Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 7, с. 437 – 441 © 2017 г. 10 апреля

Влияние поперечного электрического поля на зоны Ландау в вейлевском полуметалле

З. З. Алисултанов[1)]

Институт физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН, 367003 Махачкала, Россия

Дагестанский государственный университет, 367000 Махачкала, Россия

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2017 г.

Исследованы зоны Ландау в вейлевском полуметалле в скрещенных магнитном и электрическом полях. Получено выражение для энергетического спектра такой системы, используя подход, основанный на лоренцевском сдвиге. Показано, что электрическое поле приводит к кардинальной перестройке зон Ландау. Когда электрическое поле равно $v_{\mathrm{F}}H/c$, происходит коллапс уровней Ландау, а движение становится полностью линейным. При этом условии волновая функция отлична от нуля только для состояний с $p_z = 0$, что существенно влияет на явления, связанные с необычными поверхностными состояниями, которые являются визитной карточкой этих материалов.

DOI: 10.7868/S0370274X17070050

Введение. Исследование топологических дираковских материалов является одним из основных направлений современной физики конденсированного состояния [1, 2]. Помимо графена, открытие которого положило начало глобальным исследованиям дираковских материалов, возрастающий интерес представляют топологические изоляторы [3, 4] и вейлевские полуметаллы [1, 2, 5–10]. В вейлевских полуметаллах, в отличие от графена и топологических изоляторов, имеются трехмерные киральные дираковские носители вблизи так называемых вейлевских точек. С топологической точки зрения трехмерные вейлевские точки более стабильны, чем двумерные. Последние вообще возможны только при некоторых типах симметрии кристаллической решетки [1] и дополнительных симметриях. Например, в случае графена, когда не нарушены P- и T-симметрии, в зоне Бриллюэна имеются две неэквивалентные точки Дирака, которые не являются устойчивыми к возмущениям. Киральность и линейный спектр носителей приводят к уникальным транспортным свойствам вейлевских полуметаллов, таким как отрицательное магнитосопротивление, аномальный эффект Холла, киральный магнитный эффект и др. [11–14]. Благодаря этим свойствам вейлевские полуметаллы рассматривают как перспективные материалы для современной электроники.

Помимо объемных состояний, носители заряда в вейлевских полуметаллах обладают бесщелевыми поверхностными состояниями. Различные граничные эффекты для носителей заряда в вейлевских полуметаллах рассмотрены в недавних работах [15, 16]. Наличие экзотических поверхностных состояний – Ферми-дуг – является визитной карточкой вейлевских полуметаллов и приводит к сильной нелокальности транспорта в тонкослойных образцах [11, 17, 18], а также к аномальным квантовым осцилляциям [13]. Поверхностные состояния в виде Ферми-дуг есть уникальное свойство вейлевских полуметаллов, связанное исключительно с киральностью носителей.

В настоящей работе мы исследуем зоны Ландау и квантовые осцилляции в вейлевских и дираковских полуметаллах в скрещенных магнитном и электрическом полях. Такие исследования в графене проведены в работах [19–24]. В скрещенных полях дираковские материалы проявляют интересные особенности, имеющие исключительно релятивистское происхождение. В нерелятивистских материалах, где энергетический спектр является параболическим, циклотронная масса не зависит от энергии. Действительно, в рамках квазиклассической теории, циклотронная масса определяется как

$$m_c(\varepsilon) = (2\pi)^{-1} dS/d\varepsilon, \tag{1}$$

где $S(\varepsilon)$ – площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$ в импульсном пространстве. Для

[1)]e-mail: zaur0102@gmail.com

спектра $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m^*$, получим $m_c = m^*$. Следовательно, приложенное электрическое поле не будет влиять на циклотронную частоту, и, соответственно, на уровни Ландау. В дираковских материалах энергетический спектр линейный, следовательно циклотронная масса, а соответственно и уровни Ландау будут зависеть от электрического поля. Например, для графена $\varepsilon(\mathbf{p}) \sim |p|$ и, значит, $m_c \sim \varepsilon$. Такая зависимость приводит к возможности управления диамагнетизмом дираковских систем с помощью электрического поля. Можно таким образом перестраивать квантовые осцилляции, магнитооптические эффекты и т.д. С другой стороны, в строгой теории явлений, протекающих в скрещенных полях (эффект Холла, магнитопроводимость, магнитотеплопроводность и др.), зависимость уровней Ландау от приложенного возмущения (электрического поля в случае проводимости, градиента температуры в случае теплопроводности) должна учитываться с самого начала.

В связи со сказанным выше необходимо отметить работу Аронова и Пикуса [25], в которой исследовано оптическое поглощение полупроводника в скрещенных магнитном и электрическом полях. Исследование проведено в рамках уравнения Дирака для трехмерного массивного электрона. Здесь мы рассматриваем случай безмассовых киральных носителей. Принципиальная разница между случаями вейлевского полуметалла и полупроводником, описываемым уравнением Дирака, заключается в том, что в полупроводнике, из-за того что эффективная масса является функцией импульса (энергии), каждый электрон обладает своей скоростью. А в случае вейлевского полуметалла есть характерная скорость – скорость Ферми v_{F}, которая является одинаковой для всех электронов системы (вблизи точек Вейля). Это приводит к новым результатам и поэтому исследование вейлевского полуметалла в скрещенных полях заслуживает отдельного внимания.

Спектр и зоны Ландау в вейлевском полуметалле. Гамильтониан электронов вблизи вейлевской точки имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \pm v_{\mathrm{F}} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, \tag{2}$$

где $\pm$ означает киральность вейлевской точки, v_{F} – скорость Ферми носителей, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – матрицы Паули, $\mathbf{p}$ – импульс электронов вблизи точек Вейля: $\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_+)$ и $\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_-)$. Гамильтониан (2) дает следующее выражение для энергетического спектра: $E = \pm v_{\mathrm{F}} p$. Из-за использования всех трех матриц Паули такой гамильтониан защищен от появления щели, т.е. вейлевские точки устойчивы. Действительно, возмущение в виде единичной матрицы (например, электрическое поле) приводит лишь к смещению энергии точки Вейля: $\hat{\mathcal{H}} = \pm v_{\mathrm{F}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + \mathbf{I}U_0 \Rightarrow E = \pm v_{\mathrm{F}} p + U_0$. С другой стороны, возмущение в виде матрицы Паули приводит к смещению компонент импульсов, соответствующих точке Вейля: $\hat{\mathcal{H}} = \pm v_{\mathrm{F}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{U} \Rightarrow E = \pm v_{\mathrm{F}}|\mathbf{p} + \mathbf{U}|$. Ни в одном из перечисленных случаев в спектре не открывается щель. Аналогично можно показать, что в спектре графена щель можно открыть с помощью возмущения в форме $\sigma_z U_z$.

В магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ гамильтониан (2) перепишется следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}} = \pm v_{\mathrm{F}} \left(\sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} H y \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z \hat{p}_z \right). \tag{3}$$

Такой гамильтониан приводит к зонам Ландау

$$\varepsilon_{n,p_z} = \mathrm{sgn}(n) v_{\mathrm{F}} \sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2} n + p_z^2} \quad \text{для} \quad n \neq 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{0,p_z} = \pm v_{\mathrm{F}} p_z \quad \text{для} \quad n = 0, \tag{5}$$

где $l_H = \sqrt{\hbar c/eH}$, знаки $\pm$ соответствуют разным вейлевским точкам.

Киральная природа нулевого уровня Ландау приводит к различным интересным последствиям. Например, электрическое поле, приложенное параллельно магнитному полю, нарушает баланс между состояниями с положительной и отрицательной киральностями. Такое явление называется киральной аномалией [26, 27]. Другой эффект заключается в появлении необычных поверхностных состояний – так называемых Ферми-дуг, которые приводят к необычным квантовым осцилляциям [13]. Далее мы исследуем влияние перпендикулярного электрического поля на зоны Ландау и обсудим последствия такого влияния на киральные свойства вейлевских полуметаллов.

Влияние поперечного электрического поля на уровни Ландау. Направим магнитное поле вдоль оси Z, а электрическое – вдоль оси Y. Тогда гамильтониан перепишется в виде

$$\hat{H} = \pm v_{\mathrm{F}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi} + eEy\mathbf{I}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}/c$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал. Используя калибровку Ландау $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$, получим

$$\hat{H} = v_{\mathrm{F}} \left(\sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} B y \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z \hat{p}_z + \frac{eEy}{v_{\mathrm{F}}} \mathbf{I} \right). \tag{7}$$

Волновое уравнение имеет вид

$$v_{\mathrm{F}}\left(\sigma_x\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}By\right)+\sigma_y\hat{p}_y+\sigma_z\hat{p}_z-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{eEy}{v_{\mathrm{F}}}+p_0\right)\mathbf{I}\right)\psi=0, \tag{8}$$

где $p_0=\varepsilon/v_{\mathrm{F}}$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом лоренцевского сдвига. Следует отметить еще одну разницу между нашим подходом и подходом Аронова и Пикуса. Дело в том, что при рассмотрении режима скрещенных полей в [25] скорость света заменена на скорость Ферми даже в выражении для силы Лоренца. Этот прием позволяет для трехмерного дираковского электрона легко перейти в движущуюся систему отсчета без электрического поля (см., например, задачу 2 к § 22 [28]). На самом деле сила Лоренца должна содержать скорость света, а не скорость Ферми, что мы здесь учитываем, аналогично работе [19], где этот метод был использован для случая графена.

Чтобы решить волновое уравнение (8), перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью cE/H, совпадающей со скоростью дрейфа электронов в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям. Этот переход необходимо осуществить с помощью следующих преобразований Лоренца [19, 29]:

$$p_\nu=g_{\nu\mu}\tilde{p}_\mu, \tag{9}$$

$$g_{\nu\mu}=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0\\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\nu=t,x,y,z$, $\tanh\theta=cE/v_{\mathrm{F}}H=\beta$.

Волновое уравнение в новых переменных имеет вид

$$v_{\mathrm{F}}\left[\sigma_x\left(-\hat{\tilde{p}}_t\sinh\theta+\hat{\tilde{p}}_x\cosh\theta-\frac{e}{c}H\tilde{y}\right)+\sigma_y\hat{\tilde{p}}_y+\right.$$

$$\left.+\sigma_z\hat{\tilde{p}}_z+I\left(\frac{eE\tilde{y}}{v_{\mathrm{F}}}-\hat{\tilde{p}}_t\cosh\theta+\hat{\tilde{p}}_x\sinh\theta\right)\right]\Psi=0. \tag{11}$$

Так как $v_{\mathrm{F}}/c\ll 1$, то изменением полей мы пренебрегаем. Используя свойство матрицы Паули $\sigma_x\sigma_x=I$, а также следствие из этого свойства $I\cosh\theta-\sigma_x\sinh\theta=\exp(-\sigma_x\theta)$, получаем

$$v_{\mathrm{F}}\left(-e^{-\sigma_x\theta}\hat{\tilde{p}}_t+\sigma_x e^{-\sigma_x\theta}\left(\hat{\tilde{p}}_x-\frac{eB}{c\cosh\theta}\tilde{y}\right)+\right.$$

$$\left.+\sigma_y\hat{\tilde{p}}_y+\sigma_z\hat{\tilde{p}}_z\right)\Psi=0. \tag{12}$$

Далее, воспользуемся свойствами

$$e^{-\sigma_x\theta/2}\sigma_y e^{-\sigma_x\theta/2}=\sigma_y,\quad e^{-\sigma_x\theta/2}\sigma_z e^{-\sigma_x\theta/2}=\sigma_z, \tag{13}$$

$$\widetilde{\Psi}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t})=e^{-\sigma_x\theta/2}\Psi(x,y,z,t), \tag{14}$$

для стационарной задачи $\widetilde{\Psi}(\tilde{r},\tilde{t})=\exp(-\mathrm{i}\tilde{\varepsilon}\tilde{t}/\hbar)\tilde{\psi}(\tilde{r})$ получаем окончательно

$$v_{\mathrm{F}}\left(-\frac{\tilde{\varepsilon}}{v_{\mathrm{F}}}+\sigma_x\left(\hat{\tilde{p}}_x-\frac{e}{c}\widetilde{H}\tilde{y}\right)+\sigma_y\hat{\tilde{p}}_y+\sigma_z\hat{\tilde{p}}_z\right)\tilde{\psi}=0, \tag{15}$$

где $\widetilde{H}=H\sqrt{1-\beta^2}$. Положив $\tilde{\psi}=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\tilde{p}_x\tilde{x}+\tilde{p}_z\tilde{z})\right]\psi(\tilde{y})$, для спектра имеем

$$\tilde{\varepsilon}_{n,\tilde{p}_z}=\mathrm{sgn}(n)v_{\mathrm{F}}\sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2}n\sqrt{1-\beta^2}+\tilde{p}_z^2}. \tag{16}$$

Применяя обратные преобразования Лоренца, переходим в неподвижную систему отсчета и получаем

$$\varepsilon_{n,p_x,p_z}= \tag{17}$$

$$=\mathrm{sgn}(n)v_{\mathrm{F}}\sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2}n(1-\beta^2)^{3/2}+p_z^2(1-\beta^2)}+v_0p_x.$$

Решение стационарного уравнения (15) есть

$$\tilde{\psi}_{n,\tilde{p}_x,\tilde{p}_z}(\tilde{r})=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\tilde{p}_x\tilde{x}+\tilde{p}_z\tilde{z})\right]\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{n-1}(\tilde{\zeta})\\ \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(n)\tilde{\varphi}_n(\tilde{\zeta})\end{pmatrix}. \tag{18}$$

где

$$\tilde{\zeta}=\frac{(1-\beta^2)^{1/4}}{l_H}\left(\bar{y}-\frac{\tilde{p}_x l_H^2}{\hbar(1-\beta^2)^{1/2}}\right), \tag{19}$$

$\tilde{\varphi}_n(\tilde{\zeta})$ – собственные функции задачи квантового гармонического осциллятора.

Осуществим теперь обратное преобразование Лоренца. Прежде всего заметим, что

$$\tilde{p}_x=\frac{p_x-v_0\varepsilon_{n,p_x,p_z}/v_{\mathrm{F}}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=p_x\sqrt{1-\beta^2}-$$

$$-\beta\mathrm{sgn}(n)\sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2}n(1-\beta^2)^{1/2}+p_z^2}. \tag{20}$$

Тогда

$$\zeta=\frac{(1-\beta^2)^{1/4}}{l_H}\left(y-\frac{p_x l_H^2}{\hbar}+\frac{l_H^2\beta\mathrm{sgn}(n)}{\hbar(1-\beta^2)^{1/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2}n\sqrt{1-\beta^2}+p_z^2}\right). \tag{21}$$

Наконец, из Лоренц-инвариантности скалярного произведения 4-х импульса $p_\mu=(\varepsilon/v_{\mathrm{F}},-\mathbf{p})$ и 4-х радиус-вектора $x^\mu=(v_{\mathrm{F}}t,\mathbf{r})$

$$\tilde{p}_\mu\tilde{x}^\mu=p_\mu x^\mu \tag{22}$$

следует

$$\tilde{\varepsilon}\tilde{t} - \tilde{p}_x\tilde{x} = \varepsilon t - p_x x. \tag{23}$$

Таким образом, окончательно находим

$$\Psi_{n,p_x,p_z}(r,t) = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\sigma_x\theta/2} e^{-\mathrm{i}(\varepsilon t - p_x x - p_z z)/\hbar} \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(\zeta) \\ \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(n)\varphi_n(\zeta) \end{pmatrix}.$$

При $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ мы получаем, что $\varepsilon = v_{\mathrm{F}} p_x$ (т.е. движение становится одномерным), это является исключительно релятивистским эффектом. Действительно, условие $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ означает, что все остальные компоненты скорости (в данном случае v_y и v_z) должны обратиться в нуль. Иначе нарушится общее условие $|v| = v_{\mathrm{F}}$. Необходимо отметить, что условие $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ может быть достигнуто с помощью приложения электрического поля. Таким образом, приложение продольного электрического поля приводит к глобальным изменениям в энергетическом спектре. Однако эти изменения происходят необычным образом, что обсудим далее.

Коллапс уровней Ландау и исчезновение трехмерных состояний. Рассмотрим более подробно волновую функцию, описанную выражением (24), из которого следует, что при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ и при $p_z \neq 0$ волновая функция исчезает, так как $\zeta \to \infty$. Если же $p_z = 0$, то волновая функция отлична от нуля. Это означает, что при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ исчезают все состояния, кроме состояний с $p_z = 0$. Таким образом, при этом условии спектр становится линейным. Такой результат может быть получен, рассматривая случай $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ с самого начала. Из гамильтониана (7) при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ находим следующее уравнение для волновой функции

$$\left\{ v_{\mathrm{F}}^2 \hbar^2 l_H^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + J_1 I \right\} \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} =$$

$$= (\varepsilon^2 - v_{\mathrm{F}}^2 p_z^2 - v_{\mathrm{F}}^2 p_x^2) \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$J_1 = v_{\mathrm{F}}^2 \hat{p}_y^2 - 2v_{\mathrm{F}}(\varepsilon - v_{\mathrm{F}} p_x)\hbar l_H^{-2} y, \tag{26}$$

где ε – энергетический спектр (17) при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$, т.е. $\varepsilon = v_{\mathrm{F}} p_x$.

Если раскрыть матрицы в (25), получим уравнение

$$J_1 h = (\varepsilon^2 - v_{\mathrm{F}}^2 p_z^2 - v_{\mathrm{F}}^2 p_x^2) h, \tag{27}$$

где $h = u + \nu$. Решение уравнения (27) выражается через функцию Эйри

$$h(\xi) = C\mathrm{Ai}(-\xi), \tag{28}$$

где $\xi = \frac{y}{l} + l^2\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon^2 - v_{\mathrm{F}}^2 p_z^2 - V_{\mathrm{F}}^2 p_x^2)}{v_{\mathrm{F}}^2 \hbar}$, $l = \left(\frac{v_{\mathrm{F}}\hbar}{2(v_{\mathrm{F}} p_x - \varepsilon) l_H^{-2}}\right)^{1/3}$. Подставим $\varepsilon = v_{\mathrm{F}} p_x$, получим, что $\xi \to -\infty$. Используя асимптотическое выражение для функции Эйри $h(\xi) = \{\xi \to -\infty\} \approx \frac{C}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right)$, приходим к выводу, что $h = 0$ при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$. Однако, если мы положим $p_z = 0$, то волновая функция будет отлична от нуля. Действительно, в этом случае $\xi = 0$ за счет второго слагаемого, что дает $h = \frac{C}{3^{3/2}\Gamma(2/3)}$, т.е. при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ существуют только состояния с $p_z = 0$.

Радиус циклотронной орбиты есть функция электрического поля. Действительно, из (21) следует, что при $v_0 \to v_{\mathrm{F}}$ радиус циклотронной орбиты, который определяется как масштаб неоднородности волновой функции вдоль оси y, стремится к бесконечности. На самом деле масштаб неоднородности y_0 определяется через коэффициент перед аргументом y, т.е. $\left((1-\beta^2)^{1/4}/l_H\right) y = y/y_0$, откуда следует, что $y_0 \to \infty$ при $v_0 \to v_{\mathrm{F}}$. С другой стороны, импульс p_z определяется неоднородностью волновой функции вдоль оси z. В данном случае это шаг винтовой линии. Если радиус винтовой линии стремится к бесконечности, то, очевидно, для перемещения на какое-либо расстояние вдоль оси z потребуется бесконечно много времени, т.е. соответствующее состояние не наступит. Это и означает, что при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$ сохраняются только состояния $p_z = 0$.

Коллапс уровней Ландау должен привести к кардинальной перестройке киральных особенностей вейлевских полуметаллов. В частности, квантовые осцилляции, обусловленные замкнутой орбитой кирального нулевого уровня Ландау в тонкопленочных вейлевских полуметаллах, должны исчезнуть при $v_0 = v_{\mathrm{F}}$. Действительно, при этом условии исчезает движение вдоль оси z и орбита разрывается.

Заключение. В настоящей работе мы сделали следующие теоретические предсказания: при наличии поперечного электрического поля зоны Ландау сокращаются и при некотором значении электрического поля коллапсируют. Волновая функция объемных состояний исчезает при $E = v_{\mathrm{F}} H/c$ и состояния оказываются чисто линейными. Указанные эффекты будут влиять на такие явления, как квантовые осцилляции от поверхностных состояний в виде Ферми-дуг, киральная аномалия и т.д.

В конце отметим, что влияние продольного электрического поля на уровни Ландау дает уникальную возможность управлять магнетизмом вейлевских полуметаллов с помощью электрического поля. Лифшиц и Каганов [30], впервые обратившие внимание на этот эффект, предложили использовать его для исследований изоэнергетических поверхностей в полупроводниках. В работе [25] было исследовано оптическое поглощение в полупроводниках в скрещенных магнитном и электрическом полях. Благодаря линейному спектру носителей влияние электрического поля на уровни Ландау в вейлевских полуметаллах существенно сильнее, чем в обычных полупроводниках и других нерелятивистских материалах.

Автор благодарит Vinu Lukoze за интерес к работе. Работа поддержана грантами: президента РФ МК-2130.2017.2, РФФИ # 15-02-03311а, главы Республика Дагестан (2016). Автор искренне благодарен фонду Д. Зимина "Династия" за финансовую поддержку.

---

1. O. Vafek and A. Vishwanath, Ann. Rev. of Cond. Matt. Phys. **5**, 83 (2014).
2. Sh. Jia, S.-Y. Xu, and M. Z. Hasan, Nature Materials **15**, 1140 (2016).
3. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
4. X.-L. Qi and Sh.-Ch. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
5. A. A. Burkov and L. Balents, Phys. Rev. Lett. **107**, 127205(4) (2011).
6. A. Turner and A. Vishwanath, arXiv:1301.0330.
7. A. A. Burkov, J. Phys.: Condensed Matter **27**, 113201 (2015).
8. S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust et al. (Collaboration), Science **349**, 613 (2015).
9. L. Lu, Z. Wang, D. Ye, L. Ran, L. Fu, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, Science **349**, 622 (2015)
10. B. Q. Lv, H. M. Weng, B. B. Fu, X. P. Wang, H. Miao, J. Ma, P. Richard, X. C. Huang, L. X. Zhao, G. F. Chen, Z. Fang, X. Dai, T. Qian, and H. Ding, Phys. Rev. X **5**, 031013 (2015).
11. S. A. Parameswaran, T. Grover, D. A. Abanin, D. A. Pesin, and A. Vishwanath, Phys. Rev. X **4**, 031035 (2014).
12. P. Hosur and X. Qi, Comp. Rend. Phys. **14**, 857 (2013).
13. A. C. Potter, I. Kimchi, and A. Vishwanath, Nat. Commun. **5**, 5161 (2014).
14. D. Bulmash and X.-L. Qi, Phys. Rev. B **93**, 081103(R) (2016).
15. Y. Alavirad and J. D. Sau, Phys. Rev. B **94**, 115160 (2016).
16. В. А. Волков, В. В. Еналдиев, ЖЭТФ **149**(3), 702 (2016).
17. Y. Baum, E. Berg, S. A. Parameswaran, and A. Stern, Phys. Rev. X **5**, 041046 (2015).
18. Y. Baum and A. Stern, arXiv:1612.00018 (2016).
19. V. Lukose, R. Shankar, and G. Baskaran, Phys. Rev. Lett. **98**, 116802 (2007).
20. N. Peres and E. V. Castro, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 406231 (2007).
21. З. З. Алисултанов, Письма в ЖЭТФ **99**(12), 813 (2014).
22. З. З. Алисултанов, Письма в ЖЭТФ **99**(4), 258 (2014).
23. Z. Z. Alisultanov and M. S. Reis, Euro. Phys. Lett. **113**, 28004 (2016).
24. Z. Z. Alisultanov and M. S. Reis, Solid State Comm. **234–235**, 26 (2016).
25. А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, ЖЭТФ **51**, 505 (1966).
26. J. S. Bell and R. Il. Jackiw, Nuovo Cimento A **60**, 47 (1969).
27. S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, Т.2, *Теория поля* (1988).
29. A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **28**, 2235 (1983).
30. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).