Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 6, с. 367 – 373 

# Поправки к величине томсоновского сечения, обусловленные релятивистскими эффектами и наличием дрейфовой скорости классического заряда в поле монохроматической плоской волны

*А. В. Пересторонин*[1)]

*Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 января 2017 г.

Предложен подход к решению релятивистской задачи о движении классического заряда в поле монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической), основанный на анализе 4-векторного уравнения движения заряда в совокупности с 4-векторным и тензорными уравнениями, которым удовлетворяют компоненты тензора электромагнитного поля монохроматической плоской волны, и позволяющий получить аналитические выражения для усредненного по времени квадрата 4-ускорения заряда, а также для усредненных значений любых, периодических по времени системы отсчета величин. Получены выражения, описывающие в произвольной инерциальной системе отсчета интегральную мощность рассеянного излучения, пропорциональную усредненному по времени квадрату 4-ускорения заряда, и интегральное сечение рассеяния, являющееся отношением мощности рассеянного излучения к интенсивности падающего. Для системы отсчета, в которой заряд в среднем покоится, найдено выражение, определяющее величину сечения рассеяния, совпадающее при круговой и линейной поляризации падающей волны с известными результатами, и описывающее, кроме того, случай эллиптической поляризации падающей волны. Для лабораторной системы отсчета, в которой начальная скорость заряда равна нулю, получено выражение, определяющее величину сечения рассеяния, учитывающее релятивистские эффекты и наличие в этой системе отсчета ненулевой дрейфовой скорости частицы. В случае круговой поляризации падающей волны сечение рассеяния в лабораторной системе отсчета равно величине томсоновского сечения.

DOI: 10.7868/S0370274X17060091

**1. Введение.** В классической теории томсоновского рассеяния рассматривается нерелятивистское движение точечного заряда в электромагнитном поле монохроматической плоской волны линейной поляризации. В теории Томсона отношение полной или интегральной усредненной мощности $\mathcal{P}$ излучения заряда, ускоренно движущегося под действием внешнего поля этой волны, к интенсивности падающего излучения $I$ равно величине томсоновского сечения

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0, \tag{1}$$

связанного с классическим радиусом $r_q$ частицы, имеющей заряд $q$ и массу $m$, формулой

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_q^2; \quad r_q = \frac{q^2}{mc^2}, \tag{2a}$$

где $c$ – скорость света. При выводе (1) не учитываются релятивистские поправки и реакция излучения [1].

В рамках томсоновской теории предполагается, что колеблющийся в переменном поле заряд в среднем покоится, т.е. величина усредненной по времени или дрейфовой скорости заряда равна нулю. В общем случае такое предположение не является оправданным. Так, в работе [2] в результате нерелятивистского анализа поведения заряда в переменном поле сделан вывод о существовании, наряду с колебательным движением, систематического дрейфа частицы в поле волны, скорость которого зависит от начальных условий. В рамках релятивистского подхода к решению задачи о движении заряда в поле монохроматической плоской электромагнитной волны [3–5] подтверждается наличие ненулевой дрейфовой скорости частицы в лабораторной системе отсчета, т.е. такой системе отсчета, в которой заряд покоился в начальный момент времени. В [2] отмечено, что “наличие систематического дрейфа у частицы в поле волны меняет качественную картину рассеяния света на свободных частицах”, поскольку “приводит к изменению углового распределения и дает смещение рассеянной частоты”.

В настоящей работе движение заряда рассматривается с учетом релятивистских эффектов и наличия дрейфовой скорости заряда в электромагнитном поле монохроматической плоской волны, имеющей

[1)]e-mail: anatoly@sci.lebedev.ru

любую возможную поляризацию (линейную, круговую или эллиптическую). На основе анализа релятивистских уравнений движения, не учитывающих реакцию излучения, получены выражения, определяющие в произвольной инерциальной системе отсчета интегральную мощность излучения (величину, не описывающую характеристики углового распределения излучения, но являющуюся результатом интегрирования углового распределения мощности излучения по полному телесному углу) и полное или интегральное сечение рассеяния, равное отношению мощности рассеянного излучения к интенсивности падающего.

**2. Сечение рассеяния в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится, для случаев линейной и круговой поляризации.** При нулевой дрейфовой скорости заряда, т.е. в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится, выражения, определяющие величину сечения рассеяния с учетом релятивистских поправок для случаев монохроматических плоских волн линейной и круговой поляризации, получим в результате преобразования известных результатов, приведенных в [6] в виде решений задач 3 и 4 к §73. В них определяется "интенсивность излучения заряженной частицей, стационарно движущейся в поле циркулярно-поляризованной плоской электромагнитной волны" и в поле линейно поляризованной волны. Согласно уравнению (73.7) в [6], определяемая в этих задачах величина имеет размерность мощности. Для модуля волнового вектора, обозначенного здесь как $k_4$, частоты излучения $\omega$, длины волны $\lambda$ и периода колебаний $T_\omega$ падающего монохроматического излучения выполняются соотношения

$$k_4 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c\,T_\omega}. \tag{2b}$$

Определив безразмерную величину

$$\mu^2 = \frac{r_q \lambda^2}{\pi}\frac{I}{mc^3}, \tag{2c}$$

выразим, используя (2), в решениях задач 3 и 4 к §73 амплитудные значения вектора напряженности электрического поля падающего излучения через интенсивность этого излучения $I$. Преобразовав решения этих задач, запишем их в форме соотношений, определяющих величину сечения рассеяния для случаев разной поляризации падающей волны:

$$\begin{aligned} &\text{для круговой –}\quad \frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0\left(1+\mu^2\right);\\ &\text{для линейной –}\quad \frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0\left(1+\frac{3}{4}\mu^2\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Определенная равенством (2c) величина $\mu^2$ в два раза меньше аналогичной безразмерной величины, нередко используемой различными авторами при анализе релятивистского поведения заряда в волне (в работе [3] она обозначена как $\mu$, в [5] – $q^2$, в [7] – $x$).

Выражения, описывающие при нулевой дрейфовой скорости заряда поправки к величине томсоновского сечения, обусловленные релятивистскими эффектами, для случаев линейной и круговой поляризации падающей волны, приведены здесь в такой форме записи (3), которая удобна для сравнения полученных в настоящей работе результатов с известными.

**3. Связь мощности излучения и сечения рассеяния с усредненным по времени квадратом 4-ускорения заряда.** Согласно [6], полное количество энергии $\Delta\mathcal{E}$, излучаемое ускоренным зарядом, движение которого характеризуется 4-вектором ускорения $W_i$, определяется (см., например, уравнение (73.4) и (73.6) в [6]) равенством

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2q^2}{3}\int\left(-W_n^2\right)c\,dt = \int d\mathcal{E}^{\mathrm{rad}},$$

где $W_n^2$ – квадрат 4-ускорения, имеющий размерность, равную размерности квадрата обратного расстояния. Если $W_n^2$ является периодической $W_n^2(t+T) = W_n^2(t)$ функцией времени $t$ с периодом $T$, то усредненный по времени квадрат 4-ускорения $\left\langle -W_n^2\right\rangle_t$ определяется интегралом

$$\left\langle -W_n^2\right\rangle_t = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\left(-W_n^2\right)dt. \tag{4}$$

Полное количество энергии $\Delta\mathcal{E}_T$, излучаемое зарядом за время, равное периоду $T$, пропорционально усредненному квадрату 4-ускорения:

$$\Delta\mathcal{E}_T = \int\limits_t^{t+T} d\mathcal{E}^{\mathrm{rad}} = -\frac{2q^2}{3}c\int\limits_t^{t+T} W_n^2\,dt = \frac{2q^2}{3}c\,T\left\langle -W_n^2\right\rangle_t,$$

и, следовательно, мощность излучения, являющаяся отношением излучаемой за период энергии $\Delta\mathcal{E}_T$ к величине периода $T$, связана с величиной $\left\langle -W_n^2\right\rangle_t$ формулой

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{E}_T}{T} = \frac{2}{3}q^2\,c\left\langle -W_n^2\right\rangle_t. \tag{5}$$

Из (5) с учетом (2) следует соотношение

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0\,\frac{\left\langle -W_n^2\right\rangle_t}{\mu^2 k_4^2}. \tag{6}$$

Вычисление величины интегрального сечения рассеяния (6) сводится, таким образом, к нахождению результата операции усреднения (4) квадрата 4-ускорения заряда по времени системы отсчета.

**4. Описание результатов предлагаемого подхода к решению релятивистской задачи о движении заряда в поле монохроматической плоской волны.** В настоящей работе приводятся результаты предлагаемого подхода к решению релятивистской задачи о движении классического заряда в поле монохроматической плоской волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической), относящиеся к вычислению в произвольной инерциальной системе отсчета интегрального сечения рассеяния. Более подробно излагаемые далее результаты и способы их получения описаны в работе [8].

Для вычисления результата операции усреднения по времени (4), определяющего сечение (6), необходимо убедиться в том, что квадрат 4-ускорения является периодической функцией времени и найти значение периода $T$, который, вообще говоря, не равен периоду $T_\omega$ волны [3, 4], в поле которой движется частица.

*4.1. Решения уравнений движения в произвольной инерциальной системе отсчета.* В результате анализа 4-векторного уравнения движения заряда во внешнем электромагнитном поле, не учитывающего реакцию излучения, в совокупности с тензорными и 4-векторным уравнениями, которым удовлетворяют компоненты тензора электромагнитного поля монохроматической плоской волны, в [8] получены точные решения уравнений движения в виде зависимостей 4-скорости $U_i$ и 4-координаты $X_i$ частицы от параметра $\Phi$, определяемого значением фазы волны в точке нахождения частицы. В произвольной инерциальной системе отсчета 4-вектор скорости $U_i$ частицы, движущейся в поле монохроматической плоской волны, может быть представлен в форме

$$U_i\,(\Phi) = \sqrt{1+\mu^2}\;\overline{U}_i + Z_i^{(1)}\cos\Phi + \\ + Z_i^{(2)}\sin\Phi + Z_i^{(3)}\cos 2\Phi + Z_i^{(4)}\sin 2\Phi, \tag{7}$$

где $\overline{U}_i$ – постоянный 4-вектор дрейфовой скорости, а четыре постоянных 4-вектора $Z_i$ зависят от начальных условий и поляризации волны. В случае круговой поляризации волны $Z_i^{(3)} = Z_i^{(4)} = 0$.

В работе [7] приведено решение задачи о движении классического заряда во внешнем электромагнитном поле плоской волны, не учитывающее реакцию излучения, в виде 4-векторной зависимости импульса (пропорционального 4-вектору скорости) от значения 4-потенциала в точке нахождения частицы (уравнение (6), гл. 2 в [7]). Если подставить в это уравнение выражение для 4-потенциала монохроматической плоской волны линейной поляризации, пропорциональное косинусу фазы (с. 11 в [7]), то осциллирующие слагаемые будут содержать зависимости от косинуса фазы и косинуса удвоенной фазы. Подстановка выражения для 4-потенциала волны круговой поляризации, являющегося суммой двух слагаемых, одно из которых пропорционально косинусу, а другое – синусу фазы (с. 56 в [7]), приведет к тому, что осциллирующие слагаемые будут содержать зависимости от косинуса и синуса фазы. Таким образом, полученное решение (7) не противоречит известному решению задачи о движении классического заряда в поле плоской волны, приведенному в [7].

В отличие от обычно принимаемого для работы в псевдоевклидовом пространстве соглашения о мнимом значении временно́й компоненты 4-вектора, здесь для 4-векторов используется форма записи, при которой их пространственные компоненты считаются мнимыми величинами:

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{i}x_\alpha \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{i}x_\alpha \\ c\,t \end{Bmatrix}.$$

В записи компонент четырехмерных величин и трехмерных векторов греческие индексы $\alpha$, $\beta\ldots$ пробегают значения от 1 до 3, а латинские индексы $i$, $n$ – от 1 до 4. Три пространственные компоненты $x_\alpha$ 4-вектора $X_i$ являются составляющими трехмерного вектора $\mathbf{x}$. Дифференциал собственного времени материальной точечной частицы выражается равенством $ds = \sqrt{(dX_i)^2}$, а 4-скорость

$$\frac{dX_i}{ds} = U_i = \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{i}u_\alpha \\ u_4 \end{Bmatrix}, \\ u_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}, \qquad \mathbf{u} = u_4\,\frac{\mathbf{v}}{c} \tag{8}$$

является единичным 4-вектором $U_i^2 = 1$, в отличие от пространства Минковского (в котором временна́я компонента 4-вектора – мнимая величина), где $ds = \sqrt{-(dX_i)^2}$, а $U_i^2 = -1$. В рамках этих определений квадрат времениподобных 4-векторов является положительной величиной, а пространственноподобных – отрицательной.

Плоская волна характеризуется волновым 4-вектором нулевой длины

$$K_i = \begin{Bmatrix} \mathrm{i}k_\alpha \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{i}k_\alpha \\ \omega/c \end{Bmatrix}, \qquad k_\alpha^2 = k_4^2, \quad K_n^2 = 0,$$

где $k_\alpha$ являются составляющими трехмерного волнового вектора $\mathbf{k}$, а электромагнитное поле плоской волны (см. например определение плоской волны, приведенное в работе [7] и воспроизведенное в [8] с использованием обозначений, принятых в настоящей работе) зависит от четырехмерных координат $X_i$ только через одну инвариантную переменную фазы волны

$$\varphi = K_n X_n = (\omega/c)\,(ct - \mathbf{n_k x})\,, \qquad \mathbf{n_k} = \mathbf{k}/k_4.$$

Содержащаяся в (7) величина $\Phi$ является разностью

$$\Phi = \varphi - \varphi_0 \tag{9}$$

между значением фазы волны $\varphi$ в произвольной 4-точке $X_i$, в отношении которой подразумевается ее принадлежность к мировой линии частицы, и значением фазы волны $\varphi_0 = K_m X_m^0$ в начальной точке мировой линии $X_i^0$.

Постоянный единичный 4-вектор $\overline{U}_i$, содержащийся в решении (7), определяется аналогично (8):

$$\begin{gathered}\overline{U}_i = \begin{Bmatrix}\overline{U}_\alpha \\ \overline{U}_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathrm{i}\overline{u}_\alpha \\ \overline{u}_4\end{Bmatrix}, \\ \overline{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\overline{\mathbf{v}}^2/c^2}}, \qquad \overline{\mathbf{u}} = \overline{u}_4\,\frac{\overline{\mathbf{v}}}{c}.\end{gathered} \tag{10}$$

В [8] показано, что трехмерный вектор $\overline{\mathbf{v}}$ является дрейфовой скоростью частицы в поле монохроматической плоской волны, в силу равенства $\overline{\mathbf{v}} = \langle\mathbf{v}\rangle_t$, где $\langle\mathbf{v}\rangle_t$ – усредненный по времени вектор скорости. Операция усреднения вектора мгновенной скорости по времени системы отсчета $t$ определена так же, как это сделано в выражении (4) в отношении квадрата 4-вектора ускорения.

При движении заряда в поле плоской волны сохраняется инвариантное скалярное произведение $K_n U_n$. Следствием постоянства этой величины и определения $U_i = dX_i/ds$ является пропорциональность

$$(K_n U_n) = \frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{const} \quad\Rightarrow\quad d\varphi = d\Phi = (K_n U_n)\,ds$$

дифференциалов фазы и собственного времени частицы, движущейся в поле плоской волны. Поэтому дифференцирование любого выражения по собственному времени $ds = c\,dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$ может быть сведено к дифференцированию по фазе. Кроме того, сохраняющаяся величина $K_n U_n$ связана простой формулой с другим скалярным произведением

$$(K_n U_n) = \sqrt{1+\mu^2}\,\left(K_m \overline{U}_m\right), \tag{11}$$

что является следствием четырехмерной "перпендикулярности" 4-векторов $Z_i$ и волнового 4-вектора $Z_n K_n = 0$. Эти обстоятельства позволяют проинтегрировать уравнение (7), т.е. получить решение в форме 4-векторной зависимости $X_i\,(\Phi)$, определяющей мировую линию частицы. Дифференцируя (7), получим зависимость $W_i\,(\Phi)$ 4-ускорения $W_i = dU_i/ds$ от фазы $\Phi$.

*4.2. Периодичность квадрата 4-ускорения.* Совокупность двух равенств $W_i = W_i\,(\Phi)$ и $c\,t = X_4 = X_4\,(\Phi)$ можно считать параметрическим представлением неявной функциональной зависимости $W_i = W_i\,(t)$. В [8] показано, что функция $W_i = W_i\,(t)$, хотя и не может быть выражена в явном виде, но, тем не менее, является периодической функцией времени системы отсчета $t$, т.е. принимает одинаковые значения в моменты, разделенные промежутком времени, равным периоду

$$T = \frac{2\pi}{c}\frac{\overline{U}_4}{\left(K_n\overline{U}_n\right)} = T_\omega \frac{K_4\overline{U}_4}{\left(K_m\overline{U}_m\right)} = \frac{T_\omega}{1-(\mathbf{n_k}\overline{\mathbf{v}}/c)}. \tag{12}$$

Периодической функцией времени с тем же периодом (12) является 4-вектор скорости $U_i$. Величины, которые можно представить в виде выражений, содержащих только периодические по времени функции, например вектор мгновенной скорости $\mathbf{v}\,(t) = c\,\mathbf{u}\,(t)\,/u_4\,(t)$ и квадрат 4-ускорения $W_n^2 = W_\alpha^2 + W_4^2$, тоже являются периодическими функциями времени системы отсчета $t$.

*4.3. Усреднение квадрата 4-ускорения по времени.* В [8] показано, что квадрат 4-ускорения заряда, движущегося в поле плоской волны, определяется значением квадрата напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ плоской волны в точке нахождения частицы

$$-W_n^2 = \left(\frac{q}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(K_m U_m\right)^2}{K_4^2}\,\mathbf{E}^2. \tag{13}$$

Из (13) следует, что ускорение частицы отсутствует в тех точках траектории, в которых плотность электромагнитной энергии $\mathbf{E}^2/4\pi$ поля плоской волны равна нулю, если такие точки существуют.

Для зависимости квадрата напряженности электрического поля монохроматической плоской волны от фазы можно использовать представление [8]:

$$\mathbf{E}^2 = \frac{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}{2}\left(1+\gamma\cos\left(2\Phi+\delta\right)\right), \tag{14}$$

где $\sqrt{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*/2}$ – действительная положительная величина, аналогичная амплитуде волны, $\delta/2$ – начальная фаза волны, $\gamma$ – параметр эллиптичности волны, который связан с величинами большой $\mathfrak{a}$ и малой $\mathfrak{b}$ полуосей эллипса поляризации и его эксцентриситетом $\epsilon$ соотношениями

$$\gamma = \frac{1-\mathfrak{b}^2/\mathfrak{a}^2}{1+\mathfrak{b}^2/\mathfrak{a}^2} = \frac{\epsilon^2}{2-\epsilon^2}, \qquad \text{где} \qquad \epsilon = \sqrt{1-\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}.$$

Линейной поляризации волны соответствует значение параметра $\gamma = 1$, а круговой поляризации – $\gamma = 0$. В монохроматической плоской волне плотность потока энергии определяется формулой $\mathbf{S} = \left(c\,\mathbf{E}^2/4\pi\right)\mathbf{n_k}$. Поскольку модуль усредненного вектора $\mathbf{S}$ является интенсивностью $I = c\,\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*/8\pi$ этой волны, равенство (2c) можно переписать в виде

$$\mu^2 = \frac{1}{k_4^2}\left(\frac{q}{mc^2}\right)^2\frac{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}{2} = \frac{1}{k_4^2}\frac{r_q}{mc^2}\frac{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}{2}. \tag{2d}$$

Формулы (2), (9), (11), (14) позволяют преобразовать выражение (13) для квадрата 4-ускорения к форме записи, которая удобна для вычислений результата операции усреднения по времени системы отсчета.

Для усреднения различных величин по времени в [8] использованы единообразные формулы, выражающие результат операции усреднения по времени через результат операции усреднения по фазе

$$\langle \mathbf{v}\rangle_t = \frac{\langle u_4\mathbf{v}\rangle_\varphi}{\sqrt{1+\mu^2}\,\overline{u}_4}; \qquad \left\langle -W_n^2\right\rangle_t = \frac{\left\langle -W_n^2\,U_4\right\rangle_\Phi}{\sqrt{1+\mu^2}\,\overline{U}_4}. \tag{15}$$

Операции усреднения по параметрам $\Phi$ и $\varphi$, обозначенные здесь угловыми скобками с соответствующей буквой внизу, эквивалентны в силу (9). Связь между операциями усреднения, например, квадрата 4-ускорения $W_n^2$ по времени и произведения $u_4W_n^2$ по фазе (вторая формула (15)) обоснована возможностью преобразования дифференциала времени ($c\,dt = u_4 ds$) с помощью (11) и (12):

$$dt = \frac{1}{(K_pU_p)}\frac{u_4\,d\Phi}{c} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{T}{2\pi}\frac{1}{\overline{u}_4}\,u_4\,d\varphi,$$

что позволяет сделать замену переменных в интеграле (4). В рамках этого подхода в [8] получены выражения для ряда усредненных по времени величин, в том числе и средней кинетической энергии классического заряда, движущегося в поле волны произвольной поляризации (линейной, круговой или эллиптической), в произвольной инерциальной системе отсчета. Для лабораторной системы отсчета полученные в [8] выражения, определяющие среднюю кинетическую энергию заряда, движущегося в поле волны линейной или круговой поляризации, совпадают с результатами работы [3].

Выполненное в [8] вычисление величины $\left\langle -W_n^2\right\rangle_t$ приводит, с учетом (6), к результату, в котором сечение рассеяния в произвольной инерциальной системе отсчета зависит от значений компонент $\overline{U}_i$ дрейфовой 4-скорости частицы

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0\left(\left(1+\mu^2\right)\frac{\left(K_n\overline{U}_n\right)^2}{K_4^2} - \frac{\gamma^2}{4}\mu^2\frac{\left(K_l\overline{U}_l\right)}{K_4\overline{U}_4}\right). \tag{16}$$

*4.4. Сечение рассеяния, выраженное через начальные условия.* Тензор электромагнитного поля $F_{in}$ плоской волны, зависящий от четырехмерных координат $X_i$ только через одну инвариантную переменную фазы волны $\varphi$ может рассматриваться как тензорная функция $F_{in} = F_{in}(\varphi)$ одной переменной $\varphi$ и, следовательно может быть определена производная $\dot{F}_{in} = dF_{in}/d\varphi$. В [8] получена связь между дрейфовой 4-скоростью частицы, движущейся в поле монохроматической плоской волны, и начальными условиями, т.е. значениями полевых величин и 4-скорости частицы в начальной точке мировой линии

$$\overline{U}_i = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\Bigg(U_i^0 + \mu^2\frac{K_i}{(K_mU_m^0)} + \tag{17}$$
$$+ \frac{\mu\,K_4}{\left(K_pU_p^0\right)}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}}\dot{F}_{in}^0U_n^0 - \mu^2\frac{\gamma}{2}\cos\left(2\varphi_0+\delta\right)\frac{K_i}{\left(K_lU_l^0\right)}\Bigg),$$

где параметр $\mu$, в зависимости от знака заряда частицы, может принимать как положительные, так и отрицательные значения $\mu = (q/|q|)\sqrt{\mu^2}$. Содержащаяся в (17) величина $\dot{F}_{in}^0$ является значением тензорной функции $\dot{F}_{in}$ в начальной точке мировой линии $X_i^0$, а $U_i^0$ – значением 4-векторной функции $U_i$ в той же точке $X_i^0$. Уравнение (17), описывающее связь между дрейфовой 4-скоростью частицы и начальными условиями, может применяться как в ситуации движения заряда в поле бесконечной монохроматической плоской волны, занимающей все пространство в любой момент времени, так и в ситуации волны с резким передним фронтом. В первом случае начальной точкой $X_i^0$ можно считать, вообще говоря, любую 4-точку, принадлежащую мировой линии частицы.

Во втором случае начальной точкой мировой линии частицы будем считать 4-точку $X_i^0$, где фаза волны имеет значение $\varphi_0 = K_nX_n^0$, с пространственными координатами $x_\alpha^0$, которые имеет частица в момент $t^0 = x_4^0/c$ прихода переднего фронта волны в эту точку, и временно́й координатой $x_4^0 = ct^0$. Частица движется равномерно и прямолинейно или покоится до момента прихода переднего фронта волны точку с координатами $x_\alpha^0$. В силу непрерывности всех составляющих вектора скорости в момент прихода волны в точку нахождения частицы, 4-вектор $U_i^0$ является как начальным значением 4-скорости частицы в поле волны, так и постоянным до прихода волны 4-вектором скорости частицы. Таким образом, в ситуации когда волна имеет резкий передний фронт, начальными условиями удобно считать 4-скорость частицы до прихода волны и значения полевых величин на переднем фронте волны, определяемым уравнением $\varphi = \varphi_0$, которое описывает плоскость перпендикулярную направлению распространения волны, движущуюся в этом направлении со скоростью света.

Формула (16) для интегрального сечения рассеяния может быть выражена через начальные условия. Действительно, в силу (11), получим выражение

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \, \frac{\left(K_l U_l^0\right)}{K_4} \left( \frac{\left(K_n U_n^0\right)}{K_4} - \frac{\gamma^2}{4} \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}\,\overline{U}_4} \right), \quad (18a)$$

где в знаменателе второго слагаемого, согласно (17), содержится величина

$$\sqrt{1+\mu^2}\;\overline{U}_4 = U_4^0 + \mu^2 \frac{K_4}{\left(K_m U_m^0\right)} - \quad (18b)$$
$$- \frac{\mu\, K_4}{\left(K_p U_p^0\right)} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*}}\, \dot{F}^0_{\beta 4} U^0_\beta - \mu^2 \frac{\gamma}{2} \cos\left(2\Phi_0 + \delta\right) \frac{K_4}{\left(K_l U_l^0\right)}.$$

**5. Сечение рассеяния и мощность излучения в двух различных системах отсчета.** Используем приведенные в разделе 4 соотношения для получения выражений, определяющих величины сечения рассеяния в двух различных системах отсчета: в лабораторной и в которой заряд в среднем покоится, и сравним значения мощности излучения в этих системах.

*5.1. Сечение рассеяния в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится.* При нулевой дрейфовой скорости заряда

$$\overline{\mathbf{v}} = 0, \qquad \overline{U}_i = \begin{Bmatrix} \overline{U}_\alpha \\ \overline{U}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \left(K_n \overline{U}_n\right) = K_4$$

из (16) следует выражение для сечения рассеяния

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \left( 1 + \mu^2 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \right), \quad (19)$$

совпадающее в предельных случаях круговой $\gamma = 0$ и линейной $\gamma = 1$ поляризации волны с выражениями (3), являющимися преобразованными решениями задач 3 и 4 к §73 в [6], и учитывающее наряду с известными случаями круговой и линейной поляризации еще и случай эллиптической поляризации $0 < \gamma < 1$ падающей волны. Соотношение (19) в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится, определяет поправки к величине томсоновского сечения, обусловленные релятивистскими эффектами.

В работе [5] проанализированы угловые и частотные характеристики излучения, создаваемого зарядом, движущимся в поле монохроматической плоской волны. Полная мощность излучения вычислялась авторами [5] путем интегрирования по полному телесному углу и суммированию по всем возможным частотам полученного ими в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится, выражения, описывающего угловое распределение мощности рассеянного излучения на фиксированной гармонике. В результате такого вычисления найдена формула для полной мощности излучения заряда, движущегося в поле волны круговой поляризации соответствующая решению задачи 3 к §73 в [6] или первому соотношению (3). Полученное выражение (уравнение (3.18) в [5]) относится только к ситуации круговой поляризации падающей волны (в отличии от формулы (19), описывающей все возможные поляризации). Однако при анализе случаев линейной или эллиптической поляризации падающей волны, используемый авторами [5] метод встречается с математическими трудностями, которые не позволяют получать явное выражение для полной мощности излучения заряда, движущегося в поле такой волны. Кроме того, следует отметить расхождение результата сравнения величин мощности излучения в двух различных системах отсчета, приведенных в пункте 5.3 настоящей работы, с результатами статьи [5].

*5.2. Сечение рассеяния в лабораторной системе отсчета.* При нулевой начальной скорости

$$\mathbf{v}^0 = 0, \qquad U_i^0 = \begin{Bmatrix} U_\alpha^0 \\ U_4^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \left(K_m U_m^0\right) = K_4$$

временна́я компонента дрейфовой 4-скорости заряда, согласно (18b), определяется выражением

$$\sqrt{1+\mu^2}\;\overline{U}_4 = 1 + \mu^2 - \frac{\gamma}{2}\,\mu^2 \cos\left(2\varphi_0 + \delta\right),$$

подстановка которого в (18a) дает сечение рассеяния в лабораторной системе отсчета

$$\frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{\gamma^2/4}{\left(1+\mu^2\right)/\mu^2 - (\gamma/2)\cos\left(2\varphi_0 + \delta\right)} \right). \quad (20)$$

Содержащаяся в (20) полная фаза $\varphi_0 + \delta/2$, т.е. сумма начальной фазы $\delta/2$ и фазы $\varphi_0$, определяет значения полевых величин на переднем фронте волны. При малых $|\mu|$, поскольку

$$|\mu| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\mu^2}{\mu^2} \approx \frac{1}{\mu^2} \gg 1 > \frac{\gamma}{2}\cos\left(2\varphi_0 + \delta\right),$$

получаем выражение, не зависящее от значения полной фазы волны $\varphi_0 + \delta/2$ на ее переднем фронте

$$|\mu| \ll 1 : \qquad \frac{\mathcal{P}}{I} \approx \sigma_0 \left( 1 - \mu^2 \frac{\gamma^2}{4} \right).$$

При больших значениях $|\mu| \gg 1$ в формуле

$$\frac{\mathcal{P}}{I} \approx \sigma_0 \left( 1 - \frac{\gamma^2/4}{1 - (\gamma/2)\cos\left(2\varphi_0 + \delta\right)} \right)$$

не содержится параметр $\mu$, следовательно сечение не зависит от частоты падающей волны и ее интенсивности.

В случае круговой поляризации падающей волны сечение рассеяния в лабораторной системе отсчета оказывается равно томсоновскому

$$\gamma = 0 : \qquad \frac{\mathcal{P}}{I} = \sigma_0 .$$

*5.3. Сравнение мощности излучения в двух различных системах отсчета.* В работе [5] сравнивали мощности излучения заряда в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится, для случая когда падающая волна имеет круговую поляризацию (уравнение (3.35) в [5]). Обозначим, как и в этой работе, значения рассматриваемых величин в лабораторной системе отсчета (Laboratory frame) буквой L, а в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится (average Rest frame) – буквой R. Из (19) и (20) для случая круговой поляризации получим соотношение между значениями мощности рассеянного излучения и интенсивности падающего излучения в двух рассматриваемых системах отсчета

$$\gamma = 0 : \qquad \mathcal{P}_{\rm L} = \frac{I_{\rm L}}{I_{\rm R}} \frac{\mathcal{P}_{\rm R}}{1+\mu^2} .$$

В монохроматической плоской волне отношение интенсивности волны к квадрату частоты является инвариантной величиной, имеющей одинаковое значение в любой инерциальной системе отсчета

$$\frac{I_{\rm L}}{\omega_{\rm L}^2} = \frac{I_{\rm R}}{\omega_{\rm R}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\rm L}}{I_{\rm R}} = \frac{\omega_{\rm L}^2}{\omega_{\rm R}^2} = \left( \frac{K_4^{\rm L}}{K_4^{\rm R}} \right)^2 .$$

Скалярное произведение 4-векторов $K_n U_n$ тоже инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$\left( K_n^{\rm L} U_n^{\rm L} \right) = \left( K_m^{\rm R} U_m^{\rm R} \right) .$$

Левая часть последнего равенства имеет значение $K_n^L U_n^L = K_4^L$. Правую часть выразим с помощью (11) через скалярное произведение $K_p \overline{U}_p$, которое в R-системе имеет значение $K_4^R$. Отсюда следует выражение

$$\frac{K_4^{\rm L}}{K_4^{\rm R}} = \sqrt{1+\mu^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{\rm L}^2}{\omega_{\rm R}^2} = \frac{I_{\rm L}}{I_{\rm R}} = 1+\mu^2 ,$$

связывающее значения интенсивности падающей волны в двух рассматриваемых системах отсчета. В случае круговой поляризации падающей волны, значения мощности рассеянного излучения в двух рассматриваемых системах отсчета оказываются точно равны между собой

$$\gamma = 0 : \qquad \mathcal{P}_{\rm L} = \mathcal{P}_{\rm R} .$$

Полученный результат не совпадает с найденными в работе [5] соотношениями (уравнение (3.35)) между этими величинами.

Для случая линейной или эллиптической поляризации $\gamma \neq 0$ падающей волны из приведенных ранее уравнений можно получить соотношения между значениями мощности или сечения рассеяния в двух рассматриваемых системах отсчета.

**6. Заключение.** Получено аналитическое выражение (16), определяющее поправки к величине томсоновского сечения, обусловленные релятивистскими эффектами и наличием дрейфовой скорости заряда в поле монохроматической плоской волны. Следующая из (16) формула (19), описывающая при нулевой дрейфовой скорости заряда влияние релятивистских эффектов на величину сечения рассеяния, совпадает при круговой и линейной поляризации падающей волны с известными результатами, и учитывает, кроме того, случай эллиптической поляризации падающей волны. Получены аналитические выражения (18), определяющие поправки к величине томсоновского сечения, обусловленные релятивистскими эффектами и начальными условиями, которыми для случая, когда волна имеет резкий передний фронт, являются скорость частицы до прихода волны и значения полевых величин на переднем фронте волны.

Автор благодарен В.Н. Мурзину за внимание к работе, полезные обсуждения и ценные замечания. Автор благодарен А.А. Рухадзе и В.П. Макарову за обсуждение и полезные советы.

1. Я. Б. Зельдович, УФН **115**, 161 (1975).
2. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН **164**, 545 (1994).
3. С. Н. Андреев, В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, Квантовая электроника **39**, 68 (2009).
4. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН **119**, 667 (2003).
5. E. S. Sarachik and G. T. Schappert, Phys. Rev. D **1**, 2738 (1970).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, М. (2003).
7. В. И. Ритус, Труды ФИАН **111**, 5 (1979).
8. А. В. Пересторонин, Препринт ФИАН **11** (2016).