

Квантовое обобщение модели Томаса–Ферми

А. В. Чаплик¹⁾

Институт физики полупроводников им. А.В.Ржанова СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 24 марта 2017 г.

Учет межчастичного взаимодействия в приближении среднего поля в теории систем многих тел часто проводится в рамках квазиклассического описания движения частиц. Однако в некоторых случаях квантование части степеней свободы становится существенным. В работе рассмотрены два таких примера – электроны в квантовой яме и экситоны в ловушке, когда возникают нелинейные волновые уравнения. В случае дипольных экситонов в кольцевой ловушке одномерное уравнение типа Гросса–Питаевского допускает аналитическое решение, причем оказывается, что в одномерной симметричной потенциальной яме связанный уровень существует не всегда. Это качественно отличает рассмотренную задачу от аналогичной одночастичной. В случае электронов в квантовой яме нелинейное интегро-дифференциальное уравнение не допускает точного решения, и для нахождения разрешенных уровней энергии используется прямой вариационный метод.

DOI: 10.7868/S0370274X17090107

Введение. Корректный учет межчастичного взаимодействия в системах многих частиц представляет значительные математические трудности. Наиболее частым приближением в таких задачах является приближение среднего поля (ПСП) (mean field approximation), в котором пренебрегают флуктуациями, а частицы рассматриваются как сплошная среда с неоднородной плотностью. Если к тому же описывать систему частиц классической функцией распределения (статистика при этом может быть и квантовой), то возникает хорошо известное приближение Томаса–Ферми. Существуют, однако, ситуации, в которых, по крайней мере, некоторые степени свободы частиц требуют квантового описания. Примерами могут служить электроны в квантовой яме или бозе-частицы (например, дипольные экситоны) в электростатической ловушке. В таких случаях плотность частиц, фигурирующая в ПСП, должна быть выражена через волновые функции частицы в эффективном потенциале. Последний сам зависит от волновых функций и чисел заполнения квантовых состояний, так что надо решать самосогласованную задачу. В случае короткодействующего взаимодействия между частицами (двумерный газ дипольных экситонов) возникает нелинейное волновое уравнение, а если взаимодействие дальнедействующее, уравнение становится интегро-дифференциальным (нелокальные эффекты). К подобным задачам применяют также метод функционала плотности, который на послед-

нем этапе вычислений использует вариационный принцип и численные расчеты. В предлагаемой работе один из упомянутых выше примеров допускает точное аналитическое решение. Имеются в виду дипольные экситоны в плоской кольцевой ловушке в ультраквантовом пределе по радиальному движению. Возникающее здесь волновое уравнение с потенциальной энергией, пропорциональной $|\psi|^2$, решается для прямоугольной ямы конечной глубины в качестве затравочного потенциала ловушки. Второй пример с электронами в МДП-структуре приводит к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению. Нижние уровни энергии находятся в этом случае прямым вариационным методом.

Дипольные экситоны в кольцевой ловушке. В имеющихся экспериментах с кольцевыми ловушками для экситонов [1–4] амплитуда радиальных колебаний частиц много меньше длины окружности кольца. Эффективный потенциал, учитывающий межэкситонное взаимодействие, очевидно, не зависит от азимутального угла в плоскости кольца, так что одночастичный спектр имеет вид $E_{v,l} = \varepsilon_v + Bl^2$, где v и l – радиальное колебательное и вращательное числа соответственно, ε_v – колебательные уровни энергии, $B = \hbar^2/2mR^2$, R – радиус кольца, m – эффективная масса. Межэкситонный потенциал V считаем контактным $V = V_0\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$, $V_0 = 4\pi e^2 L$, где L – плечо диполя, $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'$ – координаты в плоскости кольца. Тогда эффективный потенциал в ПСП имеет вид

$$W(x) = U(x) + V_0 \sum_{v,l} |\psi_{v,l}(\boldsymbol{\rho})|^2 f(\varepsilon_{v,l}). \quad (1)$$

¹⁾e-mail: chaplik@isp.nsc.ru

Здесь $\psi_{v,l}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\psi_v(x)$, φ – азимутальный угол, x – расстояние по радиусу от срединной окружности ловушки, $\psi_v(x)$ – собственные функции радиального движения, $f = [e^{\beta(\varepsilon_v + Bl^2 - \mu)} - 1]^{-1}$ – бозевские числа заполнения, $\beta = 1/T$ – обратная температура. Будем считать температуру малой по сравнению с расстоянием между колебательными уровнями, так что в двойной сумме по состояниям остается лишь вклад с $v = 0$. При этом T остается большим по сравнению с вращательным квантом B , и если $T < T_c$ – температуры бозе-конденсации, то химпотенциал μ равен ε_0 , слагаемое $f(\varepsilon_0)$ заменяем на N_{00} – число частиц в конденсате, а оставшаяся сумма по l асимптотически при $T \gg B$ равна $\pi^2 T/3B$. “Уравнение Шредингера” для функции основного уровня принимает вид

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + [U(x) + g|\psi|^2]\psi = \varepsilon_0\psi, \quad (2)$$

где $g = V_0(N_{00} + \pi^2 T/3B)$. Уравнение (2) записано в атомных единицах $e^2 = m = \hbar = 1$.

Таким образом, ультраквантовый предел описывается уравнением Гросса–Питаевского. Как известно [5], в случае осе-симметричной задачи о вихревой нити в почти идеальном бозе-газе это уравнение решается численно. Рассматриваемый здесь случай допускает аналитическое решение в квадратурах. При заселении нескольких колебательных уровней нужно, очевидно, решать систему уравнений для функций ψ_n , в которую в качестве потенциальной энергии войдет величина $W(x)$ из (1), а в правой части будет стоять $\varepsilon_n\psi_n$.

Рассмотрим простую модель затравочного потенциала: $U(x) = 0$ при $|x| < L/2$ (область II) и $U(x) = U_0$ при $|x| > L/2$ (области I и III). Следует искать решение (2), убывающее на бесконечности и непрерывное со своей первой производной в точках $x = \pm L/2$. Введем обозначение $p = d\psi/dx$ и понизим порядок уравнения (2), перейдя к новой переменной ψ и новой искомой функции p . Получим:

$$\frac{dp^2}{d\psi} = 4(U(x) - \varepsilon_0)\psi + 4g\psi^3. \quad (3)$$

Отсюда в областях I и III имеем: $p^2 = 2(U_0 - \varepsilon_0)\psi^2 + g\psi^4 + A$, где A – константа интегрирования. При $|x| \rightarrow \infty$ величины ψ и p стремятся к нулю, следовательно, $A = 0$. Очевидно, что ψ , как функция основного состояния, является четной по x .

Окончательно, интегрируя выражение для p , получим в областях I и III:

$$\sqrt{g}\psi_{I,III}(x) = \frac{\kappa}{|\sinh[\kappa(x \pm L/2) - \Lambda]|}, \quad (4)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\kappa^2 + g\psi_1^2} - \kappa}{\sqrt{\kappa^2 + g\psi_1^2} + \kappa},$$

$$\kappa^2 = 2(U_0 - \varepsilon_0), \psi_1 \equiv \psi(x = \pm L/2),$$

κ^2 должно быть положительной величиной, поскольку мы ищем решения, соответствующие локализованному в яме состоянию. Постоянной интегрирования в (4) является величина ψ_1 – значение волновой функции на границе ямы. В области II величина A не равна нулю, и $p^2 = A - 2\varepsilon_0\psi^2 + g\psi^4$. В точке $x = 0$ величина p должна обратиться в нуль как производная четной функции. Вводя ψ_0 – значение ψ в точке $x = 0$, получим в области II:

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 2\varepsilon_0(\psi_0^2 - \psi^2) + g(\psi_0^4 - \psi^4). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) выражается через эллиптический синус Якоби. При $0 < x < L/2$

$$\psi_{II} = \psi_0 \operatorname{sn} \left[K \left(\sqrt{\frac{g\psi_0^2}{2\varepsilon_0 - g\psi_0^2}} \right) - x \sqrt{2\varepsilon_0 - g\psi_0^2} \right], \quad (6)$$

где K – полный эллиптический интеграл первого рода, при $-L/2 < x < 0$ ψ_{II} получается из (6) заменой x на $-x$.

Решения (4) и (6) должны быть “сшиты” вместе с первыми производными в точках $\pm L/2$, что даст два уравнения для определения констант ψ_0 и ψ_1 . После этого условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ определит значение уровня энергии ε_0 . “Сшивки” производных приводит к выражению ψ_1 через ψ_0 :

$$\psi_1^2 = \frac{2\varepsilon_0\psi_0^2 - g\psi_0^4}{2U_0}. \quad (7)$$

Сама же величина ψ_0 определяется из уравнения непрерывности ψ в точках $x = \pm L/2$:

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 - g\psi_0^2}{2U_0}} = \operatorname{sn} \left[K \left(\sqrt{\frac{g\psi_0^2}{2\varepsilon_0 - g\psi_0^2}} \right) - \frac{L}{2} \sqrt{2\varepsilon_0 - g\psi_0^2} \right]. \quad (8)$$

Осталось выполнить условие нормировки, чтобы найти ε_0 . Интегрирование ψ^2 в области ямы, где решение описывается эллиптическим синусом, возможно лишь численными методами, что выходит за рамки настоящей работы. Здесь же мы рассмотрим вопрос о существовании связанного уровня, ответ на который оказывается весьма нетривиальным.

Как хорошо известно, в одномерной симметричной яме конечной глубины всегда существует по крайней мере одно связанное состояние. В мелкой и/или узкой яме, для которой выполняется условие $U_0L^2 \ll 1$, соответствующий уровень отстоит от края ямы на величину порядка $U_0^2L^2 \ll U_0$. Как будет показано ниже, это утверждение не имеет места для нелинейного уравнения (2). Взаимодействие между частицами (отталкивание) может “вытолкнуть” даже из симметричной потенциальной ямы последний связанный уровень, а локализованное решение рассматриваемой задачи существует лишь при достаточно слабом взаимодействии и достаточно широкой и/или глубокой яме. Соответствующие количественные критерии выводятся в следующем разделе.

Критерии существования локализованного состояния. Если заселены лишь связанные состояния, т.е. нет частиц в непрерывном спектре, то индуцированная взаимодействием часть потенциала исчезает на бесконечности. Следовательно, асимптотика локализованных решений имеет вид $\exp(-\kappa|x|)$, откуда следует, что возможные значения дискретного уровня удовлетворяют условию $\varepsilon_0 < U_0$. Аргумент полного эллиптического интеграла в (6), (8) должен быть (по модулю) меньше единицы. Комбинируя эти условия, находим $g\psi_0^2 < \varepsilon_0 < U_0$. Это обеспечивает положительность всех подкоренных выражений в уравнении (8).

Чтобы довести решение до конца в аналитическом виде, будем считать, что потенциал “пустой” ловушки удовлетворяет условию мелкой ямы $U_0L^2 \ll 1$. Тогда вклад в нормировку ψ от внутренней части ямы $|x| < L/2$ пренебрежимо мал. Действительно, поскольку ψ_0 есть максимальное значение ψ , то верхняя оценка этого вклада дает ψ_0^2L . Нормировочный интеграл по внешним областям берется элементарно и равен (с учетом (7))

$$N_I = 2 \int_{L/2}^{\infty} \psi^2(x) dx = \frac{2}{g} \left(\sqrt{\kappa^2 + g\psi_1^2} - \kappa \right) = \frac{2}{g} \left[\sqrt{\kappa^2 + \frac{g\psi_0^2(2\varepsilon_0 - g\psi_0^2)}{2U_0}} - \kappa \right]. \quad (9)$$

Поскольку в мелкой яме ε_0 близко к U_0 также и с учетом взаимодействия (это предположение подтверждается результатом), можно пренебречь величиной κ в (9). Учитывая приведенное выше условие $g\psi_0^2 < U_0$, получим оценку $N_I \sim \psi_0^2/\sqrt{U_0}$, что много больше вклада в нормировку от внутренней области $L\psi_0^2$ вследствие неравенства $U_0L^2 \ll 1$. Тогда из уравнения $N_I = 1$ найдем значение ψ_0 :

$$g\psi_0^2 = \varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0^2 - \frac{g^2U_0}{2}} - 2\sqrt{2}gU_0\sqrt{U_0 - \varepsilon_0}, \quad (10)$$

которое надо подставить в (8) и получить замкнутое уравнение на величину ε_0 . Граничным значением ε_0 , при котором еще существует искомое локализованное решение, является $\varepsilon_0 = U_0$. Тогда из требования вещественности ψ_0^2 получим первое (необходимое) ограничение на константу взаимодействия $g^2 \leq 2U_0$. При нарушении этого условия связанных уровней в яме нет.

Следующее ограничение возникает из требования существования вещественного положительного корня уравнения (8), удовлетворяющего требованию $\varepsilon_0 \leq U_0$. Обращая эллиптический синус, можно прийти к уравнению:

$$v\sqrt{\frac{U_0L^2}{2}} = \int_{\arcsin v}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (11)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{g^2}{2U_0}}}, \quad k^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{g^2}{2U_0}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{g^2}{2U_0}}}.$$

Поскольку U_0L^2 мало, величина v в (11) должна быть близка к единице (интервал интегрирования мал), т.е. $g^2/2U_0$ должно быть мало. Тогда $k^2 \approx g^2/8U_0 \ll 1$, интеграл в (11) сводится к $\pi/2 - \arcsin v \approx \sqrt{2(1-v)} = g/\sqrt{8U_0}$.

Таким образом, уровень в мелкой яме существует, если ширина ямы при заданной глубине не меньше $g/2U_0$, что эквивалентно условию на константу взаимодействия $g^2 \leq 4U_0^2L^2 \ll 4U_0$. Ситуация становится совсем прозрачной, если рассмотреть предел δ -образной ямы, допускающий полное решение в элементарных функциях. В этом случае $U(x) = -V_0\delta(x)$, где $V_0 = U_0L$. Решения при $x > 0$, $x < 0$ имеют вид $\psi = C/\sinh k(x_0 \pm x)$, где C и x_0 – подлежащие определению константы, $k^2 = -2\varepsilon_0 > 0$. Из требования, чтобы удовлетворялось уравнение (2), находим $C = k/\sqrt{g}$, а из условия на скачок производной при $x = 0$ следует $k \coth kx_0 = V_0$. После этого условие нормировки дает $2k(\coth kx_0 - 1)/g = 1$, откуда находим $k = V_0 - g/2$. Поскольку k должно быть положительным (затухание на бесконечности), видим, что уровень отрицательной энергии существует лишь при $g < 2V_0 = 2U_0L$, что совпадает с приведенным выше критерием для ямы конечной ширины с мелким уровнем.

Еще раз подчеркнем, что полученные результаты качественно отличают данную задачу от одноча-

стичной, где связанное состояние имеется в любой одномерной симметричной яме.

Электроны в квантовой яме МДП-структуры. Рассматриваемая система изображена на рис. 1. С учетом сил изображения в металличе-

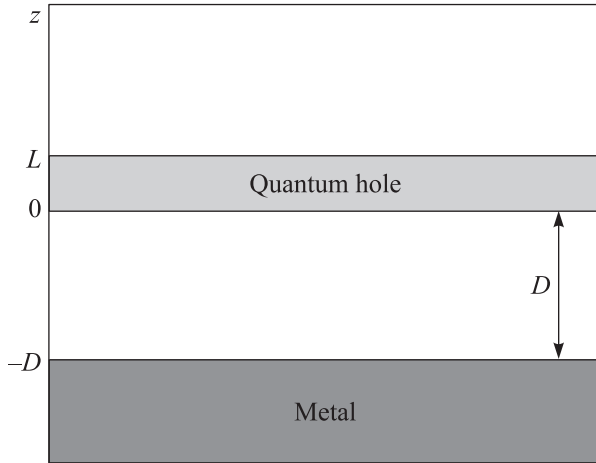


Рис. 1. Квантовая яма в МДП-структуре. Область $z < -D$ занята металлом, квантовая яма расположена при $0 < z < L$

ском электроде потенциал электрон-электронного взаимодействия записывается в виде

$$V_{\text{int}} = \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$W = \frac{e^2}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + z' + 2D)^2}} \right]. \quad (12)$$

Здесь ρ проекция расстояния между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' на плоскость квантовой ямы, z, z' – координаты электронов по оси z , перпендикулярной этой плоскости, ε – фоновая диэлектрическая проницаемость. Плотность частиц равна

$$n = \frac{1}{S} \sum_{k, \mathbf{p}} f(E_{k, \mathbf{p}}) |e^{i\mathbf{p}\rho} \varphi_k(z')|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

где S – площадь системы, \mathbf{p} – импульс в плоскости ямы, $\varphi_k(z)$ – волновая функция поперечного движения, $f(E_{k, \mathbf{p}})$ – фермиевские числа заполнения, $E_{k, \mathbf{p}} = \varepsilon_k + p^2/2m$. Очевидно, что (13) можно записать в виде $n = \sum_k N_k |\varphi_k|^2$, где N_k – полное число частиц в k -й подзоне. Если заселена лишь нижайшая подзона $k = 0$, то после интегрирования в (12) получается

$$V_{\text{int}} = 4\pi\tilde{e}^2 N_0 \left(\int_{-\infty}^z z' |\varphi_0(z')|^2 dz' + z \int_z^{\infty} |\varphi_0(z')|^2 dz' \right),$$

$$\tilde{e}^2 \equiv e^2/\varepsilon. \quad (14)$$

В (14) опущен постоянный вклад $4\pi\tilde{e}^2 N_0 D$ – потенциал, созданный в области квантовой ямы рядами изображения, расположенными в плоскости $z = -2D$.

Найдем частоту межподзонного перехода в квантовой яме, т.е. расстояние $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ между двумя нижними уровнями. Для этого следует решить систему уравнений

$$-\frac{1}{2}\varphi''_{0,1} + [U(z) + V_{\text{int}}(z)]\varphi_{0,1} = \varepsilon_{0,1}\varphi_{0,1} \quad (15)$$

с V_{int} , взятого из уравнения (14). $U(z)$ выбирается таким же, как в предыдущих разделах (симметричная прямоугольная яма), а φ_0 и φ_1 – решения, ортогональные друг другу и исчезающие на бесконечности. Заметим, что потенциал V_{int} определяется только функцией φ_0 (температура равна нулю, уровень Ферми лежит ниже ε_1). Разделив обе части в (15) на $\varphi_{0,1}$ и дважды проинтегрировав, можно свести задачу к обыкновенному нелинейному уравнению четвертого порядка, однако общее решение его найти не удалось. Воспользуемся поэтому прямым вариационным методом с пробными функциями

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi z}{a}, \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi z}{a} \quad \text{при } 0 < z < a,$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 \equiv 0 \quad \text{при } z > a \text{ и } z < 0, \quad (16)$$

в которых варьируемым параметром является эффективный размер состояния a . Тогда имеем для потенциала V_{int} в области $0 \leq z \leq a$:

$$V_{\text{int}} = 4\pi\tilde{e}^2 N_0 \left[z \left(1 - \frac{z}{2a} \right) + \frac{z}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{a} \right]. \quad (17)$$

Значения V_{int} вне этой области не представляют интереса, так как там обе пробные функции тождественно равны нулю. Простые вычисления дают следующие значения ε_0 и ε_1 как функций a при $a > L$

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi^2}{2a^2} + U_0 \left(1 - \frac{L}{a} + \frac{\sin 2\pi L/a}{2\pi} \right) +$$

$$+ 4\pi N_0 \tilde{e}^2 a \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \right),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} + U_0 \left(1 - \frac{L}{a} + \frac{\sin 4\pi L/a}{4\pi} \right) +$$

$$+ 4\pi N_0 \tilde{e}^2 a \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{16\pi^2} \right). \quad (18)$$

Для $a < L$ результаты получаются из (18), если положить $U_0 = 0$. В этом более простом случае значение a , минимизирующее ε_0 , равно (в обычных единицах) $a_0 = (\pi a_B^*/4GN_0)^{1/3}$, где a_B^* – эффективный борровский радиус, N_0 – поверхностная плотность частиц в нижней подзоне, $G = (1/3 + 1/2\pi^2) \approx 0.384$.

Условие $a_0 < L$ требует, чтобы выполнялось неравенство $\pi a_B^*/4G < N_0 L^3$ (высокая плотность). Для частоты основного перехода $\omega_{10} = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ получаем

$$\omega_{10} = 3 \left(2^{1/3} \pi^{4/3} G^{2/3} - (1/4)^{4/3} \pi^{2/3} G^{1/3} \right) \times \varepsilon^2 (a_B^* N_0^2)^{1/3}. \quad (19)$$

Численный множитель в (19) равен 9.04. Как видим, ни ширина ямы L , ни ее глубина U_0 в этом случае в результат не входят, все определяется индуцированной частью потенциала среднего поля. Естественно, это является следствием выбранного вида пробных функций: $\varphi_{0,1}$ обрываются при $z < 0$ и $z > a$, а рассматривается ситуация $a = a_0 < L$. Отношение ω_{10} к такой же величине без учета взаимодействия равно по порядку $(N_0 L^3 / a_B^*)^{2/3}$ и (в рассматриваемом случае высокой плотности) больше единицы, т.е. уровни расталкиваются при учете взаимодействия. Качественно причину легко понять из вида индуцированного потенциала (17): при достаточно малых z частица фактически движется в треугольном потенциале, наклон которого увеличивается с ростом N_0 , так что частота поперечных колебаний возрастает. Для GaAs при ширине квантовой ямы 20 нм область высокой плотности начинается при $N_0 \geq 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. В противоположном пределе малой плотности $N_0 L^3 / a_B^* \ll 1$ вклады от взаимодействия в формулах (18) становятся малыми поправками. Если число уровней в “пустой” яме велико, т.е. $U_0 L^2 \gg 1$, то экстремальное значение a равно L , что соответствует модели твердых стенок – вполне разумное приближение для нижних уровней при большом их полном числе. Частота перехода в этом случае меньше, чем для невзаимодействующих частиц:

$$\omega_{10} = \frac{3\pi}{2L^2} - \frac{3\varepsilon^2 N_0 L}{4\pi}, \quad (20)$$

т.е. уровни ε_1 и ε_0 сближаются при учете взаимодействия. Такое противоположное случаю высокой плотности поведение легко объясняется. Малая плотность соответствует применимости теории возмущений по потенциалу V_{int} , т.е. фактически вычисляется линейный (первый порядок по $N_0!$) штарковский сдвиг. В области интегрирования V_{int} положительно, а функция φ_0^2 , в отличие от φ_1^2 , не имеет нулей и дает несколько больший положительный сдвиг уровня.

Заключение. Итак, в работе исследованы два примера применения приближения среднего поля для систем с квантованным одночастичным спектром. Найдено точное решение нелинейного волнового уравнения, описывающего дипольные экситоны в кольцевой ловушке.

Автор выражает признательность В.М. Ковалеву и М.В. Энтину за полезное замечание и обсуждение работы.

Работа была поддержана грантом РФФИ # 16-02-00565 и программой РАН.

-
1. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **80**, 210 (2004); Письма в ЖЭТФ **83**, 178 (2006); Письма в ЖЭТФ **87**, 797 (2008).
 2. А. А. Hish, Е. Е. Novitskaya, L. V. Butov, M. Hanson, and A. C. Gossard, Science **321**, 229 (2008).
 3. G. Grosso, J. Graves, A. T. Hammak, A. A. Hish, L. V. Butov, M. Hanson, and A. C. Gossard, Nature Photonics **3**, 577 (2009).
 4. А. В. Горбунов, А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **86**, 48 (2007).
 5. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, М. (1978), с. 145.