

Самосогласованное описание $E1$ -переходов между однофононными состояниями в магических ядрах

С. П. Камерджиев^{a1)}, Д. А. Войтенков^b, Э. Е. Саперштейн^{a,c}, С. В. Толоконников^{a,d}, М. И. Шитов^c

^aНациональный исследовательский центр “Курчатовский Институт”, 123182 Москва, Россия

^bГНЦ РФ Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, 249033 Обнинск, Россия

^cНациональный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

^dМосковский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 13 июня 2017 г.

После переработки 7 июля 2017 г.

Метод изучения ангармонических эффектов, основанный на квантовой теории многих тел, применен впервые для самосогласованного расчета вероятностей переходов между низколежащими однофононными состояниями магических ядер. Наш подход включает новые (трехквaziчастичные) корреляции в основном состоянии и самосогласование между средним ядерным полем и эффективным межнуклонным взаимодействием, для расчета которых использован метод энергетического функционала плотности с известными параметрами функционала Фаянса. В качестве примера рассмотрены $E1$ - и $E2$ -переходы в ядрах ^{132}Sn и ^{208}Pb . Получено разумное согласие с экспериментом. Показано, что трехквaziчастичные корреляции в основном состоянии дают значительный вклад в вероятности рассмотренных переходов.

DOI: 10.7868/S0370274X17150024

Сравнительный анализ $E1$ - и $E2$ -переходов между однофононными изоскалярными состояниями представляет интерес, прежде всего, из-за того, что $E1$ и $E2$ операторы перехода имеют соответственно изовекторную и изоскалярную природу. Поэтому такие $E1$ -переходы запрещены, а $E2$ -переходы разрешены в модели идеальных бозонов. Экспериментально это подтверждается тем, что вероятности таких $E1$ -переходов на несколько порядков величины меньше, чем вероятности $E2$ -переходов [1]. Первый расчет такого $E2$ -перехода в ядре ^{208}Pb был выполнен в работе [2] на основе несамосогласованной теории конечных ферми-систем (ТКФС) [3]. Наша цель – выполнить аналогичный расчет в рамках самосогласованной ТКФС [4].

Весьма похожая теоретическая задача самосогласованного расчета статических квадрупольных моментов в первом 2^+ -состоянии была недавно рассмотрена в [5], где самосогласованная схема строилась на основе метода энергетического функционала плотности (ЭФП) Фаянса [6, 7] с использованием ЭФП DF3-a [8]. В этом подходе среднее поле ядра $U(r)$ и эффективное взаимодействие между нуклонами \mathcal{F} – амплитуда Ландау–Мигдала – определяется одним и тем же набором параметров ЭФП.

В [5] было показано, что новые, или трехквaziчастичные, корреляции в основном состоянии (КОС), а не хорошо известные двухквaziчастичные корреляции, как в обычном квазичастичном методе хаотических фаз, объясняют половину наблюдаемого эффекта, а вторая половина объясняется учетом эффекта поляризуемости ядра. Большой эффект этих КОС был также недавно получен в оценках вероятностей $E2$ -переходов между состояниями 5_1^- и 3_1^- в ядрах ^{132}Sn и ^{208}Pb в работе [9], в которой использовался несамосогласованный подход и была также подчеркнута необходимость учета эффектов самосогласования.

Необходимо отметить, что задача расчета вероятностей $E1$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями была довольно подробно рассмотрена в рамках несамогласованной квазичастично-фононной модели на примере трех ядер со спариванием: ^{120}Sn , ^{144}Sm и ^{144}Nd [10]. Удовлетворительное согласие с экспериментом было получено благодаря учету смешивания между одно- и двухфононными компонентами волновых функций изучаемых низколежащих состояний, т.е. за счет выхода за рамки предположения об однофононности изучаемых уровней 2_1^+ и 3_1^- . Однако, упомянутые выше трехквaziчастичные КОС в [10] не учитывались. По этим причинам представляет

¹⁾e-mail: kaev@obninsk.com

большой интерес рассмотреть задачу расчета $E1$ - и $E2$ -переходов в рамках последовательной теории ангармонических эффектов, которая была сформулирована в [4] и в ее самосогласованной версии была использована в [5] для статической задачи расчета квадрупольных моментов в первом 2^+ -состоянии магических и полумагических ядер. В нашем случае задача не статическая и включение эффектов спаривания алгебраически ее усложняет заметно больше, чем статическую, рассмотренную в [5]. Поэтому мы ограничимся здесь только дважды-магическими ядрами ^{132}Sn и ^{208}Pb , в которых спаривание отсутствует. Кроме того, состояния 3_1^- , 2_1^+ и 5_1^- , между которыми изучаются γ -переходы, в этих ядрах с большой точностью можно считать однофононными.

Как и в работе [5], мы используем полностью самосогласованный подход, основанный на ЭФП Фаянса. Такой подход имеет большую предсказательную силу, поскольку позволяет рассчитать как среднее поле ядра, так и эффективное взаимодействие и характеристики фононов, с использованием одних и тех же универсальных параметров ЭФП. Расчет не содержит никаких подгоночных параметров; это также дает возможность надеяться на его успешное применение для нестабильных ядер и для астрофизических задач.

В настоящей работе выполнены самосогласованные расчеты вероятностей двух $E1$ - и двух $E2$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями в ^{120}Sn и ^{208}Pb , для которых имеются экспериментальные данные. Метод содержит новые (трехквaziчастичные) КОС. Как и в [5], используется ЭФП DF3-a [8].

Мы следуем методу изучения ангармонических эффектов [4], основанному на малости величины g_s^2 , где g_s – безразмерная амплитуда рождения низкоэнергетического фонона в состоянии s . В этом подходе учет всех членов порядка g_s^2 реализуется с использованием так называемого фононного тэдрпола (tadpole). Именно для дважды-магических ядер, прежде всего для ^{132}Sn и ^{208}Pb , рассматриваемых здесь, малость параметра g_s^2 реализуется в наибольшей степени [12], также как и однофононность низкоэнергетических состояний. Общий вывод выражения для амплитуды процесса описан в [4] и коротко в [5]. Окончательное выражение содержит сумму двух диаграмм Фейнмана (рис. 1) и слагаемых, включающих изменение $\delta\mathcal{F}$ амплитуды эффективного взаимодействия в поле фонона. Однако, слагаемое с $\delta\mathcal{F}$ дает незначительный вклад в задаче такого же класса – в расчетах квадрупольных моментов в первом 2^+ -состоянии [5]. Поэтому мы это слагаемое здесь не

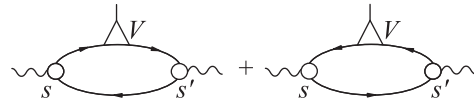


Рис. 1. Амплитуда перехода $M_{ss'}$ (3)

учитываем. На рис. 1 прямые линии обозначают одночастичные функции Грина $G(\varepsilon)$, треугольник V – эффективное поле, а пустой кружок – вершину g_s рождения фонона в состоянии $s = (L_s, S_s; I_s, M_s)$, с очевидными обозначениями.

Как любые диаграммы Фейнмана, показанные на рис. 1 диаграммы содержат обычные, или “прямые” (forward going), графики и “графики, идущие назад” (backward going graphs), которые появляются в результате интегрирования трех одночастичных функций Грина. Графики, идущие назад, в диаграммах на рис. 1 и есть трехквaziчастичные КОС, которые, как упоминалось выше, не учитывались в [10].

Эффективное поле V – вершина, определяющая эффект ядерной поляризуемости при наложении на ядро внешнего поля V_0 , подчиняется уравнению ТКФС [3], которое в символической записи выглядит как

$$V(\omega) = e_q V_0(\omega) + \mathcal{F}A(\omega)V(\omega). \quad (1)$$

Здесь $A(\omega) = \int G(\varepsilon + \omega/2)G(\varepsilon - \omega/2)d\varepsilon/(2\pi i)$ – частично-дырочный пропагатор, наконец, e_q – локальный заряд квазичастиц по отношению к полю V_0 .

Далее, амплитуда рождения фонона g_s в рамках ТКФС подчиняется соответствующему (1) однородному уравнению:

$$g_s = \mathcal{F}A(\omega_s)g_s, \quad (2)$$

где ω_s – энергия рассматриваемого фонона.

В представлении одночастичных волновых функций, используя сокращенные обозначения $1 = (n_1, j_1, l_1, m_1)$, амплитуда перехода $M_{ss'}$ между возбужденными однофононными состояниями s и s' имеет следующий вид:

$$M_{ss'} = M_{ss'}^{(1)} + M_{ss'}^{(2)} = \sum_{123} [V_{12}(g_{31}^s)^* g_{23}^{s'} A_{123}^{(1)} + V_{12}g_{31}^{s'} (g_{23}^s)^* A_{123}^{(2)}], \quad (3)$$

где $A^{(1)}$ – интеграл от трех функций Грина:

$$A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) = \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon + \omega)G_3(\varepsilon + \omega_s)d\varepsilon, \quad (4)$$

$\omega = \omega_s - \omega_{s'}$ и, соответственно,

$$A_{123}^{(2)}(\omega_s, \omega_{s'}) = A_{123}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s). \quad (5)$$

После отделения угловых переменных (теперь индекс $l=(n_1, j_1, l_1)$) для приведенной вероятности перехода $I_s \rightarrow I_{s'}$ с энергией $\omega = \omega_s - \omega_{s'}$ получаем:

$$B(EL) = \frac{1}{2I_s + 1} | \langle I_s \parallel M_L \parallel I_{s'} \rangle |^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} & \langle I_s \parallel M_L \parallel I_{s'} \rangle = \\ & = \sum_{123} \left\{ \begin{matrix} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} V_{12} g_{31}^s g_{23}^{s'} [A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + \\ & + (-1)^{(I_s + I_{s'} + L)} A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения: $\langle 1 \parallel V \parallel 2 \rangle = V_{12}$ и т.д. Для квадратной скобки в (7) после соответствующих выкладок получаем:

$$\begin{aligned} & [A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + (-1)^{(I_s + I_{s'} + L)} A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s)] = \\ & = [(1 - n_1)(1 - n_2)n_3 - n_1 n_2 (1 - n_3)] \times \\ & \times \left(\frac{1}{(\varepsilon_{31} - \omega_s)(\varepsilon_{32} - \omega_{s'})} + \frac{1}{(\varepsilon_{31} + \omega_s)(\varepsilon_{32} + \omega_{s'})} \right) + \\ & + [n_1(1 - n_2)(1 - n_3) - (1 - n_1)n_2 n_3] \times \\ & \times \frac{2(\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} + \omega\omega_s)}{(\varepsilon_{12}^2 - \omega^2)(\varepsilon_{13}^2 - \omega_s^2)} + \\ & + [n_2(1 - n_1)(1 - n_3) - (1 - n_2)n_1 n_3] \times \\ & \times \frac{2(\varepsilon_{21}\varepsilon_{23} - \omega\omega_{s'})}{(\varepsilon_{21}^2 - \omega^2)(\varepsilon_{23}^2 - \omega_{s'}^2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$.

Нетрудно показать, что слагаемые в первом члене правой части выражения (8) (с круглой скобкой) соответствуют формуле для приведенной вероятности переходов между однофононными состояниями в задаче со спариванием в работе [10], см. подробнее в [5]. Остальные слагаемые в (8), которые, как мы увидим, дают количественно большой вклад, в работе [10] при расчете приведенной вероятности не учитывались (см. формулу (6) этой работы). В предельном случае $\omega = 0$ выражение (8) совпадает с соответствующей формулой [5] для магических ядер.

Как говорилось выше, во всех расчетах, как для эффективного поля (1), фононных вершин g_s (2) и других характеристик фононов, так и для вероятностей переходов по формулам (6)–(8), мы использовали функционал Фаянса DF3-а. Детали метода расчета характеристик одно-фононных состояний в рамках самосогласованной ТКФС описаны в [4] или, применительно к ЭФП Фаянса, в [11]. Результаты этих расчетов представлены в табл. 1, из которой следует, что получено удовлетворительное согласие с экспериментом.

Все рассматриваемые возбуждения магических ядер (фононы) являются поверхностными колебаниями – компонентами голдстоунской ветви возбуждений, обусловленной спонтанным нарушением трансляционной инвариантности в атомных ядрах [4]. Соответствующая вершина для L -фонона имеет резкий поверхностный максимум (рис. 2):

$$g_L(\mathbf{r}) = \left(\alpha_L \frac{dU}{dr} + \chi_L(r) \right) Y_{LM}(\mathbf{n}), \quad (9)$$

где $U(r)$ – самосогласованный одночастичный потенциал ядра, а объемная поправка $\chi_L(r)$ мала.

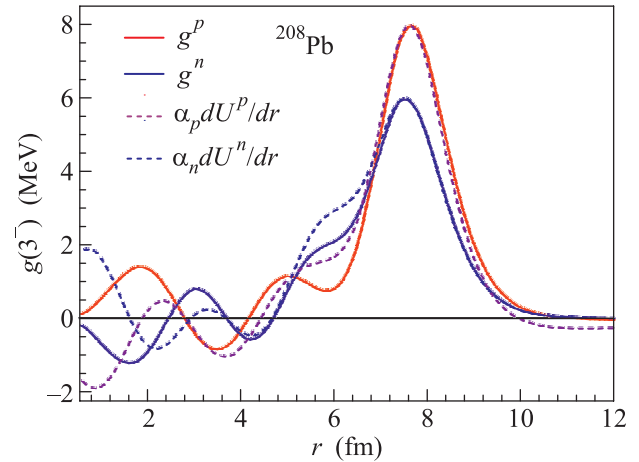


Рис. 2. (Цветной онлайн) Вершины $g_L^{p,n}(r)$ для состояния 3_1^- в ядре ^{208}Pb . Для сравнения изображены поверхностные члены (9) $\alpha_L^{p,n} dU^{p,n}/dr$ ($\alpha_L^p = 0.334$ фм, $\alpha_L^n = 0.322$ фм)

Как следует из рис. 2, объемные компоненты $\chi_L(r)$ действительно очень малы, их вклад в матричные элементы дополнительно подавлен фактором r^2 , который входит во все интегралы по r . Если пренебречь объемной компонентой χ_L и ничтожным различием протонного и нейтронного коэффициентов α_L , мы приходим к очень простой формуле модели жидкой капли Бора–Моттельсона (БМ) [12]:

$$g_L(\mathbf{r}) = \frac{\beta_L}{\sqrt{2L+1}} r \frac{dU}{dr} Y_{LM}(\mathbf{n}), \quad (10)$$

использованной нами для упрощения расчетов, при этом U , как и в (9), – самосогласованный одночастичный потенциал, полученный с функционалом DF3-а. Коэффициенты β_L модели БМ связаны с введенными выше α_L следующим образом: $\beta_L = \alpha_L \sqrt{2L+1}/R$, где $R = r_0 A^{1/3}$ – радиус ядра, $r_0 = 1.2$ фм. Вариация параметра r_0 в пределах 10% меняет результаты на 20–25%, что находится в пределах точности модели БМ, значения β_L которой

Таблица 1. Характеристики однофононных состояний

Ядро	Уровень	ω_{exp} (МэВ)	ω_{th} (МэВ)	$B(EL)_{\text{exp}}$ ($e^2 \text{фм}^{2L}$)	$B(EL)_{\text{th}}$ ($e^2 \text{фм}^{2L}$)
^{132}Sn	2^+	4.041	4.327	$1.396 \cdot 10^3$	$1.03 \cdot 10^3$
	3^-	4.351	4.572	$> 5.071 \cdot 10^4$	$1.29 \cdot 10^5$
	5^-	4.942	5.884	—	$2.269 \cdot 10^7$
^{208}Pb	2^+	4.085	4.747	$3.18 \cdot 10^3$	$1.89 \cdot 10^3$
	3^-	2.614	2.684	$6.12 \cdot 10^5$	$7.09 \cdot 10^5$
	5^-	3.197	3.306	$4.47 \cdot 10^8$	$2.97 \cdot 10^8$

однозначно связаны с вероятностью $B(EL)$ возбуждения L -фонона. Мы их находили из теоретических значений $B(EL)$ в табл. 1. Тем самым, использование БМ приближения (10) не нарушает самосогласованного характера всего расчета.

Уравнение (1) для эффективного поля V решалось в координатном представлении с использованием самосогласованного базиса ЭФП DF3-а. Поскольку сумма в выражении (7) некогерентна, то выполнялась процедура определения максимальной энергии, до которой следует суммировать в (7) для достижения сходимости. Оказалось, что, как и в [5], достаточная точность достигается при суммировании до 100 МэВ. Такой предел суммирования фактически обеспечивает учет непрерывного одночастичного спектра, что является хорошим аналогом координатного представления. Тот же базис использован в расчетах по формулам (6)–(8).

На рис. 3 и рис. 4 показаны рассчитанные функции $V^{n,p}(r)$ и, для сравнения, известные приближенные выражения для этих величин, т.е. поляризуемости ядра, с помощью понятий эффективного заряда e_{eff} и поляризационного заряда e_{pol} :

$$\begin{aligned}
 e_{\text{eff}} &= e_q e_{\text{pol}} \approx V/V^0, \\
 e_{\text{pol}}^p(E1) &= e_{\text{pol}}^n(E1) = (1 - \chi) = 0.3, \\
 e_{\text{pol}}^p(E2) &= 1.6, \quad e_{\text{pol}}^n(E2) = 0.6,
 \end{aligned} \quad (11)$$

где локальные заряды $e_q^p(E1) = N/A$, $e_q^n(E1) = -Z/A$, а оценки для величин $(1 - \chi) = 0.3$ и $e_{\text{pol}}^p(E2) = 1.6$, $e_{\text{pol}}^n(E2) = 0.6$ взяты из [12, 13] и [14] соответственно. На рис. 3 и 4 хорошо заметна изовекторная природа эффективного поля $E1$ и изоскалярная – поля $E2$. Действительно, $E1$ -вершины V^p и V^n имеют противоположные фазы, хотя они и не полностью симметричны относительно нулевой линии раздела. Последнее отражает отсутствие полной изовекторности, которая реализуется лишь при $N = Z$. Для изоскалярных $E2$ -переходов эффективные $E2$ -поля V^p и V^n имеют фазы одного знака. Как следует из табл. 2 (колонка 5), использованные приближения недостаточно хорошо воспроизводят точные результаты, кроме случая $2_1^+ \rightarrow 3_1^-$ перехода в ядре ^{208}Pb .

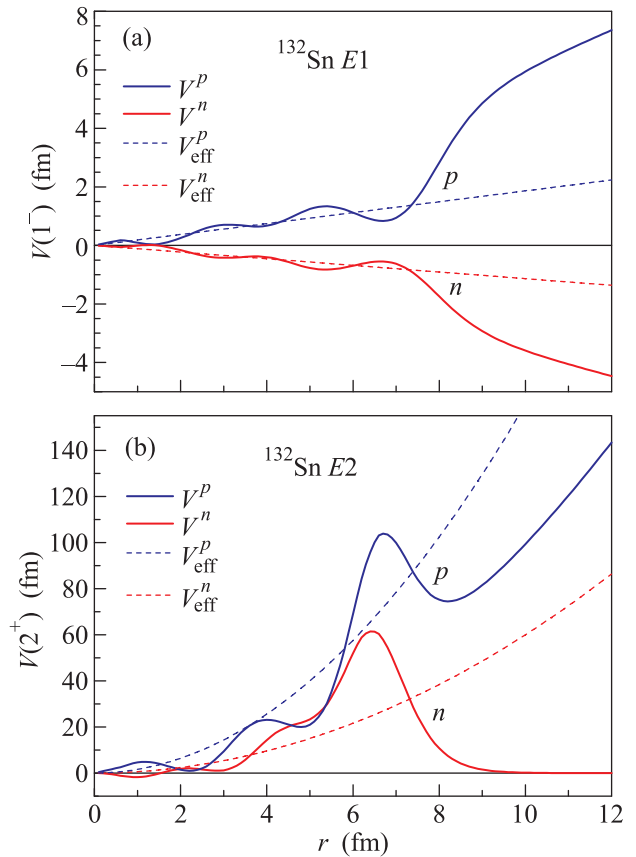


Рис. 3. (Цветной онлайн) Вершины $V(r)$ для $E1$ (а) и $E2$ (б) переходов в ^{132}Sn , рассчитанные в самосогласованной ТКФС (сплошные кривые) и с использованием оценок по формулам (11) (штрихи)

На рис. 3, 4 и точные вершины, и их оценки принимают большие значения при $r > R$ (R -радиус ядра), но это компенсируется в соответствующих интегралах V_{12} в (7) малыми значениями одночастичных волновых функций при $r > R$.

Результаты расчетов представлены в табл. 2. Чтобы оценить роль отдельных эффектов, определяющих величину $B(EL)$, в колонках 4, 5 и 6 представлены результаты различных приближенных расчетов. Поляризационные эффекты для $E1$ -переходов прежде всего определяются различием знаков в ло-

Таблица 2. Приведенные вероятности переходов $B(EL) \downarrow$, $e^2 \text{ фм}^{2L}$ (экспериментальные данные взяты из [1])

EL	Переход	Ядро	КОС = 0 $V = e_q V_0$	КОС \neq 0 $e_{\text{eff}} \neq 0$	КОС = 0 $V \neq 0$	КОС \neq 0 $V \neq 0$	Эксп.
1	2	3	4	5	6	7	8
$E1 \downarrow$	$3_1^- \rightarrow 2_1^+$	^{132}Sn	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$> 2.8 \cdot 10^{-4}$
	$2_1^+ \rightarrow 3_1^-$	^{208}Pb	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$8.19 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$(7.9 \pm 2.7) \cdot 10^{-4}$
$E2 \downarrow$	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	^{132}Sn	$3.28 \cdot 10^{-3}$	7.79	13.8	25.7	24.3 ± 1.2
	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	^{208}Pb	19.35	36.21	46.0	18.8	27.9 ± 1.5

Примечание. В колонке 4 приведены результаты расчетов без новых КОС и поляризуемости ядра, в колонке 5 – КОС \neq 0 и с оценкой поляризуемости через e_{eff} по формулам (11), в колонке 6 – с КОС = 0 и учетом поляризуемости через решение уравнения для вершины (1), в колонке 7 показаны наши окончательные результаты.

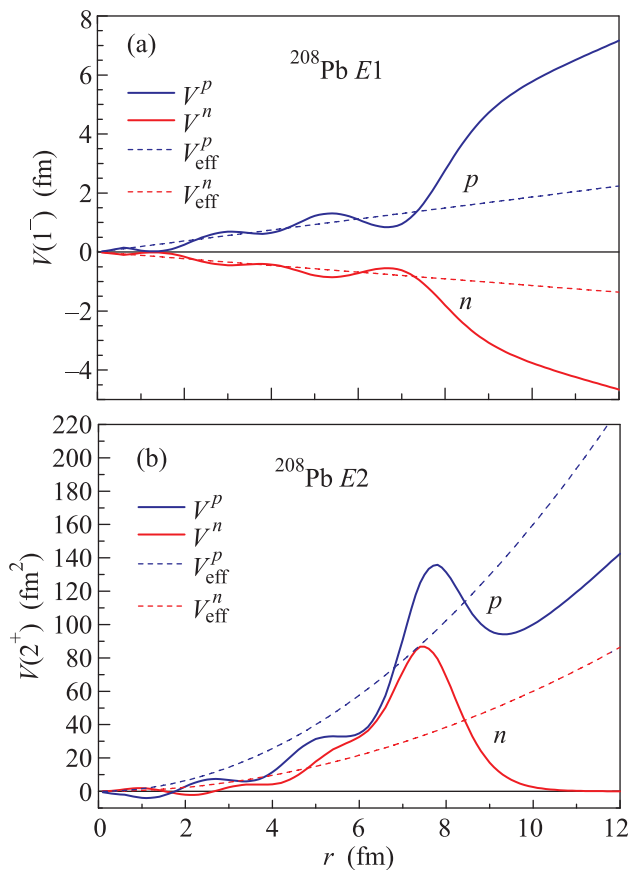


Рис. 4. (Цветной онлайн) То же что и на рис. 3, но для ^{208}Pb

кальных зарядах $e_q^p(E1)$ и $e_q^n(E1)$. Однако, включение КОС увеличивает величины $B(E1)$ больше, чем на порядок (см. колонки 6 и 7), а включение поляризуемости уменьшает их тоже на порядок (см. колонки 4 и 6), т.е. окончательная величина наблюдаемого эффекта определяется разностью двух больших чисел, что подчеркивает важность самосогласованности расчетной схемы. Для $E2$ -переходов включение КОС изменяет величины $B(E2)$ в 2–3 раза, а вклю-

чение поляризуемости увеличивает эффект не одинаково для разных ядер.

Если сравнивать наши результаты расчетов $E1$ -переходов с расчетами в работе [10], то согласие с экспериментом в нашем случае значительно лучше, чем для варианта однофононных переходов в [10] (см. столбец “Main” в табл. 2 в [10]) для всех изученных там переходов в указанных выше трех ядрах со спариванием, где расчет отличается от эксперимента в 2–4 раза. Как упоминалось выше, разумное согласие с экспериментом в [10] было получено благодаря смешиванию одно- и двухфононной компонент волновых функций низкоэнергетических фононов. Несомненно, для более убедительного сравнения двух весьма различных методов необходимы расчеты для ядер со спариванием.

В заключение, суммируем кратко полученные результаты. В данной работе в рамках единого подхода рассмотрены два количественно весьма различных явления – запрещенные в модели идеальных бозонов $E1$ -переходы и разрешенные в этой модели $E2$ -переходы между изоскалярными коллективными однофононными состояниями. Степень запрета видна из различия значений величин $B(EL)$, которые для рассмотренных $E1$ - и $E2$ -переходов различаются на три порядка (в соответствующих одночастичных единицах). Достаточно хорошее описание эксперимента в рамках одного и того же самосогласованного подхода с одним и тем же универсальным набором параметров функционала Фаянса [8] показала успешность такого достаточно простого и универсального подхода.

Поляризационные эффекты для $E1$ -переходов уменьшают на порядок величину вероятности перехода. Как оказалось, примерно такой же эффект, но с противоположным знаком, дает учет трехквартичных КОС, которые рассмотрены здесь впервые для динамической задачи EL -переходов. Таким образом, окончательно наблюдаемый эффект, в отли-

чие от случая $E2$ -переходов, определяется разностью двух больших чисел – эффектов поляризуемости ядра и трехквартичных КОС. Можно думать, что такая же физическая картина должна существовать и для $E1$ -переходов в ядрах со спариванием, которые будут рассмотрены в отдельной работе.

Другим важным результатом работы является последовательный учет самосогласования, необходимый для успешного описания такого сложного явления, как электромагнитные переходы между возбужденными состояниями ядер. Не используя никаких подгоночных параметров, такой подход обладает значительной предсказательной силой.

С.К. признателен В.Ю. Пономареву за обсуждения проблем, связанных с тематикой работы. Работа поддержана грантами РНФ # 16-12-10155 и 16-12-10161. Частичная поддержка также осуществлялась грантом РФФИ 16-02-00228-а. Расчеты выполнены частично на ВК НИЦ “КИ”.

ЭС был также поддержан Проектом “Российское образование мирового класса” НИЯУ МИФИ, согласно контракту Министерства образования и науки РФ # 02. А03.21.0005.

-
1. [<http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>].
 2. P. Ring and J. Speth, Nucl. Phys. A **235**, 315 (1974).

3. А.Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, Наука, М. (1965); Wiley, N.Y. (1967).
4. V. A. Khodel and E. E. Saperstein, Phys. Rep. **92**, 183 (1982).
5. D. Voitenkov, S. Kamerdzhiev, S. Krewald, E. E. Saperstein, and S. V. Tolokonnikov, Phys. Rev. C **85**, 054319 (2012).
6. А.В. Смирнов, С.В. Толоконников, С.А. Фаянс, ЯФ **48**, 1661 (1988) [Sov. J. Nucl. Phys. **48**, 995 (1988)].
7. S. A. Fayans, S. V. Tolokonnikov, E. L. Trykov, and D. Zawischa, Nucl. Phys. A **676**, 49 (2000).
8. С.В. Толоконников, Э.Е. Саперштейн, ЯФ **73**, 1731 (2010) [Phys. At. Nucl. **73**, 1684 (2010)].
9. С.П. Камерджи́ев, Д.А. Войтенков, ЯФ **79**, 609 (2016) [Phys. At. Nucl. **79**, 904 (2016)].
10. V. Yu. Ponomarev, Ch. Stoyanov, N. Tsoneva, and M. Grinberg, Nucl. Phys. A **635**, 470 (1998).
11. S. V. Tolokonnikov, S. Kamerdzhiev, D. Voytenkov, S. Krewald, and E. E. Saperstein, Phys. Rev. C **84**, 064324 (2011).
12. О. Бор, Б. Моттelson, *Структура атомного ядра*, т.2, Мир, М. (1977).
13. I. Hamamoto, Nucl. Phys. A **557**, 515c (1993).
14. С.П. Камерджи́ев, ЯФ **5**, 971 (1967) [Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 693 (1967)].