Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 3, с. 179 – 190

Электронные состояния с нетривиальной топологией в дираковских материалах[1)]

Р. В. Туркевич[+*], *А. А. Перов*[*], *А. П. Протогенов*[+ 2)], *Е. В. Чулков*[×#]

[+]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[×]*Donostia International Physics Center (DIPC), 20018, San Sebastian/Donostia, Basque Country, Spain*

[#] *Departamento de Física de Materiales UPV/EHU, Centro de Fśica de Materiales CFM-MPC and Centro Mixto CSIC-UPV/EHU, 20080, San Sebastian/Donostia, Spain*

Поступила в редакцию 23 июня 2017 г.

Настоящий обзор работ содержит результаты теоретических исследований фазовых состояний, характеризующихся линейной дисперсией спектра низкоэнергетических электронных возбуждений. Подробно обсуждаются некоторые основные свойства и способы экспериментального изучения этих состояний в так называемых дираковских материалах. Приведены результаты современных исследований симметрийно защищенных электронных состояний с нетривиальной топологией. Объединение подходов, основанных на использовании геометрии, с методами гомотопической топологии и результатов физики конденсированного состояния позволяет прояснить новые особенности топологических изоляторов, а также дираковских и вейлевских полуметаллов.

DOI: 10.7868/S0370274X17150115

1. Введение. Прояснение топологической природы универсальных явлений в целочисленном и дробном квантовом эффекте Холла привело при исследовании бесщелевых фаз в физике конденсированных состояния к обнаружению новых классов универсального поведения [1, 2]. Открытие топологических изоляторов [3–5] значительно усилило в последние годы интерес к симметрийным и топологическим ограничениям [6–8] при классификации новых электронных фазовых состояний в кристаллических средах. Существование в этих системах симметрии относительно инверсии времени, пространственной инверсии, киральной симметрии и симметрии "частица–дырка" или их комбинаций являются общими свойствами дираковских материалов. До обсуждения влияния пространственной и точечной групповой симметрии кристаллических соединений на ультрарелятивистскую форму спектра дираковские среды можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся двумерные и трехмерные топологические изоляторы, в которых объемные электронные состояния, разделенные конечным значением щели, сопровождаются безмассовыми электронными низкоэнергетическими возбуждениями с линейным законом дисперсии спектра, расположенного в этой щели. Такие возбуждения локализованы вдоль границы или на поверхности двумерных и соответственно трехмерных топологических изоляторов, удовлетворяя принципу соответствия "объем–граница".

В топологических полуметаллах [9–16], относящихся ко второй группе дираковских материалов, участок безмассового спектра электронов этих трехмерных систем принадлежит объемным состояниям. Общим свойством двух отмеченных групп дираковских материалов является ключевая роль, которую играют спиновые спепени свободы электронных состояний. Если в топологических изоляторах, т.е. в фазовых состояниях со спиновым эффектом Холла, мы имеем дело с геликоидальными распределениями спина, то в дираковских и в вейлевских полуметаллах распределения ориентации спина являются киральными по отношению к направлению импульса электронов. Эти две группы фазовых состояний объединяет общее важное свойство: спин каждого электрона прикреплен к его импульсу. Причина такого явления – сильное спин-орбитальное взаимодействие.

Для дираковских фермионов в графене и в топологических изоляторах пространство вырождения

[1)]См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

[2)]e-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru

состоит из дираковских точек. Пространствами вырождения энергетического спектра электронов в дираковских и вейлевских полуметаллах, в которых валентная зона соприкасается с зоной проводимости, также могут быть точки и в некоторых высокоразмерных случаях – поверхности [17]. В дираковских и вейлевских полуметаллах область заполненных и свободных от носителей заряда объемных состояний иногда пересекается по линии, вблизи которой спектр имеет дираковский вид. Новой ситуации в случае снятия такого рода вырождения отвечает существование некоторого количества пар дираковских точек – разнесенных по импульсу нулей дираковского спектра, объединенного на поверхности вейлевских полуметаллов дисперсионной зависимостью в форме фермиевских арок [18]. Причина существования в вейлевских полуметаллах пар нулей дираковкого спектра связана с тем, что в этих дираковских материалах имеет место киральная аномалия [19–21]. Сравнительно недавно список дираковских материалов расширился за счет открытия вейлевских и дираковских полуметаллов второго типа [22]. Ультрарелятивистская дисперсия ветвей спектра в этих материалах сочетается с фрагментами спектра, состоящими из нерелятивистских частей с квадратичной электронной и дырочной дисперсиями. Такая ситуация возникает в случае существования значительного наклона дираковских конусов [23].

Степень вырождения и характер дисперсии спектра в точках вырождения при касании заполненных и незаполненных зон существенно зависит от кристаллической симметрии материалов. Детальный анализ этой зависимости от симметрии для всех 230 пространственных групп был проведен в недавно опубликованной работе [24] (см. также [25, 26]). В ней было показано, что в кристаллах, характеризующихся некоторыми пространственными и точечными группами симметрии, существуют новые фермионные состояния с трех-, шести- и восьмикратной степенями вырождения в точках касания зонного спектра фермионов с эффективным целочисленным значением спина [24, 27]. Напомним, что в канонических примерах Bi_2Te_3, Bi_2Se_3 трехмерных топологических изоляторов можно обнаружить [28, 29] дополнительные дираковские конусы в области незанятых состояний. Для нескольких пространственных групп [30] линии нулей в случае несимморфной симметрии возникают на различных взаимно перпендикулярных высоко-симметричных плоскостях. Эти линии касаются друг друга в точках, принадлежащих высокосимметричным осям, формируя при этом цепочку дираковских или вейлевских петель спектра дважды вырожденных подрешеточных состояний, тянущихся через всю зону Бриллюэна [30, 31]. В некоторых случаях возможно также формирование в расширенном пространстве обратной решетки распределения дираковских нулей в форме *сети*. В класс XY_4 материалов с особенностями спектра в форме цепочки петель дираковских нулей входят несколько соединений: IrF_4, $TaCl_4$, TaI_4, ReF_4, $TaBr_4$, $IrBr_4$.

Петли нулей дираковского спектра могут быть зацеплены друг за друга или принадлежать линии, которая формирует узел. Такие нетривиальные одномерные распределения дираковских нулей в импульсном пространстве являются предметом тщательного анализа в недавно опубликованных работах [32–37].

Стабильность спектра перечисленных состояний по отношению к возмущениям умеренной амплитуды во многих из перечисленных примеров обеспечивается благодаря симметрийной защищенности и существованию топологических инвариантов, значения которых определяет принадлежность к данному классу универсальности. Их вид и нетривиальное значение определяются как размерностью и симметрией проблемы, так и учетом кулоновского взаимодействия электронов в эффективном гамильтониане [6].

К числу наиболее известных топологических инвариантов относятся первый инвариант Черна – целое число, определяемое как интеграл от кривизны Берри по зоне Бриллюэна. В соответствии со своим значением черновский инвариант является индексом, который обозначает различные, не сводимые друг к другу без закрытия щели, фазовые состояния дираковских полуметаллов. Другой хорошо известный топологический инвариант – $\mathbb{Z}_2$-инвариант, первое из двух значений $(0, 1)$ которого означает принадлежность к тривиальному зонному изолятору, а второе – то, что мы имеем дело с двумерным топологическим изолятором.

Такая простая классификация изоляторов справедлива в случае невзаимодействующих по закону Кулона электронов. Если взаимодействие между одночастичными квантовыми состояниями является существенным [38, 39, 40], то возможные фазы классифицируются в ряде случаев [41] в соответствии со значениями элементов группы $\mathbb{Z}_n$ с индексом $n > 2$, например, группы $\mathbb{Z}_8$ или $\mathbb{Z}_{16}$ [42]. Для двумерных топологических изоляторов возможные фазовые состояния при учете кулоновского взаимодействия перечисляются элементами группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [43]. Это означает, что кроме перечисленных выше тривиального и топологического двумерных изоляторов существуют еще два фазовых состояния, характеризующиеся соответствующими краевыми модами. Указанные состояния, возникающие в рассмотренной системе при учете сильного кулоновского взаимодействия, являются парамагнитными и электрически нейтральными. Поэтому их экспериментальное обнаружение может быть связано, например, с изучением отношения проводимости к теплоемкости. Коэффициенты пропорциональности в этом законе Видемана–Франца для двух новых фазовых состояний оказываются отличными [43] от стандартного значения.

Появление в классификационном списке бо́льшего числа нетривиальных фазовых состояний, перечисляемых элементами групп $\mathbb{Z}_n$ с разными значениями n в системах различной размерности, может быть также связано с переходом от использования группы $SU(2)$ к унитарной группе с другим значением ранга. Такое явление возникает при изучении в рассматриваемом контексте результатов вычислений гомотопических групп $\pi_d SU(3)$ [44] в системах с различной пространственной размерностью d.

Природа сильных электронных корреляций обусловлена не только кулоновским взаимодействием. В планарных системах важную роль играют зацепления мировых линий одночастичных возбуждений. Для описания корреляционных эффектов, обусловленных запутыванием или заузленностью мировых линий одночастичных возбуждений, применяются подходы с использованием $(2+1)$-мерного действия Черна–Саймонса, алгебраического аппарата деформированной алгебры Хопфа $SU(2)_k$ [45] с параметром деформации $q = \exp\{2\pi\mathrm{i}/(k+2)\}$, группы кос [46] или аппарата конформной теории поля. Число k в последнем выражении называется уровнем в действии Весса–Зумино–Виттена–Новикова и является коэффициентом в простейшем варианте действия Черна–Саймонса. Значение $k = 1$ на геометрическом языке соответствует параллельным мировым линиям фермионов: хорошо известно [47], что мировые линии фермионов не переплетены. В случае $k = 2$ мировые линии двух соседних одночастичных возбуждений однократно переплетены. После отождествления концов мировых линий они оказываются зацепленными один раз, образуя зацепление с равным единице инвариантом Хопфа [48, 49]. Такая ситуация имеет место в двумерных топологических изоляторах [50], где актуальным является значение $k = 2$. Сильное спин-орбитальное взаимодействие в этих двумерных дираковских материалах реализует в новых условиях давнюю идею [48] о существовании энионов в условиях развитых корреляций между движениями в координатном и внутреннем пространствах.

Для того, чтобы учесть симметрию относительно инверсии времени при описании эффекта сильных корреляций в двумерных топологических изоляторах, необходимо использовать два вклада в действие Черна–Саймонса, отличающиеся взаимно противоположными по знаку значениями его коэффициента $k = 2$, что эквивалентно действию BF-теории поля [50]. Поэтому требование симметрии относительно инверсии времени приводит при алгебраическом описании двумерных топологических изоляторов к необходимости рассматривать гамильтониан и пространство состояний, принадлежащих $SU(2)_2 \times \overline{SU(2)_2}$-теории [45, 51, 52]. Последний множитель в этом произведении содержит комплексно сопряженные по отношению к первому множителю данные.

В алгебраическом подходе конформной теории поля каждому значению k соответствует фиксированное число $k+1$ примарных полей, которые при $k \geqslant 2$ удовлетворяют неабелевым правилам слияния. При $k = 2$ в список из трех примарных полей конформной теории поля входят вакуумное состояние, вихрь с находящимся в связанном состоянии майорановским фермионом и стандартный фермион. Если $k = 3$, то в унитарной $SO(2)_3$-теории, существует, не считая вакуумного состояния, только энион Фибоначчи [51]. При $k \geqslant 2$ произвольный вектор состояния многочастичной системы не может быть представлен в виде суммы произведений квантовых состояний подсистем: из-за ограничений, благодаря зацеплениям с конечной степенью, в гильбертовом пространстве состояний возникают неустранимые корреляции. Это приводит к тому, что каждое одночастичное квантовое состояния “знает” о всех квантовых состояниях системы. Такая нелокальность в гильбертовом пространстве состояний из-за корреляционных эффектов зацепления мировых линий возбуждений является источником нелокальных явлений и в координатном пространстве. Коротковолновый при $k = 2$ или длинноволновый при $k \geqslant 3$ характер сильных корреляций в возникающих при этом структурах квантового запутывания в двумерных топологических изоляторах при $k = 2$ и, соответственно, в энионных цепочках [52] при $k \geqslant 3$ приобретает в изложенном подходе ясный геометрический смысл.

Результаты работ, принадлежащие перечисленным направлениям исследований дираковских материалов, распределены по разделам настоящего обзора следующим образом. Во втором разделе обзора рассмотрено универсальное распределение сопротивлений в N-контактной схеме в явлении нелокального транспорта краевых состояний в двумерных топологических изоляторах. Третий раздел содержит результат вычислений плотности поверхностных состояний в вейлевских нецентросимметричных полуметаллах, а в четвертом разделе приведены результаты вычислений гомотопических групп $\pi_d SU(3)$, которые классифицируют новые фазовые состояния в системах с $SU(3)$ симметрией и размерностью d. В дополнительном материале речь идет о следствиях сильной спин-орбитальной связи в дираковских материалах [53–58]. Там же приведены результаты изучения эффектов Керра и Фарадея в топологических изоляторах. В заключительном параграфе обсуждаются новые направления исследований и новые результаты в области изучения топологических явлений в дираковских материалах.

2. Распределение нелокальных сопротивлений. Особенности электронных состояний в двумерных топологических диэлектриках проявляют себя в явлении квантового спинового эффекта Холла [59–62]. Мы сосредоточимся в этом разделе на обсуждении существенно нелокального отклика, который был обнаружен в экспериментальных работах [63, 64] при изучении этого эффекта. При рассмотрении [65–67] степени нелокальности мы будем использовать подход работ [63, 68], обобщенный на случай N-контактной схемы. Рассмотрим распределение напряжений между терминалами N-контактной схемы, обусловленное краевыми состояниями в двумерном топологическом изоляторе. В приближении баллистического транспорта Ландауера–Бюттекера [69, 70] ток, инжектированный через контакт i в образец, имеет следующий вид

$$I_i = \frac{e^2}{h} \sum_{j=1}^{N} (T_{ji} V_i - T_{ij} V_j), \tag{1}$$

где V_j – потенциал на контакте j, e – заряд электрона, h – постоянная Планка, h/e^2 – фундаментальная единица измерения сопротивления, которую мы в дальнейшем положим равной единице, T_{ij} – матричный элемент перехода с контакта i на контакт j, N – общее число контактов.

В общем случае коэффициенты перехода T_{ij} зависят от потенциалов V_j и геометрических параметров задачи. Мы рассмотрим экспериментально реализованную в работе [63] ситуацию, когда можно считать, что коэффициенты перехода T_{ij} при максимальном значении сопротивления не зависят от потенциалов V_j. Уровень Ферми в объеме в этом случае расположен в центре энергетической щели, а перенормированное напряжение $V^* = 0$ [63]. Соотношения между характерными размерами контактов и образца мы рассмотрим ниже в конце этого раздела при обсуждении отклонений от рассматриваемой идеальной ситуации.

С учетом того, что краевые электронные моды в топологических диэлектриках распространяются в двух взаимно противоположных направлениях, будем считать в этом идеальном случае, что коэффициенты перехода между ближайшими терминалами равны единице ($T_{i+1,i} = T_{i,i+1} = 1$), а остальные коэффициенты равны нулю. Кроме того N-терминальная схема предполагает, что для обоих направлений распространения краевых состояний справедливы периодические граничные условия: $T_{N+1,N} = T_{1,N}$, $T_{N,N+1} = T_{N,1}$.

Будем рассматривать число терминалов N как управляющий параметр. Индексы терминалов, между которыми измеряется напряжение, содержит информацию о влиянии тока краевых состояний между терминалами, через которые он течет, на распределение напряжений на других терминалах. Это распределение определяет степень нелокальности отклика. Очевидно, что с увеличением числа терминалов N сопротивление между терминалами с индексами 1 и N, через которые течет ток, будет стремиться к единице. Для соседних терминалов с индексами 1 и 2, например, измеряемое сопротивление в этом случае будет стремиться по некоторому закону к нулю при возрастании числа N.

Пусть через терминалы 1 и N течет ток I_{1N}, а напряжение измеряется на терминалах с произвольными индексами i и j. В этом случае уравнение (1), определяющее потенциалы между контактами, имеет вид

$$A_{ij} V = I, \tag{2}$$

где $A_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,1}\,\delta_{j,N} - \delta_{i,N}\,\delta_{j,1}$, δ_{ij} – символ Кронекера, $1 \le i,j \le N$, $V = (V_1, V_2, \ldots V_{N-1}, V_N)$ и $I = I_{1N}(1, 0, \ldots 0, -1)$.

Сумма $\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$ всех токов через контакты, конечно равна нулю, вследствие закона сохранения заряда. Нас будет интересовать разница между потенциалами V_i, на контактах. Поскольку вектор V инвариантен относительно сдвига на постоянное значение, то можно положить, что $V_N = 0$.

Для произвольных N решение уравнения (2) имеет вид $V_i = I_{1N}\left(1 - \frac{i}{N}\right)$. Поэтому сопротивление $(V_1 - V_N)/I_{1N}$ между терминалами с индексами 1 и N равно $R_{1N,1N} = (N-1)/N$. Нелокальное сопротивление $R_{kl,ij} = (V_i - V_j)/I_{kl}$ при $k = 1, l = N$ и измерении напряжения между терминалами i и j в этом более общем случае составляет

$$R_{1N,ij} = \frac{j-i}{N}. \tag{3}$$

Чтобы найти распределение напряжений в ситуации, когда ток течет от терминала 1 к терминалу k, необходимо в правой части уравнения (2) использовать выражение для тока в виде $I = I_{1k}(1,0,\ldots,-1,\ldots 0)$. Здесь -1 расположена на k-том месте. Точное решение уравнения (2) в этом общем случае такое:

$$V_i = I_{1k}\left(1 - \frac{i}{N}(1-k+N)\right), \tag{4}$$

если $1 \le i \le k$, и

$$V_i = I_{1k}(1-\frac{i}{N})(1-k), \tag{5}$$

если $k \le i \le N$. Такое распределение индексов токовых терминалов и терминалов, с которых снимается напряжение, определяет следующие значения сопротивления

$$R_{1k,ij} = \\ = \begin{cases} \frac{j-i}{N}\left(1-k+N\right), & 1 \le i,j \le k, \\ \frac{j-i}{N}\left(1-k\right), & k \le i,j \le N, \\ \frac{j-i}{N}\left(1-k\right)+(k-i), & 1 \le i \le k,\ k \le j \le N. \end{cases} \tag{6}$$

После перестановки индексов токового терминала $(1k)$ и индексов (ij) терминалов, с которых снимается напряжение, а также после сдвигов $k \to j-i+1$, $j \to k-i+1$, $i \to N-i+2$, можно проверить, что эти выражения удовлетворяют соотношениям симметрии Онзагера–Казимира $R_{mn,kl} = R_{kl,mn}$ для нелокальных сопротивлений $R_{mn,kl}$. Отметим факт, что универсальность баллистического транспорта в рассмотренных идеальных условиях определяется использованием краевых состояний топологических изоляторов. Поэтому в тривиальных зонных изоляторах указанное явление отсутствует.

Мы рассмотрели универсальные свойства нелокального транспорта, существующего благодаря геликоидальным краевым электронным модам, которые распространяются вдоль края двумерного топологического изолятора в двух эквивалентных взаимно противоположных направлениях. Киральной ситуации отвечает нарушение отмеченной эквивалентности. Она имеет место в случае нарушения симметрии относительно инверсии времени, например, за счет внедрения магнитных примесей или присутствия внешнего магнитного поля, и если условие того, что рассеяние назад отсутствует ослаблено, то коэффициенты перехода $T_{i,j}$ модельно можно записать как $T_{i+1,i} = 1 + k_1$, $T_{i,i+1} = k_2$ [66]. Здесь $k_1 < 1$ и $k_2 < 1$ – константы, а единица в коэффициенте перехода $T_{i+1,i}$ означает существование киральной краевой моды. В этом квази-геликоидальном краевом состоянии распределение потенциалов на терминалах с индексом i, если ток течет через контакты $1, N$, к которым подведено напряжение, имеет экспоненциальный вид

$$V_i = \left(\frac{1-r^{N-i}}{1-r^N}\right)\frac{I_{1N}}{1+k_1}\ , \tag{7}$$

где $r = k_2/(1+k_1)$.

При исчезновении причин нарушения симметрии относительно инверсии времени экспоненциальная зависимость сопротивления от расстояния между контактами, следующая из выражения (7), сменяется при $k_1 \approx 0$, $k_2 \approx 1$, т.е. когда $r \to 1$, на более слабую степенную зависимость (3). Такое изменение поведения нелокального сопротивления поддерживается результатами наблюдений в экспериментальных работах [71, 72]. В них было установлено, что при увеличении внешнего магнитного поля нелокальное сопротивление уменьшается. Это естественно интерпретировать, как переход от режима степенной зависимости (3) к экспоненциальной в учете вклада краевых состояний двумерного топологического изолятора в нелокальное сопротивление. С дальнейшим увеличением магнитного поля при некотором критическом его значении имеет место переход из состояния топологического изолятора в состояние тривиального зонного изолятора.

Киральные краевые состояния распространяются только в одном из двух возможных направлений. Коэффициенты перехода для таких состояний в уравнении (1) не равны нулю для терминалов с индексами $j > i$: $T_{i,i+1} = 1$, а $T_{i+1,i} = 0$. Поэтому сопротивления $R_{1N,ij}$ оказываются равными нулю. Другими словами, нелокальное сопротивление в системах с существенно нарушенной симметрией относительно инверсии времени отсутствует.

Проявление такой симметрии на макроскопическом уровне в форме нелокальных эффектов обусловлено геликоидальными краевыми состояниями. Форма откликов и полученные числа перед множителем h/e^2 в сопротивлении зависят от экспериментальных условий (см. подробнее в дополнительных материалах), например от температуры, которая определяет вклад в проводимость процессов неупругого рассеяния назад. Экспериментальные данные [63] обнаруживают высокую степень универсальности. Универсальный характер выражений $R_{1N,1N} = (N-1)/N$, $R_{1N,ij} = (j-i)/N$, а также (6) можно проверить в экспериментах по изучению квантового спинового эффекта Холла при изменении числа контактов и индексов токонесущих терминалов.

3. Плотность поверхностных состояний. В этом разделе мы рассмотрим спектральные свойства [73] поверхностных электронных состояний в вейлевских полуметаллах. Необходимым условием для существования вейлевского полуметалла является нарушение пространственной инверсии или симметрии относительно инверсии времени. Топологическая защищенность объемных квантовых состояний этого трехмерного аналога графена проявляется в форме поверхностных состояний, принадлежащих в импульсном пространстве ферми-аркам. Поэтому изучение свойств поверхностных электронных состояний, которые являются отличительной чертой скрытого топологического порядка в трехмерных системах с коническим спектром вблизи вейлевских точек, позволяет прояснить некоторые симметрийные аспекты топологической защищенности объемных квантовых состояний.

Замечательная особенность вейлевских полуметаллов заключается в том, что вейлевские точки являются в импульсном пространстве монополями с топологическими зарядами, равными первому инварианту Черна [74]. Существование четного числа вейлевских точек, характеризующихся чередующимися противоположными по знаку зарядами монополей, и, следовательно, нулевого суммарного топологического заряда, позволяет сделать следующий вывод. Объемный спектр электронных состояний в вейлевских полуметаллах на конечном по энергии расстоянии от вейлевских точек с необходимостью имеет гиперболический характер. Это означает, что поверхностный спектр при проецировании объемного спектра на двумерную зону Бриллюэна будет отражать отмеченную гиперболичность: при сечении закона дисперсии поверхностных состояний некоторым постоянным значением энергии на уровне Ферми спектр содержит несвязные одномерные дисперсионные распределения в форме ферми-арок. Суммируя можно сказать, что причина существования ферми-арок связана с киральной аномалией, проявляющейся в *скрытом* топологическом характере поведения фаз объемных электронных состояний в вейлевских полуметаллах.

Класс материалов для реализации вейлевких полуметаллов включает TaAs [75, 76], гетероструктуры, построенные из топологических и обычных изоляторов [12], а также допированные магнитными примесями топологические изоляторы [77]. В настоящее время топологическая классификация [78, 79, 80] фазовых состояний в топологических изоляторах распространена на вейлевские полуметаллы [81]. Нетривиальные значения топологических инвариантов позволяют материалам, содержащим точки Вейля, проявлять широкий спектр новых явлений. Недавно были изучены транспортные особенности [82, 83] полуметаллов, связанные с существованием в этих средах киральной аномалии [84], а также спектр коллективных возбуждений [85, 86], отрицательное магнитосопротивление [87], нелокальный транспорт [88], квантовый аномальный эффект Холла [89]. была Также были обнаружены обнаружена необычная сверхпроводимость [90] и другие явления [91, 92]. Фриделевские осцилляции из-за фермиевских арок в вейлевских полуметаллах изучены в работе [93], где была вычислена плотность поверхностных состояний в модели чередующихся зонных и топологических изоляторов. Осцилляции плотности поверхностных состояний в вейлевских полуметаллах в сильном магнитном поле и их экспериментально проверяемые следствия изучены в работах [94, 95].

Мы рассмотрим свойства вейлевских полуметаллов в ситуации, когда имеет место симметрия относительно инверсии времени, а пространственная инверсия нарушена [96], сосредоточившись при этом на изучении плотности поверхностных состояний. Этот тип вейлевского полуметалла изучен в работе [97], где был получен спектр поверхностных состояний, который имеет вид

$$E(k_x, k_y) = 4t \sin\frac{k_x a}{4} \sin\frac{k_y a}{4} \tag{8}$$

и показан на рис. 1 в дополнительных материалах. Здесь $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ – двумерный волновой вектор, t – амплитуда перескока на соседние узлы решетки и a – постоянная решетки. На рис. 2 в дополнительных материалах приведен вид арок Ферми, полученных сечением поверхности $E(k_x, k_y) = E$ на уровне $E = 0.2t$.

Плотность поверхностных состояний определяется интегралом по поверхностной зоне Бриллюэна (BZ) $|k_x \pm k_y| \le \frac{2\pi}{a}$ от дельта функции $\delta[E - E(k_x, k_y)]$ следующим образом:

$$N(E) = \int\limits_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta[E - E(k_x, k_y)]. \tag{9}$$

После введения безразмерных величин, т.е. плотности поверхностных состояний $n(\varepsilon) = N(E)/N_0$ с $N_0 = 4/(\pi^2 a^2 t)$, энергии $\varepsilon = E/(2t)$, компонент волнового вектора $(x,y)=(k_xa/4,k_ya/4)$, и после замен переменных $\xi=x-y$, $\eta=x+y$, мы получим

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\xi\int\limits_{-\xi}^{\xi}d\eta\delta[\varepsilon-\cos\xi+\cos\eta]. \qquad (10)$$

При заменах переменных интегрирования в (10) второй шаг снимает дельта-функцию, а третий приводит к эллиптическому интегралу Лежандра первого рода:

$$n(\varepsilon)=\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)[1-(\varepsilon+t)^2]}}=$$
$$=\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-m\sin^2\alpha}}=F(\varphi,m). \qquad (11)$$

Амплитуда $\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}}$ и параметр $m==1-(\varepsilon/2)^2$ эллиптического интеграла первого рода $F(\varphi,m)$ зависят от энергии ε, принадлежащей интервалу $0<\varepsilon<1$. Асимптотические значения эллиптического интеграла первого рода определяют поведение плотности поверхностных состояний для $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to 1$ следующим образом:

$$n(\varepsilon)=\begin{cases}\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}), & \varepsilon\to 0\ (\varphi\to\frac{\pi}{2}),\\ \sqrt{2(1-\varepsilon)}, & \varepsilon\to 1.\end{cases} \qquad (12)$$

Плотность поверхностных состояний как функция энергии ε в области $0.1<\varepsilon\le 1$ показана на рис. 3 в дополнительных материалах. Следует отметить, что выражение (11) для плотности поверхностных состояний применимо в области энергий $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$ с $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2<1$ до тех пор, пока поверхностные состояния не сольются с континуумом объемных электронных состояний [97]. Другими словами область энергий, принадлежащая поверхностным состояниям, при умеренном нарушении инверсионной симметрии меньше, чем интервал $(0,1)$.

Плотность состояний определяется дисперсией электронного спектра и пространственной размерностью d рассматриваемой задачи. Обычно плотность состояний является неубывающей функцией энергии. Исключением является одномерный случай с квадратичным спектром $E_p=p^2/2m_e$, когда $N(E)\sim E^{-1/2}$. Плотность поверхностных состояний в топологических диэлектриках для сравнения равна $N(E)=\frac{E}{2\pi h^2v_{\rm F}^2}$, тогда как для объемных состояний в вейлевских полуметаллах она имеет вид $N(E)=\frac{E^2}{2\pi^2h^3v_{\rm F}^3}$, где $v_{\rm F}$ – скорость Ферми. Ограничение фазового пространства влияет на вклад в термодинамические характеристики, например, редуцирует для дираковских материалов теплоемкость $C\sim T^d$, где T – температура и $d=2,3$.

В рассмотренной двумерной проблеме причина того, что функция $n(\varepsilon)$ является падающей функцией, связана с существованием седловой точки в центре поверхностной зоны Бриллюэна. Последнее приводит к появлению при $\varepsilon\to 0$ сингулярности Ван Хова. Дальнейшее уменьшение функции $n(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 1$ отражает уменьшение длины арок Ферми. В результате в промежуточной области энергии плотность поверхностных состояний оказывается более похожа на поведение этой функции для системы двух одномерных взаимно перпендикулярных дираковских металлов, чем на поведение ее в случае двумерного дираковского металла, когда $n(E)\sim E$. Это замечание поддерживает существующее в литературе предположение [98, 99, 100], состоящее в том, что систему дираковких поверхностных электронных мод можно рассматривать как композицию ортогональных латтинжеровских одномерных металлических проводников.

Знание функции $n(\varepsilon)$ и ее значения $n(\varepsilon_{\rm F})$ при энергии Ферми $\varepsilon_{\rm F}$ позволяет найти квантовую емкость $C_Q=e^2N(\varepsilon_{\rm F})$ в двумерной системе в расчете на единицу площади, а также по формуле Эйнштейна $\sigma_{dc}=e^2N(\varepsilon_{\rm F})D$ определить вклад в низкочастотную проводимость. Здесь $D=v_{\rm F}^2\tau$ – коэффициент диффузии, τ – транспортное время жизни. Очевидно, что плотность поверхностных состояний $N(\varepsilon_{\rm F})$, взятой при энергии Ферми, определяет также вклад поверхностной проводимости в полную туннельную проводимость в вейлевских полуметаллах. Что касается распределения спиновых степеней свободы, объемные состояния для одной дираковской точки в вейлевском полуметалле напоминают киральные квазиспиновые конфигурации в графене, тогда как поверхностные состояния в вейлевском полуметалле являются аналогами геликоидальных распределений спиновых ориентаций в топологических изоляторах. Энергетический спектр и спиновая текстура поверхностных состояний может быть экспериментально изучена с использованием техники туннельной спектроскопии, для которой поведение плотности поверхностных состояний является ключевым. Чтобы отделить поверхностные вклады от объемных, для нахождения различий и контроля электронного транспорта поверхностных носителей различной топологической природы, мы должны следовать подходу работы [101].

Ответ на вопрос, какие свойства рассмотренной модели являются общими и свойственны другим вейлевским полуметаллам с нарушенной симметрией относительно пространственной инверсии, может быть следующим. Ключевыми свойствами, определяющими гиперболический характер дисперсионной зависимости (7) и структуру арок Ферми, являются кристаллическая симметрия и симметрия относительно инверсии времени (сравни с [102]). Характер дисперсии арок Ферми в рассмотренном случае (8) есть следствие существования оси второго порядка, когда арки, полученные в результате вращения вокруг этой оси и после операции обращения времени, совпадают [97]. Нетрудно представить себе теперь структуру арок в системах с отличающимися точечными группами [97, 102].

Дисперсия ферми-арок в системах с пространственной инверсионной симметрией разумеется отражает особенности ситуаций, когда симметрия относительно временной инверсии нарушена тем или иным способом. Какие свойства плотности состояний в этом и рассмотренном в настоящей работе случаях являются общими? Отмеченное выше наблюдение о характере поведения плотности состояний в промежуточной области энергии $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, где она почти постоянная, как результат вложения одномерных арок Ферми в двумерное импульсное пространство, приводит к следующему предположению. Характер зависимости плотности состояний от энергии в этой промежуточной области будет качественно тем же самым, что и в системах с нарушенной симметрией относительно пространственной инверсии.

4. Топологические $SU(3)$ состояния. Топологические инварианты полевых конфигураций являются фундаментальными объектами в квантовой теории поля и в физике конденсированного состояния, классифицируя топологические дефекты и возможные фазовые состояния [6, 103]. К известным примерам топологических распределений поля относятся вихри, ежи и инстантоны. Их существование есть прямое следствие нетривиальности гомотопических групп $\pi_n\mathbb{S}^n = \mathbb{Z}$ для сфер $\mathbb{S}^n$ с $n = 1, 2$ и $\pi_3 SU(2) = \mathbb{Z}$ в системах с пространственной размерностью $d = 1, 2$ и 3. Напомним, что $\mathbb{Z}$ обозначает группу целых чисел.

Недавний прогресс при классификации фазовых состояний [104, 105] связан с рассмотрением систем, в которых D-мерная поверхность $\mathbb{S}^D$ окружает дефект в d-мерных топологических изоляторах или топологических сверхпроводниках [3, 4, 79, 80] и $D \neq d$. Первым нетривиальным примером $\pi_3\mathbb{S}^2 = \mathbb{Z}$ в этом случае является уже упоминавшееся во введении отображение Хопфа трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ в двумерную $\mathbb{S}^2$. Соответствующий топологический инвариант Хопфа имеет вид $Q = \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathcal{M}} A \wedge dA \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{M} = \mathbb{S}^3$. Он хорошо известен в магнитогидродинамике под названием “хелисити” или как абелевое действие Черна–Саймонса в $(2+1)$-мерной теории поля. Целое число Q, которое имеет смысл степени зацепления или заузленности одномерных распределений поля, определяет в свою очередь нижнюю границу [106, 107] энергии в двух-компонентной модели Гинзбурга–Ландау, записанной [108] в виде модели Скирма–Фаддеева–Ниеми [49, 109–113].

Два-форма $dA = \mathbf{n}[d\mathbf{n} \wedge d\mathbf{n}]$ в выражении для инварианта Хопфа и в $O(3)$ σ-модели Скирма–Фаддеева–Ниеми параметризована с помощью трехмерного единичного вектора $\mathbf{n}$, который отображает базовое пространство $\mathbb{S}^3$ в сферу $\mathbb{S}^2$. Целевое пространство $\mathbb{S}^2$ этого отображения топологически эквивалентно фактор-пространству $SU(2)/U(1) \cong \mathbb{S}^2$. Поле единичного вектора $\mathbf{n}$ также определяет существенную переменную на массовой оболочке в инфракрасном пределе $SU(2)$-симметричной квантовой хромодинамики (КХД).

Мы будем рассматривать в этом разделе группу $SU(3)$ вместо группы $SU(2)$. Изменение ранга группы мотивировано несколькими причинами. Прежде всего возможностью использования накопленного опыта в калибровочной теории поля [114–116] и при решении $SU(3)$-симметричных проблем физики конденсированного состояния [117]. С точки зрения теории узлов выбор группы $SU(3)$ позволяет сформулировать следующий вопрос: как выглядит обобщение низкоразмерной топологии стандартной теории узлов на высокоразмерное целевое пространство $SU(3)$-симметричной КХД[3)]? Один из подходов к решению этой проблемы по предложению В.И. Арнольда[4)] ведет к использованию многозначных функционалов [120]. Другой элегантный путь базируется на использовании результатов работы [121]. Мы обратимся к более консервативному рассмотрению проблемы, описывая целевое пространство $SU(3)$- симметричной КХД как обобщение сферы $\mathbb{S}^2$ $SU(2)$ теории и базируясь на теории гомотопических групп.

Как естественное обобщение подхода с использованием группы $SU(2)$ на $SU(3)$-симметричную теорию, мы рассмотрим сейчас в качестве целевого пространства фактор-пространство $SU(3)/U(1) \times$

---

3)Эта проблема была сформулирована Л.Д. Фаддеевым в работе [118] (см. также [119]).

4)В 2004 году В.И. Арнольд предложил одному из нас (А.Р.) использовать обобщенный инвариант Хопфа [120] для описания узлов в $SU(3)$ случае.

$\times U(1) = F_2$, которое является пространством флагов F_2 [122, 123] с размерностью $\dim F_2 = 6$. Оставшаяся свобода в выборе отображения принадлежит размерности и роду базового пространства, имеющего нетривиальные гомотопические группы. Мы ограничимся для простоты базовыми пространствами в виде сфер $\mathbb{S}^n$[5)]. Поэтому нас будет интересовать такие числа n гомотопических групп $\pi_n F_2$, которые приведут к нетривиальным ответам. В качестве дополнения к максимальному тору группы $SU(3)$, что приводит к общей орбите F_2, мы вычислим также для сравнения гомотопические группы в случае вырожденной орбиты CP^2. Последняя эквивалентна фактор-пространству $SU(3)/U(2) = SU(3)/(SU(2) \times U(1)) = CP^2$, имеющем размерность $\dim CP^2 = 4$.

Вычисления точных последовательностей и необходимые для этого теоремы содержатся в работе [44], основные выводы которой совпадают с ранее полученными результатами [126]. Поскольку мы хотим найти ограничения на тип возможных топологических фазовых состояний и топологических дефектов в $SU(3)$ теории, то опустим для краткости описание геометрии пространства флагов F_2, вывод топологических инвариантов, а также формулировку промежуточных утверждений из работы [44]. Вместо этого поместим результаты наших вычислений во второй строке приведенных таблиц 1–3.

Таблица 1. Список гомотопических групп $\pi_d F_2$ для размерностей $d \leq 5$

d	0	1	2	3	4	5
$\pi_d F_2$	0	0	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Таблица 2. Список гомотопических групп $\pi_d F_2$ для размерностей $6 \leq d \leq 10$

d	6	7	8	9	10
$\pi_d F_2$	$\mathbb{Z}_6$	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{30}$

Таблица 3. Список гомотопических групп $\pi_d CP^2$ для размерностей $d \leq 7$

d	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_d CP^2$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

Перечислим основные выводы, которые следуют из приведенных в таблицах результатов.

(*i*) Из табл. 1 и 2 следует, что нетривиальными гомотопическими группами для $d \leq 6$ являются $\pi_2 F_2$, $\pi_3 F_2$, $\pi_5 F_2$ и $\pi_6 F_2$.

(*ii*) Из результатов работы [123] известно, что нетривиальность гомотопической группы $\pi_2 F_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ означает присутствие в теории двух различных монополей (этот ответ полезно сравнить с результатом $\pi_2 CP^2 = \mathbb{Z}$ в табл. 3, означающим существование монополя одного типа). Причина нетривиальности второй гомотопической группы состоит в том, что пространство флагов F_2 является компактным симплектическим многообразием.

(*iii*) Целые числа в правой части полученного ответа – $\pi_3 F_2 = \mathbb{Z}$ – имеют смысл $SU(3)$ инстантонных топологических зарядов, так как $\pi_3 F_2 = \pi_3 SU(3) = \pi_3 SU(2)$.

(*iv*) Целые числа в правой части результата $\pi_5 F_2 = \mathbb{Z}$ описывают некоторые текстуры и соответствующие фазы. Суть этих структур сейчас трудно угадать.

(*v*) Наиболее интересный ответ – $\pi_6 F_2 = \mathbb{Z}_6$ – означает, что существуют только шесть фазовых состояний, обозначенные числами $\{0, 1, \ldots 5\}$. Естественная интерпретация этих состояний состоит в отождествлении их с тремя кварковыми дублетами КХД, а шестимерное базовое пространство $\mathbb{S}^6$ – со стандартным шестимерным координатно-импульсным фазовым пространством. Последнее имеет место на масштабах, на которых мы можем рассматривать шестимерное базовое пространство как сферу $\mathbb{S}^6$.

5. Обсуждение. После обсуждения во введении подходов и методов изучения свойств дираковских материалов возникает естественный вопрос: какой из перечисленных подходов является основным? Картина одномерных распределений электронных степеней свободы, примененная нами при изучении вклада краевых мод в нелокальное сопротивление во втором параграфе, и поведение поверхностной плотности состояний в вейлевских полуметаллах в виде композиции вкладов в эту характеристику от одномерных взаимно перпендикулярных дираковских мод в третьем параграфе, позволяет частично ответить на этот вопрос. Действительно, используемая во втором параграфе N-контактная схема с ее строительным блоком в виде буквы H, позволяет беспрепятственно распределить по звеньям цепи в H-геометрии флуктуационные переменные $SU(2)_2$-теории, поставив их в соответствии с ее неабелевым правилом слияния полей [51]. Рассмотрение с этой точки зрения экспериментальной ситуации для проверки теории с алгеброй $SU(2)_3 \equiv SU(3)_2$ и распределением звеньев

[5)]Зона Бриллюэна топологически эквивалентна тору. Группа классифицирующих классов отображений в этом случае найдена в работе [124] (см. также [7, 49, 125]).

строительного блока в форме буквы Y, когда единственными примарным полем, участвующим в процессах слияния и распада, будет энион Фибоначчи, является в настоящее время одной из основных проблем в области применения методов конформной теории поля для построения схем универсальных квантовых вычислений.

Другой обращающей на себя внимание особенностью проблем при изучении дираковских материалов является ультрарелятивистский спектр низкоэнергетических электронных возбуждений. Квадратный корень в релятивистском законе дисперсии энергии одночастичных возбуждений в отличие от нерелятивистского параболического закона дисперсии препятствует аддитивности в законе сохранения энергии безмассовых дираковских электронных состояний, помещенных в квантующее магнитное поле, когда энергии продольного и поперечного движений электрона изменяются в процессе поглощения им коллективного возбуждения. В результате в областях бесстолкновительного затухания Ландау появляются новые окна прозрачности, где могут распространяться новые коллективные возбуждения [127].

За участие в обсуждении результатов работ, составивших содержание этого обзора, мы благодарны М. Буттикеру, Г.Е. Воловику, С.В. Еремееву, Ч.Л. Кейну, Е.Р. Кочаровской, за их полезные замечания и советы. Данная работа была частично поддержана грантом IT-756-13 университета г. Сан Себастьян (Е.В.Ч.).

1. Ch.-K. Chiu, J. C. Y. Teo, A. P. Schnyder, and Sh. Ryu, Rev. Mod. Phys. **88**, 035005 (2016).
2. X.-G. Wen, arXiv:1610.03911
3. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
4. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2010).
5. J. E. Moore, Nature **464**, 194 (2010).
6. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Oxford University Press, N.Y. (2003).
7. J. E. Moore, Y. Ran, and X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **101**, 186805 (2008).
8. Ch. Liu, F. Vafa, and C. Xu, Phys. Rev. B **95**, 161116 (2017).
9. C. Herring, Phys. Rev. **52**(4), 365 (1937).
10. A. A. Abrikosov and S. D. Beneslavskii, JETP **32**, 699 (1971).
11. A. A. Abrikosov, J. Low Temp. Phys. **5**, 141 (1972).
12. A. A. Burkov and L. Balents, Phys. Rev. Lett. **107**, 127205 (2011).
13. Sh.-M. Huang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, Ch.-Ch. Lee, G. Chang, B. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, A. Bansil, H. Lin, and M. Z. Hasan, Nat. Commun. **6**, 7373 (2015).
14. S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, Ch. Zhang, R. Sankar, Sh.-M. Huang, Ch.-Ch. Lee, G. Chang, B. Wang, G. Bian, H. Zheng, D. S. Sanchez, F. Chou, H. Lin, Sh. Jia, and M. Z. Hasan, Science **349**, 613 (2015).
15. L. Lu, Zh. Wang, D. Ye, L. Ran, L. Fu, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic, Science **349**, 622 (2015).
16. I. P. Rusinov, T. V. Menshchikova, I. Yu. Sklyadneva, R. Heid, K.-P. Bohnen, and E. V. Chulkov, New J. Phys. **18**, 113003 (2016).
17. B. Lian and Sh.-Ch. Zhang, Phys. Rev. B **94**, 041105 (2016).
18. X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath, and S. Y. Savrasov, Phys. Rev. B **83**, 205101 (2011).
19. S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
20. J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
21. K. Fujikawa, Phys. Rev. D **29**, 285 (1984).
22. A. A. Soluyanov, D. Gresch, Z. Wang, Q-S. Wu, M. Troyer, X. Dai, and B. A. Bernevig, Nature **527**, 495 (2015).
23. K. Zhang and G. E. Volovik, arXiv:1604.00849
24. B. Bradlyn, J. Cano, Z. Wang, M. G. Vergniory, C. Felser, R. J. Cava, and B. A. Bernevig, Science **10**(1126), 5037 (2016).
25. J.-Z. Ma, C.-J. Yi, B. Q. Lv, Z. J. Wang, S.-M. Nie, L. Wang, L.-Y. Kong, Y.-B. Huang, P. Richard, H.-M. Weng, B. A. Bernevig, Y.-G. Shi, T. Qian, and H. Ding, Science Advances **3**, e1602415 (2017).
26. B. J. Wieder, Y. Kim, A. M. Rappe, and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **116**, 186402 (2016).
27. M. Orlita, D. M. Basko, M. S. Zholudev, F. Teppe, W. Knap, V. I. Gavrilenko, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretskii, P. Neugebauer, C. Faugeras, A.-L. Barra, G. Martinez, and M. Potemski, Nature Phys. **10**, 233 (2014).
28. D. Niesner, Th. Fauster, S. V. Eremeev, T. V. Menshchikova, Y. M. Koroteev, A. P. Protogenov, E. V. Chulkov, O. E. Tereshchenko, K. A. Kokh, O. Alekperov, A. Nadjafov, and N. Mamedov, Phys. Rev. B **86**, 205403 (2012).
29. S. V. Eremeev, I. V. Silkin, T. V. Menshchikova, A. P. Protogenov, and E. V. Chulkov, JETP Lett. **96**(12), 870 (2012).
30. T. Bzdusek, Q.-S. Wu, A. Ruegg, M. Sigrist, and A. A. Soluyanov, Nature **538**, 75 (2016).
31. R. Yu, Q. Wu, Z. Fang, and H. Weng, arXiv:1701.08502
32. Zh. Yan, R. Bi, H. Shen, L. Lu, Sh.-Ch. Zhang, and Zh. Wang, arXiv:1704.00655
33. R. Bi, Zh. Yan, L. Lu, and Zh. Wang, arXiv:1704.06849.

34. B. Lian, C. Vafa, F. Vafa, and Sh.-Ch. Zhang, Phys. Rev. B **95**, 094512 (2017).
35. W. Chen, H.-Zh. Lu, and J.-M. Hou, arXiv:1703.10886
36. M. Ezawa, arXiv:1704.04941
37. P.-Y. Chang and C.-H. Yee, arXiv:1704.01948
38. M. A. Metlitski, C. L. Kane, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **92**, 125111 (2015).
39. X. Chen, L. Fidkowski, and A. Vishwanath, Phys. Rev. B **89**, 165132 (2014).
40. P. Bonderson, Ch. Nayak, and X.-L. Qi, J. Stat. Mech. P09016 (2013).
41. L. Fidkowski and A. Kitaev, Phys. Rev. B **81**, 134509 (2010).
42. A. W. W. Ludwig, arXiv:1512.08882
43. Ch. Wang, A. C. Potter, and T. Senthil, Science **343**, 6171 (2014).
44. A. P. Protogenov, E. V. Chulkov, and J. C. Y. Teo, J. Phys. Conf. Ser. **482**, 012035 (2014).
45. M. Freedman, Ch. Nayak, K. Shtengel, K. Walker, and Zh. Wang, Ann. Phys. **310**, 428 (2004).
46. P. Fendley and E. Fradkin, Phys. Rev. B **72**, 024412 (2005).
47. A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 325 (1988).
48. А. П. Протогенов, УФН **162**(7), 1 (1992).
49. А. П. Протогенов, УФН **176**, 689 (2006).
50. G. Y. Cho and J. E. Moore, Annals Phys. **326**, 1515 (2011).
51. А. П. Протогенов, *Топологический порядок в энионных жидкостях*, ИПФ РАН, Нижний Новгород (2016).
52. В. А. Вербус, Л. Мартина, А. П. Протогенов, ТМФ **167**, 843 (2011).
53. А. А. Перов, И. В. Пенягин, ЖЭТФ **143**, 535 (2014).
54. А. А. Перов, И. В. Пенягин, ЖЭТФ **148**, 127 (2015).
55. А. А. Перов, А. С. Рульков, Е. А. Морозова, Е. С. Золина, ЖЭТФ **151**, 974 (2017).
56. M. Grundmann, N. N. Ledentsov, R. Heitz et al. (Collaboration), Phys. Stat. Sol. (b) **188**, 249 (1995).
57. M. C. Geisel, J. H. Smet, V. Umansky, K. von Klitzing, B. Naundorf, R. Ketzmerick, and H. Schweizer, Phys. Rev. Lett. **92**, 256801 (2004).
58. M.-H. Kim, G. Acbas, M.-H. Yang, I. Ohkubo, H. Christen, D. Mandrus, M. A. Scarpulla, O. D. Dubon, Z. Schlesinger, P. Khalifah, and J. Cerne, Phys. Rev. B **75**, 214416 (2007).
59. C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).
60. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
61. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, Science **318**, 766 (2007).
62. M. König, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, T. Hughes, C.-L. Liu, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 031007 (2008).
63. A. Roth, C. Brüne, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, Science **325**, 294 (2009).
64. A. J. Bestwick, E. J. Fox, X. Kou, L. Pan, K. L. Wang, and D. Goldhaber-Gordon, Phys. Rev. Lett. **114**, 187201 (2015).
65. A. P. Protogenov, V. A. Verbus, and E. V. Chulkov, Phys. Rev. B **88**, 195431 (2013).
66. J. Wang, B. Lian, H. Zhang, and Sh.-Ch. Zhang, Phys. Rev. Lett. **111**, 086803 (2013).
67. S.-C. Zhang, Proc. Nobel Symposium (2014).
68. G. Tkachov and E. M. Hankiewicz, Phys. Status Solidi **250**, 215 (2013).
69. M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).
70. M. Büttiker, IBM J. Res. Dev. **32**, 317 (1988).
71. M. Majewicz, G. Grabecki, P. Nowicki, L. Szyller, J. Wrobel, L. Cywinski, M. Zholudev, V. Gavrilenko, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretsky, W. Knap, F. Teppe, and T. Dietl, *Joint Conference of New Trends in Topological Insulators and 17th International Conference on Narrow Gap Systems*, Würzburg, Germany (2016), p. 110.
72. G. M. Gusev, E. B. Olshanetsky, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, and S. A. Dvoretsky, Phys. Rev. B **87**, 081311(R) (2013).
73. А. П. Протогенов, Е. В. Чулков, ФТП **49**, 1598 (2015).
74. X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath, and S. Y. Savrasov, Phys. Rev. B **83**, 205101 (2011).
75. S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, C. Zhang, R. Sankar, S.-M. Huang, C.-C. Lee, G. Chang, B.K. Wang, G. Bian, H. Zheng, D.S. Sancez, A. Bansil, F. Chou, H. Lin, S. Jia, and M. Z. Hasan, Science **349**, 613 (2015).
76. S.-M. Huang, I. Belopolski, C.-C. Lee, G. Chang, B.K. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, A. Bansil, H. Lin, and M. Z. Hasan, Nature Commun. **6** 7373 (2015).
77. G. Y. Cho, arXiv:1110.1939
78. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).
79. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, New J. Phys. **12**, 065010 (2010).
80. A. Kitaev, AIP. Conf. Proc. **1134**, 22 (2009), arXiv:0901.2686 (2009)
81. B.-J. Yang and N. Nagaosa, Nat. Commun. **5**, 4898 (2014).
82. A. A. Zyuzin and A. A. Burkov, Phys. Rev. B **86**, 115133 (2012).
83. P. Hosur and X.-L. Qi, Phys. Rev. B **91**, 081106 (2015).

84. K.-Y. Yang, Y.-M. Lu, and Y. Ran, Phys. Rev. B **84**, 075129 (2011).
85. M. Lv and S.-C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B **27**(25), 1350177 (2013).
86. I. Panfilov, A. A. Burkov, and D. A. Pesin, Phys. Rev. B **89**, 245103 (2014).
87. D. T. Son and B. Z. Spivak, Phys. Rev. B **88**, 104412 (2013).
88. S. A. Parameswaran, T. Grover, D. A. Abanin, D. A. Pesin, and A. Vishwanath, Phys. Rev. X **4**, 031035 (2014).
89. K.-Y. Yang, Y.-M. Lu, and Y. Ran, Phys. Rev. B **84**, 075129 (2011).
90. G. Y. Cho, J. H. Bardarson, Y.-M. Lu, and J. E. Moore, Phys. Rev. B **86**, 214514 (2012).
91. P. Hosur and X.-L. Qi, Compt. Rend. Physique **14**(9-10), 857 (2013).
92. A. M. Turner and A. Vishwanath, arXiv:1301.0330
93. P. Hosur, Phys. Rev. B **86**, 195102 (2012).
94. P. E. C. Ashby and J. P. Carbotte, Eur. Phys. J. B **87**, 92 (2014).
95. E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, and P. O. Sukhachov, Phys. Rev. B **90**, 115131 (2014).
96. G. B. Halasz and L. Balents, Phys. Rev. B **85**, 035103 (2012).
97. T. Ojanen, Phys. Rev. B **87**, 245112 (2013).
98. J. C. Y. Teo and C. L. Kane, Phys. Rev. B **89**, 085101 (2014).
99. T. Neupert, C. Chamon, C. Mudry, and R. Thomale, Phys. Rev. B **90**, 205101 (2014).
100. Q. D. Gibson, D. Evtushinsky, A. N. Yaresko, V. B. Zabolotnyy, M. N. Ali, M. K. Fuccillo, J. Van den Brink, B. Büchner, R. J. Cava, and S. V. Borisenko, arXiv:1405.0402 (2014)
101. H. Cao, C. Liu, J. Tian, Y. Xu, I. Miotkowski, M. Z. Hasan, and Y. P. Chen, arXiv:1409.3217
102. R. Okugawa and S. Murakami, arXiv:1402.7145 (2014)
103. N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** 591 (1979).
104. J. C. Y. Teo and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **104**, 046401 (2010).
105. J. C. Y. Teo and C. L. Kane, Phys. Rev. B **82**, 115120 (2010).
106. A. F. Vakulenko and L. V. Kapitanskii, Sov. Phys. Dokl. **24**, 433 (1979).
107. A. P. Protogenov and V. A. Verbus, Письма в ЖЭТФ **76**(1), 60 (2002).
108. E. Babaev, L. D. Faddeev, and A. J. Niemi, Phys. Rev. B **65**, 100512 (2002).
109. J. Jäykka, J. Hietarinta, and P. Salo, Phys. Rev. B **77**, 094509 (2008).
110. Y. M. Cho, Phys. Rev. D **21**, 1080 (1980).
111. Y. M. Cho, Phys. Rev. Lett. **46**, 302 (1981).
112. Y. S. Duan and M. L. Ge, Sinica Sci. **11**, 1072 (1979).
113. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Phys. Rev. Lett. **82**, 1624 (1999).
114. D. B. Kaplan and S. Sun, arXiv:1112.0302 [hep-th].
115. A. R. Zhitnitsky, Annals of Physics **336**, 462 (2013).
116. B. Beri, D. Tong, and K. Wong, JHEP **1309**, 025 (2013).
117. T. Morimoto, H. Ueda, T. Momoi, and A. Furusaki, Phys. Rev. B **90**, 235111 (2014).
118. L. Faddeev, Philos. Trans. R. Soc. London A **359**, 1399 (2001).
119. T. A. Bolokhov and L. D. Faddeev, Theor. and Math. Phys. **139**, 679 (2004).
120. С. П. Новиков, УМН **39**, 97 (1984).
121. A. Ranicki, *A High-dimensional Knot Theory. Algebraic Surgery in Codimension 2*, Springer, N.Y. (1998).
122. R. F. Picken, J. Math. Phys. **31**, 616 (1990).
123. K-I. Kondo and Y. Taira, Prog. Theor. Phys. 1189 (2000).
124. L. S. Pontrjagin, Mat. Sbornik (Recueil Mathematique N. S.) **9**, 331 (1941).
125. Yu. G. Makhlin and T. S. Misirpashaev, Письма в ЖЭТФ **61**, 48 (1995).
126. M. Mimura and H. Toda, J. Math. Kyoto Univ. **3-2**, 217 (1964).
127. R. V. Turkevich, A. P. Protogenov, and E. V. Chulkov, Rhys. Rev. B (to be published) (2017).