Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 3, с. 161 – 165

Формирование экзотических состояний в $s-d$ обменной и $t-J$ модели

В. Ю. Ирхин[1)], *Ю. Н. Скрябин*

Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, 620990 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 20 июня 2017 г.

Рассмотрены различные сценарии реализации двухзонной модели в системах сильно коррелированных электронов, включая фрустрированные магнитные системы, высокотемпературные сверхпроводники и решетки Кондо. На основе вывода гамильтонианов $s-d$ обменной и $t-J$ модели в рамках формализма многоэлектронных X-операторов Хаббарда исследовано взаимодействие носителей тока с магнитными моментами в представлениях псевдофермионов либо швингеровских бозонов, описывающих спинонные возбуждения.

DOI: 10.7868/S0370274X17150073

1. Введение. В последнее время интенсивно изучаются необычные возбуждения и экзотические состояния в сильно коррелированных твердых телах и других конденсированных средах, например, различные типы спиновых жидкостей, состояния с топологическим и квантовым порядками [1]. Обычно они описываются в рамках многоэлектронных (МЭ) моделей. Простейшей из них является однозонная $t - J$ модель, где учитываются сильные одноузельные корреляции и обменное взаимодействие между локализованными спинами. Хотя она позволяет рассмотреть ряд экзотических фаз и успешно применяется к физике купратов (базисных систем для высокотемпературных сверхпроводников, ВТСП) [2, 3], соответствующие приближения трудно контролировать из-за отсутствия малого параметра: простота модели часто не обеспечивает удобства теоретического исследования.

С другой стороны, в физике магнитных полупроводников, систем с тяжелыми фермионами и решеток Кондо, как правило, используется двухзонная $s - d(f)$ обменная модель, в которой подсистемы носителей тока и локальных магнитных моментов исходно разделены; кроме того, модель удобна тем, что в ней имеется квазиклассический малый параметр. Идея такого разделения приобретает новый смысл в современных теоретико-полевых подходах, где рассматривается формирование экзотических фаз и частиц с необычной статистикой. Предполагается, что такие состояния реализуются как в изоляторах, так и в проводящих f- и d-системах (здесь, кроме купратов, можно упомянуть фрустрированные зонные магнетики типа YMn_2 [4]).

[1)]e-mail: valentin.irkhin@imp.uran.ru

В данной работе мы покажем, что использование двухзонной (в частности, $s - d$ обменной) модели как более общей позволяет прояснить ряд моментов в физическом понимании состояния спиновой жидкости. Кроме того, будет продемонстрировано описание экзотических возбуждений на языке многоэлектронных X-операторов Хаббарда.

2. Гамильтониан модели. При теоретическом рассмотрении сильнокоррелированных соединений (например, медь-кислородных ВТСП) широко используется $t-J$ модель, которая представляет собой модель Хаббарда с бесконечным одноузельным отталкиванием $U \to \infty$ и учетом гейзенберговского обмена. Ее гамильтониан в МЭ-представлении операторов Хаббарда $X(\Gamma, \Gamma') = |\Gamma\rangle\langle\Gamma'|$ принимает вид

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} X_i(0\sigma) X_j(\sigma 0) + H_d, \quad H_d = \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j, \tag{1}$$

где t_{ij} – интегралы переноса, J_{ij} – обменные параметры.

Модель (1) описывает взаимодействие носителей тока с локальными моментами. Для того, чтобы продемонстрировать явно разделение этих степеней свободы, укажем на ее эквивалентность $s - d$ обменной модели с параметром обмена $I \to -\infty$. Действительно, после перехода к МЭ-представлению гамильтониан последней запишется как [5, 6]:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} g^\dagger_{i\sigma} g_{j\sigma} + H_d, \tag{2}$$

$$g^\dagger_{i\sigma} = \sum_M C^{S-1/2, M+\sigma}_{SM;1/2,\sigma} X_i(S - 1/2, M + \sigma; SM), \tag{3}$$

где

$$C^{S-1/2, M+\sigma}_{SM;1/2,\sigma} = (S - 2\sigma M)^{1/2}/(2S + 1)^{1/2} \tag{4}$$

– коэффициенты Клебша–Гордана для связи спинов S и $1/2$. Легко видеть, что при $S=1/2$ гамильтониан (2) совпадает с (1) с тривиальной перенормировкой: $t_{\mathbf{k}}$ заменяется в (2) на $2t_{\mathbf{k}}$ (множитель 2 возникает из-за эквивалентности переходов электронов с обоими противоположными спинами в модели Хаббарда).

Стандартное представление вспомогательных (slave) бозонов, введенное Андерсоном [2], имеет вид

$$X_i(\sigma,0)=f_{i\sigma}^{\dagger}e_i \tag{5}$$

Здесь e_i – операторы уничтожения для заряженных бесспиновых бозонов (голонов), $f_{i\sigma}^{\dagger}$ – операторы рождения для нейтральных фермионов (спинонов). Может быть использовано и представление вспомогательных фермионов

$$X_i(\sigma,0)=b_{i\sigma}^{\dagger}e_i, \tag{6}$$

где теперь e_i – фермиевские, а $b_{i\sigma}^{\dagger}$ – бозевские (швингеровские) операторы. Мы, однако, будем пользоваться непосредственно X-операторами, вводя спиноны лишь для локализованной подсистемы.

Гамильтониан (2) может быть в свою очередь выражен через фермиевские операторы и операторы локализованных спинов. Используя представление операторов Хаббарда через МЭ операторы рождения электронных конфигураций $A_{\Gamma}^{\dagger}$ [5, 6],

$$X(\Gamma,\Gamma')=A_{\Gamma}^{\dagger}\prod_{\sigma}(1-\ n_{\sigma})A_{\Gamma'},\quad n_{\sigma}=c_{\sigma}^{\dagger}c_{\sigma} \tag{7}$$

и соотношение

$$A_{S-1/2,\mu}^{\dagger}=\sum_{M\sigma}C_{SM,1/2\sigma}^{S-1/2,\mu}c_{\sigma}^{\dagger}A_{SM}^{\dagger}, \tag{8}$$

можно выделить из X-операторов операторы электронов проводимости на пространстве однократно занятых состояний. Тождественно преобразуя произведение коэффициентов Клебша–Гордана, находим

$$g_{i\sigma}^{\dagger}=\sum_{\sigma'}c_{i\sigma'}^{\dagger}(1-n_{i,-\sigma'})\frac{S\delta_{\sigma\sigma'}-(\mathbf{S}_i\boldsymbol{\sigma}_{\sigma'\sigma})}{2S+1}. \tag{9}$$

Далее, использование свойств матриц Паули дает

$$H=\frac{1}{(2S+1)^2}\times$$
$$\times\sum_{ij\sigma\sigma'}t_{ij}\{(S^2+\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j)\delta_{\sigma\sigma'}-S(\mathbf{S}_i+\mathbf{S}_j)\boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'}+$$
$$+i\boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'}[\mathbf{S}_i\times\mathbf{S}_j]\}c_{i\sigma}^{\dagger}(1-n_{i,-\sigma})(1-n_{j,-\sigma'})c_{j\sigma'}+H_d. \tag{10}$$

Такое представление гамильтониана (разумеется, справедливое и в $t{-}J$ модели) было впервые получено в [5, 6]. Позднее оно было использовано в работе [7] в применении к фазовой диаграмме ВТСП-купратов как "новая формулировка $t{-}J$ модели"; при этом была дана несколько иная интерпретация: возникшие электронные состояния были названы допонами.

Переход к $s{-}d$ обменной модели с сильными корреляциями позволяет естественно расширить физическое пространство и в то же время (в отличие от рассмотрения $t{-}J$ модели [7]) удалить нефизические состояния за счет условия $I\to-\infty$. Однако возможно и обобщение на случай $s-d$ обменной модели с конечными I:

$$H=\sum_{\mathbf{k}\sigma}t_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}c_{\mathbf{k}\sigma}-I\sum_{i\alpha\beta}\mathbf{S}_i\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}c_{i\alpha}^{\dagger}c_{i\beta}+H_d, \tag{11}$$

которая, в частности, описывает решетки Кондо.

Члены в (10), линейные по спиновым операторам, обеспечивают возможность эффективной гибридизации электронов со спинонами, как и в решетках Кондо. Члены, содержащие векторные произведения, хотя и исчезают для простых спиновых конфигураций, описывают анизотропное рассеяние электронов. Тем самым гамильтониан (10) может быть полезен при рассмотрении состояний с аномальными "киральными" параметрами порядка кинетических явлений в узких зонах, например аномального эффекта Холла (см., например, [8]).

3. Случай одного носителя тока. В модели (11) выражение для собственной энергии электрона во втором порядке теории возмущений в случае пустой зоны проводимости имеет вид

$$\Sigma_{\mathbf{k}}^{(2)}(E)=\Phi_{\mathbf{k}}(E)=I^2\sum_{\mathbf{q}}\int\frac{K_{\mathbf{q}}(\omega)d\omega}{E-t_{\mathbf{k+q}}+\omega}, \tag{12}$$

где $K_{\mathbf{q}}(\omega)$ – спиновая спектральная функция. Для ее нахождения рассмотрим различные спинонные представления для локализованных спинов.

В самосогласованной спин-волновой теории (ССВТ) используется представление швингеровских бозонов [9]:

$$\mathbf{S}_i=\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}b_{i\sigma}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'}b_{i\sigma'} \tag{13}$$

либо Дайсона–Малеева [10]. Это позволяет описать как квантовое неупорядоченное состояние (спиновую жидкость), так и магнитоупорядоченную фазу с волновым вектором $\mathbf{Q}$, причем последняя рассматривается как бозонный конденсат (при низких температурах в области с экспоненциально большой корреляционной длиной возникает близкое к конденсату состояние, которое описывается аналогично – "эффективная" намагниченность подрешетки $\bar{S}_{\mathrm{eff}}(T)$ практически не меняется [11]). После выделения конденсатных вкладов (при использовании швингеровских бозонов в них возникают лишние множители $3/2$, которые мы опускаем) находим

$$K_{\mathbf{q}}(\omega) = \overline{S}_{\text{eff}}^2\delta(\omega)\delta_{\mathbf{qQ}} + \overline{S}_{\text{eff}}(u_{\mathbf{q}} - v_{\mathbf{q}})^2\delta(\omega + \omega_{\mathbf{q}}) + \\ + \sum_{\mathbf{p}}(u_{\mathbf{p-q}}v_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p-q}}u_{\mathbf{p}})^2\delta(\omega + \omega_{\mathbf{p-q}} + \omega_{\mathbf{p}}). \quad (14)$$

Первый член в (14) ведет к образованию антиферромагнитной щели, мы будем им пренебрегать (это оправдано вблизи дна зоны). Второй член описывает взаимодействие со спиновыми волнами (в квантовом неупорядоченном состоянии он отсутствует, поскольку в спектре спинонов возникает щель), а третий – с индивидуальными спинонными возбуждениями.

В состоянии резонирующих валентных связей (RVB) гамильтониан d-подсистемы запишется в представлении псевдофермионов, аналогичном (13), как [3, 12]:

$$H_d = \sum_{\mathbf{k}\sigma}(B_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger f_{\mathbf{k}\sigma} + \Delta_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}\sigma} f_{-\mathbf{k}-\sigma} + h.c.\}, \quad (15)$$

причем $B_{\mathbf{k}} \sim J_{\mathbf{k}}$.

Соответствующая спектральная плотность получается в приближении невзаимодействующих фермиевских спинонов и аналогична последнему члену в (14):

$$K_{\mathbf{q}}(\omega) = \sum_{\mathbf{k}}(u_{\mathbf{k-q}}v_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k-q}}u_{\mathbf{k}})^2\delta(\omega + E_{\mathbf{k-q}} + E_{\mathbf{k}}), \quad (16)$$

где спектр $E_{\mathbf{k}} = (B_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}$ и коэффициенты преобразования Боголюбова (теперь фермионного) получаются при диагонализации (15).

И в антиферромагнитном, и в квантовом неупорядоченном состояниях, и в состоянии RVB комбинация коэффициентов $u - v$ преобразования в $K_{\mathbf{q}}(\omega)$ обращается в ноль при $q \to 0$.

Рассмотрим структуру электронного спектра около дна зоны в случае одного носителя тока. В самосогласованном приближении, ужирняя энергетические знаменатели (т. е. заменяя их точными функциями Грина), получим интегральное выражение

$$\Phi_{\mathbf{k}}(E) = I^2 \sum_{\mathbf{q}} \int K_{\mathbf{q}}(\omega) G_{\mathbf{k+q}}(E + \omega)\, d\omega. \quad (17)$$

Чтобы решить уравнение (17), можно применить приближение "доминирующего полюса" [11, 12]:

$$G_{\mathbf{k}}(E) = \frac{Z_{\mathbf{k}}}{E - \tilde{E}_{\mathbf{k}}} + G_{\text{inc}}(\mathbf{k}, E), \quad (18)$$

где G_{inc} – некогерентный вклад в функцию Грина,

$$Z_{\mathbf{k}} = \left(1 - \frac{\partial}{\partial E}\text{Re}\Sigma_{\mathbf{k}}(E)\right)^{-1}_{E=\tilde{E}_{\mathbf{k}}} \quad (19)$$

– вычет в полюсе около дна зоны, соответствующий спектру новых квазичастиц $\tilde{E}_{\mathbf{k}}$.

Подставляя (18) в (17) и выполняя интегрирования по q, получаем оценку в двумерном (2D) случае:

$$Z^{-1} - 1 \sim I^2/|Jt|. \quad (20)$$

Таким образом, с ростом $|I|$ спектральный вес переходит в некогерентный вклад и незатухающие квазичастицы становятся тяжелыми, так что при $I^2 \gg J|t|$ имеем для эффективной массы $m^*/m = Z^{-1} \gg 1$. В трехмерном (3D) случае расходимость слабее, и поправки к вычету содержат лишь логарифмический множитель: $Z^{-1} - 1 \sim I^2 S \ln|t/JS|$ [11].

В случае узких зон ($I \to -\infty$) рассмотрим функцию Грина МЭ-операторов

$$G_{\mathbf{k}\sigma}(E) = \langle\langle g_{\mathbf{k}\sigma} | g_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \rangle\rangle_E. \quad (21)$$

Результат вычислений с учетом спиновых флуктуаций [11] имеет вид

$$G_{\mathbf{k}\sigma}(E) = \Psi_{\mathbf{k}}(E)/[E - \Psi_{\mathbf{k}}(E)t_{\mathbf{k}}], \quad (22)$$

$$\Psi_{\mathbf{k}}(E) = \frac{S}{2S+1} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{t_{\mathbf{k+q}}}{(2S+1)^2} \times \\ \times \int K_{\mathbf{q}}(\omega) \Psi_{\mathbf{k+q}}^{-1}(E) G_{\mathbf{k+q}}(E + \omega)\, d\omega. \quad (23)$$

При этом, как отмечается в [12], эффект конечной ширины затравочной зоны (первый член в правой части (23)), и детали приближения, не важны для квазичастичного полюса, хотя и существенны для некогерентного вклада. В результате находим

$$Z^{-1} - 1 \sim \begin{cases} |t/JS|, & D = 2, \\ S^{-1}\ln|t/JS|, & D = 3. \end{cases} \quad (24)$$

Наш подход рассматривает физические возбуждения, а не вспомогательные частицы – голоны (бозоны либо фермионы), как в работе [12] (где также отмечается, что вычисление бозонной функции Грина является не вполне физически последовательным). Поскольку результаты (18), (20) определяются расходимостями на малых импульсах, они получаются и в спин-волновой картине [11], и при обоих способах рассмотрения квантового неупорядоченного состояния – через бозоны и фермионы. Как мы увидим ниже, похожая смена статистики от бозевской к фермиевской происходит и в решетках Кондо.

Дальнейшее развитие теории учитывает взаимодействие с калибровочным полем [3]; по-видимому, оно не слишком важно в случае спиновой жидкости типа Z_2, но существенно для $U(1)$.

4. Случай конечного заполнения зоны. При частичном заполнении зоны проводимости мы приходим к ситуации решетки Кондо. Если температура Кондо $T_{\mathrm{K}} \sim \exp(1/2I\rho(E_{\mathrm{F}}))$ (где $\rho(E)$ – затравочная плотность состояний) велика по сравнению с $d{-}d$ обменом J, локализованные моменты экранируются электронами проводимости и возникает основное состояние тяжелой ферми-жидкости. Однако в общем случае могут появиться и другие экзотических фазы. Если $d{-}d$ связи фрустрированы, d-моменты могут образовать спиновую жидкость, которая не нарушает симметрии решеточного гамильтониана [3]. На границе магнитной фазы и ферми-жидкости возникает состояние деконфайнмента – алгебраическая спиновая жидкость с нефермижидкостным поведением и разделением зарядовых и спиновых степеней свободы [3]. При этом формирование экзотического неупорядоченного состояния может быть достигнуто не только непосредственным введением фрустрации в спиновую подсистему, но и допированием.

Обсудим вначале результаты теории возмущений [13–15]. Вычисление магнитной восприимчивости с учетом спиновой динамики приводит к результату

$$\chi = \frac{S(S+1)}{3T} - \frac{4I^2}{3T}\sum_{\mathbf{pq}}\int K_{\mathbf{p-q}}(\omega)\frac{n_{\mathbf{p}}(1-n_{\mathbf{q}})}{(t_{\mathbf{q}}-t_{\mathbf{p}}-\omega)^2}\,d\omega, \tag{25}$$

где второй член описывает экранирование момента; $n_{\mathbf{k}}$ – фермиевские функции распределения.

Кондовский вклад в мнимую часть собственной энергии, возникающий в третьем порядке теории возмущений, имеет вид

$$\mathrm{Im}\Sigma^{(3)}_{\mathbf{k}}(E) = 2\pi I^3\rho(E)\int\sum_{\mathbf{q}}K_{\mathbf{q}}(\omega)\frac{n_{\mathbf{k+q}}}{E-t_{\mathbf{k+q}}-\omega}\,d\omega. \tag{26}$$

Использование соответствующей спектральной функции позволяет учесть обрезание кондовских расходимостей и построить ренормгрупповую теорию решеток Кондо аналогично [13, 14] – не только в магнитных фазах, но и для состояний типа спиновой жидкости с нефермижидкостным поведением.

Для описания основного состояния (режима сильной связи) может быть использована теория среднего поля в представлении псевдофермионов [16–19]. Важнейшим эффектом здесь является формирование "большой" поверхности Ферми (ПФ), в которой принимают участие псевдофермионы, гибридизующиеся с электронами проводимости. При этом конденсация бозевских спинонов (швингеровских бозонов) означает формирование магнетизма, а конденсация хиггсовского бозона ($b_0 \sim \langle f^\dagger_{i\sigma}c_{i\sigma}\rangle$) в кондовской фазе означает формирование ферми-жидкости с большой ПФ, хотя и в этой фазе возможно вторичное магнитное упорядочение [18, 19].

Образование спиновой жидкости (в терминологии [18, 19] – экзотической ферми-жидкости FL*) является промежуточным режимом: как и магнитное упорядочение, оно подавляет эффект Кондо, поэтому эффективное значение $|I|$ не перенормируется до бесконечности, как это имеет место в случае одной кондовской примеси. При этом s-электроны слабо связаны с d-спиновой жидкостью и образуют "малую" поверхность Ферми, которая охватывает объем, определяемый только плотностью s-электронов.

В случае узких зон ($t{-}J$ модель) допирование ведет к ряду сложных эффектов, в частности к конкуренции ферро- и антиферромагнетизма, приводящей к формированию спиральных либо неоднородных магнитных структур; возможны и более экзотические (в том числе топологических) состояния, образование псевдощели [3]...

При рассмотрении спектра купратов возникает нодально-антинодальная дихотомия [3]: природа спектра различна на разных участках поверхности Ферми. Спектр является бесщелевым вблизи нодальных точек $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$ (где возбуждения описываются как дираковские фермионы) и щелевым вблизи антинодальной точки $(0, \pi)$.

В теории среднего поля для $t{-}J$ модели [7] электронный спектральный вес происходит из двух зон: низкоэнергетической спинонной полосы и высокоэнергетической электронной зоны. Спектральный вес от спинонной зоны представляет собой острый когерентный пик. Широкий спектральный вес от электронной зоны соответствует некогерентному фону. Вблизи нодальной точки возникает сильное гибридизационное перемешивание между спинонами и электронами, описываемое гамильтонианом (10), а вблизи антинодальной точки смешивание отсутствует. Соответственно ПФ является большой или остается малой. По существу описанная картина близка к гибридизационной двухзонной модели решеток Кондо, где возникает разделение локализованных и коллективизированных состояний.

С другой стороны, в работе [20] в той же модели для описания состояния с малой ПФ (спиновой жидкости типа Z_2) было использовано представление швингеровских бозонов, хотя выделения когерентной зоны, аналогичного рассмотренному в разделе 3, выполнено не было (ранее соответствующая теория возмущений в МЭ-представлении была развита в [21, 11]).

Подход многоэлектронных операторов позволяет одновременно рассмотреть оба случая и учесть смену статистики спинонов при квантовом фазовом переходе, вводя разные спектральные функции для коллективных возбуждений.

5. Заключение. Мы видим, что использование концепции двухзонной модели позволяет получить общую физическую картину экзотических состояний сильно коррелированных систем.

В случае модели Хаббарда с конечным кулоновским отталкиванием мы имеем дело с проблемой формирования локальных магнитных моментов. Наличие "прямого" гейзенберговского обмена способствует их появлению, так что физическая ситуация становится близка к $s-d$ обменной модели (формально, кулоновский член на одном узле может быть записан в "обменной" форме $-U\mathbf{s}_i\mathbf{s}_i$). При этом существенно разделение вкладов когерентных (квазичастичных) и некогерентных (неквазичастичных) состояний. Наиболее просто последние могут быть описаны в ферромагнитной фазе, где они, однако, возникают лишь для одной проекции спина – вниз, описывая связанные состояния носителя со спином вверх и магнона [22, 23].

Представление швингеровских бозонов может быть введено не только в $t-J$ модели [20], но и в антиферромагнитной фазе спин-фермионной модели – модификации однозонной модели Хаббарда с конечным взаимодействием [24], что позволяет говорить о реализации в последней состояния необычной ферми-жидкости FL*. Спин-фермионная модель [25], используемая при интерполяционном описании коллективизированного магнетизма (аналогия которой с $s-d$ обменной моделью обсуждаются в [26]), также позволяет разделить спиновые и электронные степени свободы.

"Кондовский" пик на уровне Ферми появляется и в приближении динамической теории среднего поля (DMFT), сводящем модель Хаббарда к эффективной модели Андерсона [27]. Следует отметить, что в отличие от модели Хаббарда, где кулоновское взаимодействие приводит к разрушению ферми-жидкостного состояния (формированию хаббардовских подзон с малой ПФ), эффект $s-d$ обмена противоположен: с ростом $|I|$ возникает тяжелая ферми-жидкость и большая ПФ. Причина состоит в том, что эти взаимодействия ведут к разным типам спаривания электронов и спинонов – диагональному и недиагональному (гибридизационному).

Изменение статистики спинонов происходит в точке квантового фазового перехода между двумя фазами конфайнмента: магнитной и фазой с большой поверхностью Ферми. Такая проблема требует дальнейших исследований. Здесь могут оказаться полезными суперсимметричные представления (см., например, [28]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-12-01207).

1. X.-G. Wen, *Quantum Field Theory of Many-Body Systems*, Oxford University Press (2004).
2. P. W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
3. P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen, Rev. Mod. Phys. **78**, 17 (2006).
4. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, Phys. Lett. A **150**, 47 (1990).
5. В. Ю. Ирхин, Ю. П. Ирхин, ФММ **76**(4), 49 (1993).
6. V. Yu. Irkhin and Yu. P. Irkhin, Phys. Stat. Sol. (b) **183**, 9 (1994).
7. T. C. Ribeiro and X.-G. Wen, Phys. Rev. B **74**, 155113 (2006).
8. Y. Taguchi, Y. Oohara, H. Yoshizawa, N. Nagaosa, and Y. Tokura, Science **291**, 2573 (2001).
9. D. Yoshioka, J. Phys. Soc. Jpn **58**, 3393 (1989).
10. M. Takahashi, Phys. Rev. B **40**, 2494 (1989).
11. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, J. Phys.: Cond. Mat. **3**, 6439 (1991).
12. C. L. Kane, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **39**, 6880 (1989).
13. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, Phys. Rev. B **56**, 8109 (1997).
14. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, Phys. Rev. B **61**, 14640 (2000).
15. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, Z. Phys. B **75**, 67 (1989).
16. P. Coleman and N. Andrei, J. Phys.: Condens. Matter. **1**, 4057 (1989).
17. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, Z. Phys. B **82**, 77 (1991).
18. T. Senthil, M. Vojta, and S. Sachdev, Phys. Rev. B **69**, 035111 (2004).
19. T. Senthil, M. Vojta, and S. Sachdev, Physica B **359–361**, 9 (2005).
20. M. Punk and S. Sachdev, Phys. Rev. B **85**, 195123 (2012).
21. V. Yu. Irkhin and M. I. Katsnelson, J. Phys.: Cond. Mat. **2**, 7151 (1990).
22. В. Ю. Ирхин, М. И. Кацнельсон, А. В. Трефилов, Письма ЖЭТФ **53**, 351 (1991).
23. В. Ю. Ирхин, М. И. Кацнельсон, А. В. Трефилов, J. Phys.: Condens. Matter. **5**, 8763 (1993).
24. S. Sachdev, M. A. Metlitski, and M. Punk, J. Phys.: Cond. Mat. **24**, 294205 (2012).
25. Ar. Abanov, A. V. Chubukov, and J. Schmalian, Adv. Phys. **52**, 119 (2003).
26. A. A. Katanin and V. Yu. Irkhin, Phys. Rev. B **77**, 115129 (2008).
27. A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth, and M. J. Rozenberg, Rev. Mod. Phys. **68**, 13 (1996).
28. V. Yu. Irkhin, A. A. Katanin, arXiv:cond-mat/0009319.