфных дифференциалов на нем: дифференциалу $w(z)$ сопоставляется дифференциал $w^*(z) = \overline{w(z^*)}$, где z^* образ z при Z_2-симметрии.

Пространство всех функций на дубле равно прямой сумме пространств Z_2 четных и нечетных функций, поэтому детерминант на дубле равен произведению детерминантов, вычисленных на четных и нечетных функциях. Функции на Σ с нулевой нормальной производной на границе (удовлетворяющие граничному условию для открытых струн) однозначно продолжаются до четных на дубле, а функции на Σ, равные нулю на границе – до нечетных, поэтому:

$$\det{}'_D \Delta = \det{}'_{open} \Delta \cdot \det{}_0 \Delta . \qquad (1)$$

С другой стороны, представив $\det{}'_D \Delta$ как континуальный интеграл по грассмановым полям Φ и вычислив его, сначала интегрируя по полям Φ с фиксированными значениями Φ_Γ на Γ, а затем по всем таким значениям, получим:

$$N^{-1} \det{}'_D \Delta = K \det{}_0^2 \Delta$$

$$K = n^{-1} \int' D\bar{\Phi}_\Gamma D\Phi_\Gamma \exp S_K, \quad S_K = i\int (\partial\bar{\Phi}\wedge\bar{\partial}\Phi - \bar{\partial}\bar{\Phi}\wedge\partial\Phi), \qquad (2)$$

где $\Phi_h = \Phi_h(\Phi_\Gamma)$ – гармоническая функция на Σ, равная Φ_Γ на Γ, площадь дубля N и длина границы n – нормировки нулевых мод.

Из (1) и (2) следует, что скалярный детерминант в теории открытых ориентируемых струн выражается через скалярный детерминант на дубле следующим образом:

$$N^{-1} \det{}'_{open} \Delta = (KN^{-1} \det{}'_D \Delta)^{1/2} . \qquad (3)$$

В этой статье явно вычисляется K (другие способы изложены в [1-3]).

2. Произвольную гармоническую функцию на Σ можно однозначно представить в виде:

$$\Phi_h = f(z) + g(\bar{z}) + \sum_{k=0}^{2p+m} c_k F_k, \quad F_0 = 1, \quad F_k = \int^z (w_k + \sum_r \alpha_{kr}\bar{w}_r), \; k = \overline{1, 2p+m}, \qquad (4)$$

где $f(z)$ – голоморфная, а $g(\bar{z})$ – антиголоморфная функции, отличные от константы, w_k – канонические дифференциалы на дубле, а коэффициенты α_{kr} выбраны так, чтобы функция F_k была однозначна на Σ.

В этом пункте предложен способ вычисления K, в котором очевидно, что вклад от $f(z)$ и $g(\bar{z})$ в K равен не зависящей от модулей константе.

Перейдем в (2) к интегрированию по всем гармоническим функциям, заменив S_K на $S_K + R$, где R – не зависящий от метрики регулятор нулевых мод.

Детерминант оператора дифференцирования вдоль границы так же, как и K, может быть представлен в виде континуального интеграла по всем гармоническим функциям:

$$I=\int D\bar{\Phi}_\Gamma D\Phi_\Gamma \exp(S_I + R), \quad S_I = i \int_\Gamma \bar{\Phi}_h (\partial + \bar{\partial})\Phi_h . \tag{5}$$

Так как I не зависит ни от метрики, ни от модулей поверхности Σ, то вычисление K сводится к вычислению отношения K/I. Переходя в числителе и знаменателе отношения K/I от меры $|D\Phi_\Gamma|^2$ к соответствующей представлению (4) мере $|D\Phi_h|^2 = |D f D g \prod_{k=0}^{2p+m} d c_k|^2$,

где $|Df|^2$ $(|Dg|^2)$ – некоторая мера на пространстве (анти) голоморфных функций, получим:

$$\frac{K}{I} = \frac{\int |D\Phi_h|^2 \exp(\widetilde{S_K} - \int i\bar{f}\partial f + \int i\bar{g}\bar{\partial} g)}{\int |D\Phi_h|^2 \exp(\widetilde{S_I} + \int i\bar{f}\partial f + \int i\bar{g}\bar{\partial} g)}, \tag{6}$$

где $\widetilde{S_M} = \Sigma \bar{c}_k c_e S_M(\bar{F}_k, F_e) + R,\ M = I, K$. При выводе соотношения (6) мы воспользовались представлением S_K в виде интеграла по границе $i\int_\Gamma \bar{\Phi}_h(\bar{\partial} - \partial)\Phi_h$, а также тем, что интегралы по границе от $\bar{g}\,\partial f$, fw и $f\bar{w}$ равны нулю, как интегралы от голоморфных на Σ дифференциалов (при ограничении на границу $\bar{w} = w^*$).

Интегрирование в (6) по голоморфным и антиголоморфным функциям дает равный единице (с точностью до знака) вклад в отношение K/I.

3. Для того, чтобы закончить вычисление K необходимо найти $\widetilde{S_K}$ и $\widetilde{S_I}$, что сводится к задаче о нахождении матрицы $\int_\Sigma \bar{w}_i \wedge w_j$. В этом пункте мы решим эту задачу, обобщив соотношения Римана на случай поверхности с краем.

Выберем на дубле такую систему циклов A_i, B_i, $i = \overline{1, 2p+m}$, что при $i = \overline{1, p}$ A_i лежит в Σ, при $i = p+1,\ p+m$ – является одной из компонент границы, и цикл A_{p+m+i} Z_2 – симметричен циклу A_i. Тогда матрица периодов дубля равна:

$$T_{ij} = i \begin{vmatrix} a & b & c \\ b^T & t & \bar{b}^T \\ \bar{c} & \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

t – вещественная симметричная $m \times m$-матрица, c – эрмитова $p \times p$-матрица.

Разрезав Σ по циклам $\gamma = (A_i, B_i, \frac{1}{2}B_k)$, $\overline{i=1,p}$; $k = p+1, p+m$ ($\frac{1}{2}B_k$ – лежащая в Σ половина цикла B_k), представим на разрезанной поверхности голоморфный на дубле дифференциал u в виде $u = \partial f_u$. Проводя преобразования, аналогичные [4] и учитывая, что для голоморфного на дубле дифференциала w при ограничении на Γ $\bar{w} = w^*$, получим:

$$\int_\Sigma \bar{w} \wedge u = \sum_\gamma \int_\gamma (\bar{w} - w^*) \int_{\tilde{\gamma}(\gamma)} u , \tag{8}$$

где для $\gamma = (A_i, B_i, \frac{1}{2}B_k)$, $\tilde{\gamma}(\gamma) = (B_i, -A_i, -A_k)$. Из (7) и (8) находим:

$$\int_\Sigma \bar{w}_i \wedge w_j = i \begin{vmatrix} 2\,\mathrm{Re}\, a + \bar{c} & 2\,\mathrm{Re}\, b & c \\ 2\,\mathrm{Re}\, b^T & t & 0 \\ c & 0 & -c \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Соотношения (9) обобщают соотношения Римана на случай поверхности с краем.

Подставляя (9) в (6), получим итоговое выражение для K:

$$K = I \det(\mathrm{Re}\,(a-c)) / \det\begin{pmatrix} t & 2\,\mathrm{Re}\,b^T \\ \mathrm{Re}\,b & \mathrm{Re}\,(a+c) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В заключение отметим, что поверхности с краем возникают в многопетлевых струнных вычислениях, основанных на разрезании поверхности высокого рода на более простые части. Предложенная в этой работе техника может оказаться полезной для этого подхода.

Автор признателен А.Ю.Морозову, А.А.Рослому и К.А.Тер-Мартиросяну за полезные обсуждения.

Литература

1. *Вайсбурд И.* ЯФ, 1988, **48**, 57.
2. *Морозов А., Рослый А.* Препринт ИТЭФ-42, 1988.
3. *Blau S., Carlip S., Clements M., S.Della Pietra and V.Della Pietra.* Preprint UTTG-14-87, Texas.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий, М.: Наука, 1984, с. 142.

Поступила в редакцию
10 июня 1988 г.
После переработки
28 июля 1988 г.

Институт теоретической и
экспериментальной физики