

Формирование каскада энергии в системе вихрей на поверхности ВОДЫ

С. В. Филатов⁺, Д. А. Храмов⁺, А. А. Левченко^{+*1)}

⁺ Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черногловка, Россия

* Астраханский государственный университет, 414056 Астрахань, Россия

Поступила в редакцию 31 июля 2017 г.

Экспериментально исследовано формирование энергетического каскада в системе вихрей, генерируемых перпендикулярными стоячими волнами частотой 6 Гц на поверхности воды. Получено, что после включения накачки на распределении энергии по волновому вектору $E(k)$ возникают пики, которые со временем трансформируются в результате перераспределения энергии по масштабам. Стационарное распределение $E(k)$, установившееся через 300 с после включения накачки, можно описать степенной функцией волнового вектора $E(k) \sim k^{-1.75}$. Показано, что при возбуждении волны частотой 6 Гц на поверхности воды в результате нелинейного взаимодействия возникают волны с частотами близкими к 18, 15, 12, 9 и 3 Гц. Предполагается, что в интервале волновых векторов $0.3\text{--}5\text{ см}^{-1}$ каскад энергии вихревого движения формируется нелинейным взаимодействием вихрей, генерируемых всеми волнами, распространяющимися по поверхности, причем доминирующими являются прямые потоки энергии в сторону больших волновых векторов.

DOI: 10.7868/S0370274X1717009X

Введение. В работах [1, 2] показано, что волны, распространяющиеся по поверхности жидкости, могут формировать хаотичное соленоидальное движение. Совсем недавно был предложен механизм генерации вихрей нелинейными волнами на поверхности вязкой жидкости [3, 4]. Результатом взаимодействия двух нелинейных взаимно перпендикулярных стоячих волн одинаковой частоты является формирование квадратной решетки из вихрей с периодом, равным длине волны возбуждения [4, 5]. Завихренность Ω на поверхности, вычисляемая по трекам декорирующих частиц, описывается формулой

$$\Omega = -(2 + \sqrt{2})H_1 H_2 \omega k^2 \sin \psi \sin(kx) \sin(ky), \quad (1)$$

$$\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x},$$

где ψ – разность фаз между волнами, H_1, H_2 – амплитуды волн, ω – частота, k – волновой вектор, V_x и V_y – компоненты скорости жидкости. Первый член в сумме (1) обусловлен увлечением Стокса [6], а второй – взаимодействием нелинейных волн [5].

В экспериментах [7] по изучению вихревого движения, генерируемого фарадеевскими волнами на поверхности воды [8], было показано, что энергия из области накачки распространяется в сторону боль-

ших и малых масштабов – обратный и прямой каскады. Причем, обратный энергетический каскад можно было описать степенной функцией волнового вектора, близкой к $E(k) \sim k^{-5/3}$, а прямой каскад – функцией $E(k) \sim k^{-3}$. Такие энергетические каскады следовало бы ожидать в случае развитой вихревой турбулентности на поверхности двухмерной жидкости [9]. В трехмерном случае прямой энергетический каскад $E(k)$ должен быть пропорционален функции $k^{-5/3}$ [10]. Недавно в работе [11] была показана возможность существования обратного каскада в трехмерных системах с нарушенной зеркальной симметрией с зависимостью, пропорциональной $k^{-5/3}$.

В наших экспериментах [5] мы наблюдали возникновение крупномасштабных течений на фоне решетки вихрей, сформированной перпендикулярными стоячими волнами на частоте 4 Гц. Механизм формирования больших вихрей, наблюдаемых в этих экспериментах, остался невыяснен. Число Рейнольдса вихревого движения масштабом около 10 см имеет величину порядка $R \sim \Omega L^2 / \nu \sim 10^3$, где L – размер вихря, ν – вязкость воды. Поэтому можно предположить, что взаимодействие таких больших вихрей является сильно нелинейным, способным сформировать каскады энергии, как в сторону больших, так и малых волновых векторов.

В данной работе мы приводим экспериментальные результаты изучения формирования каскада

¹⁾e-mail: levch@issp.ac.ru

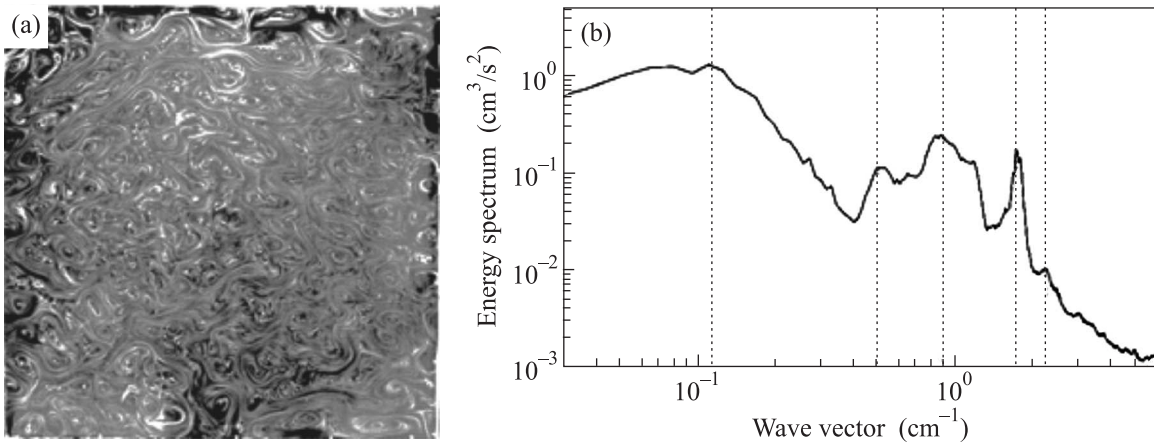


Рис. 1. Треки полиамидных частиц (а) и распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ (b) через 25 с после включения накачки. Вертикальные штриховые линии проведены для наглядности

энергии вихревого движения на поверхности воды, возбуждаемой перпендикулярными стоячими нелинейными волнами на частоте 6 Гц. Мы показываем, что в случае монохроматической накачки в системе вихрей возникают энергетические каскады, направленные из области накачки в сторону больших и малых волновых векторов в результате нелинейного взаимодействия вихрей. Мы демонстрируем, что на поверхности воды формируются низкочастотные субгармоники и кратные гармоники волны накачки, которые вносят определяющий вклад в формирование энергетических вихревых каскадов.

Методика эксперимента. Для проведения экспериментов была изготовлена ванна из листов оргстекла толщиной 10 мм. Длина ванны 70 см, ширина 70 см, высота 25 см. В ванну, установленную на виброизолирующем столе Standa с пневматической подвеской, заливается дистиллированная вода. Глубина воды составляет 9 см.

Волнопродукторы, состоящие из привода и плунжера, монтируются на рамную конструкцию и устанавливаются на столе. Волны на поверхности воды возбуждаются плунжером – стержнем из нержавеющей стали диаметром 10 мм и длиной 680 мм, полупогруженным в воду и совершающим вертикальные колебания при подаче на приводы электрического гармонического сигнала частотой $f = 6$ Гц.

Для визуализации движения жидкости на поверхность воды насыпается порошок полиамида белого цвета со средним диаметром гранул около 30 мкм. Плотность частиц близка к плотности воды, они находятся в погруженном состоянии. Колебания записывают с помощью фотоаппарата Canon EOS 70D с частотой 30 кадр/с. Полученные снимки

суммируют для выявления треков движения частиц на поверхности. Обработка полученных изображений программой PIVLab [12] позволяет вычислять скорости движения частиц вдоль поверхности V_x и V_y , а затем рассчитать завихренность на поверхности по формуле (2). Распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ находят интегрированием по кольцу в k -пространстве по формуле

$$E(k) = \frac{1}{2S\Delta k} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} [|V_k|^2], \quad (2)$$

где интегрирование проводят по кольцу $k < \theta < k + \Delta k$. Полученное значение нормируется на площадь поверхности жидкости S . V_k – фурье компонента скорости жидкости. Подробно схема установки и методика измерений описана в [5].

Методика эксперимента позволяет вычислять горизонтальную скорость движения декорирующих частиц в поле волны как функцию времени, сравнивая два последовательных кадра. Затем, выполнив преобразование Фурье по времени, можно получить распределение скорости частиц $V_{\text{hor}}(f)$ по частоте, т.е. установить, какие волны распространяются по поверхности во время эксперимента.

Полученные результаты. На рис. 1а представлены треки полиамидных частицы, сформировавшиеся после возбуждения стоячих волн в течение 25 с на частоте 6 Гц с угловой амплитудой $\alpha \approx 0.08$ рад. Из рис. 1а следует, что вихревое движение декорирующих частиц является сильно хаотическим, поэтому вихревая решетка, возникшая в первые секунды накачки, не проявляется на треках. На рис. 1b приведено одномерное распределение энергии по волновому вектору $E(k)$, рассчитанное по формуле (2). На ри-

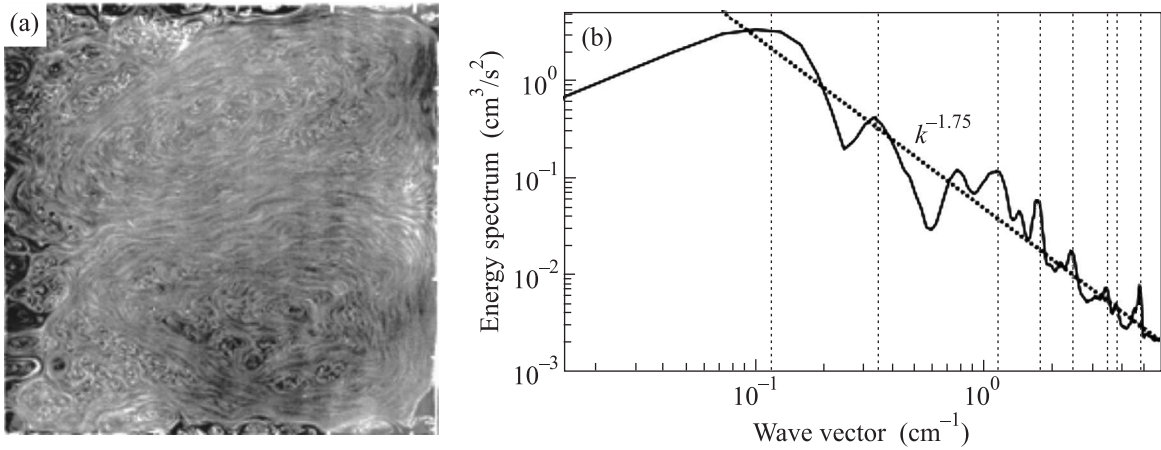


Рис. 2. Треки полиамидных частиц (а) и распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ (б) через 300 с после включения накачки. Пунктирная прямая соответствует зависимости $E(k) \sim k^{-1.75}$

сунке следует отметить пик, расположенный на волновом векторе $k_p = 1.8 \text{ см}^{-1}$, соответствующий вектору волны на частоте накачки. Кроме того, отчетливо виден мощный широкий пик на волновом векторе, равном приблизительно 0.9 см^{-1} , а также пики на волновых векторах 0.5 см^{-1} и 0.12 см^{-1} . Отметим также, что на волновых векторах больше k_p в распределении $E(k)$ наблюдается особенность на волновом векторе $k \approx 2.2 \text{ см}^{-1}$.

Через 300 с после включения накачки треки полиамидных частиц сильно изменились: на рис. 2а хорошо видны два сформировавшихся больших вихря, занимающие всю поверхность экспериментальной ванны. На их фоне можно различить большое количество вихрей разных размеров. Распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ также модифицировалось (рис. 2б). Во-первых, высота пика на волновом векторе $k = 0.12 \text{ см}^{-1}$ выросла в 3 раза, а во-вторых, относительные высоты пиков на волновых векторах $0.3 \text{ см}^{-1} < k < 5 \text{ см}^{-1}$ также существенно изменились.

На рис. 3 показано изменение со временем энергии на волновых векторах в круге радиусом 0.2 см^{-1} , с центром в начале координат. Из рис. 3 можно сделать вывод, что до ≈ 130 с энергия немонотонно изменяется. Однако затем энергия резко со временем возрастает, почти в четыре раза, и выходит на новое стационарное состояние к приблизительно 230 с. На зависимости $E(t)$ хорошо видны осцилляции энергии.

Обсуждение. Из рис. 1 и 2 следует, что формируемая волнами вихревая структура на поверхности воды эволюционирует со временем. Через 25 с после включения накачки каскад энергии еще не успел

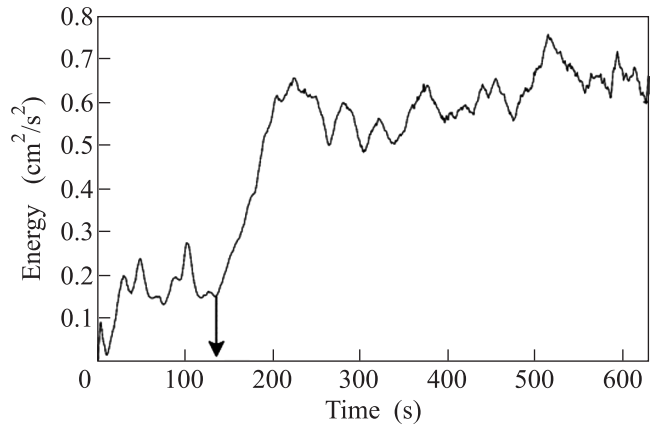


Рис. 3. Зависимость от времени суммарной энергии $E(t)$ на волновых векторах в круге диаметром 0.2 см^{-1} с центром в начале координат. Стрелкой отмечено появление волн на частотах около 3 Гц

сформироваться, на поверхности наблюдается хаотическое вихревое движение. Однако к 230 с на поверхности образовались два больших вихря, и можно говорить, что каскад энергии установился в интервале волновых векторов, занимающих декаду. Процесс перехода из хаотического движения в новое состояние с двумя вихрями происходит в течение приблизительно 100 с. Затем энергия изменяется со временем немонотонно, что свидетельствует о присутствии хаотических процессов обмена энергией между вихрями разных масштабов: энергия приходит и уходит в течение характерного времени длительностью около 50–100 с. Амплитуда изменения энергии достигает 20%.

Распределение энергии в системе вихрей $E(k)$, сформировавшееся через 300 с после включения на-

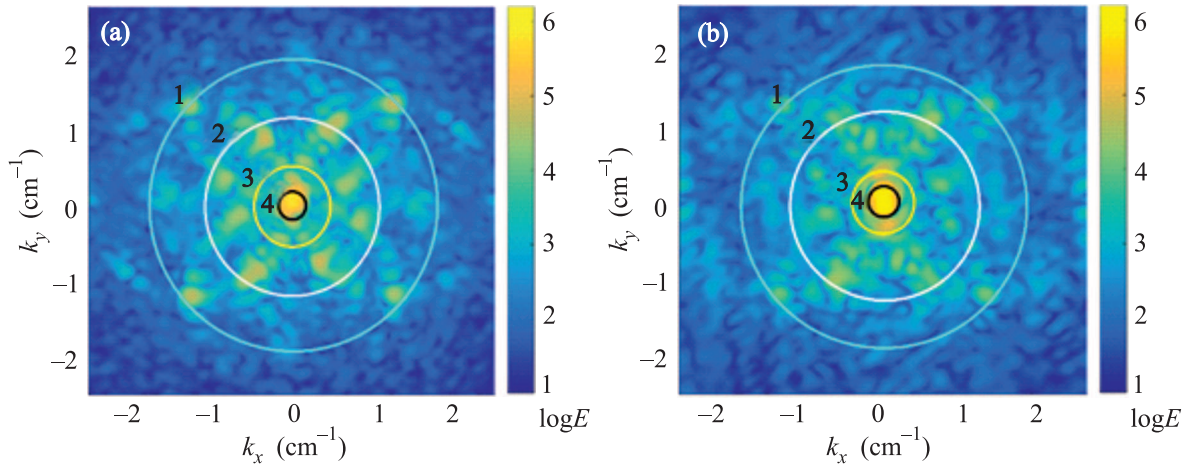


Рис. 4. (Цветной онлайн) Распределение энергии в пространстве волновых векторов через 25 с (а) и через 300 с (б) после включения накачки. Окружности проведены для наглядности

качки, в интервале волновых векторов $0.3\text{--}5\text{ см}^{-1}$ можно описать степенной функцией $E(k) \sim k^{-1.75}$, показанной на рис. 2b пунктирной линией. Отметим, что экспериментальное распределение $E(k)$ близко к теоретически предсказанной зависимости в обратном каскаде энергии вихревого движения для двухмерного слоя жидкости, с показателем, равным $-5/3$ [9]. Однако в наших экспериментах жидкость заведомо является глубокой и трехмерной, так как глубина проникновения волны на частоте 6 Гц $l = \lambda/2\pi \approx 0.8\text{ см}$, много меньше глубины жидкости (λ – длина волны), а за время накачки, которое превосходит вязкое время проникновения вихря вглубь жидкости $t = (2\nu k^2)^{-1} \approx 30\text{ с}$, все сформировавшиеся вихри проникают вглубь жидкости. Поэтому наблюдаемое распределение $E(k)$ не может быть обусловлено двухмерностью нашей системы.

Рис. 4а демонстрирует распределение энергии в пространстве волновых векторов, сформировавшееся через 25 с после включения накачки. Напомним, что на распределении $E(k)$ представлена только энергия вихревого движения. На рисунке хорошо видны четыре пика, лежащие на окружности 1 и образующие квадрат, с модулями координат $[1.2, 1.2]$, свидетельствующие о наличии на поверхности квадратной решетки вихрей с периодом, равным длине волны на частоте накачки. На распределении $E(k)$ этой решетке соответствует пик на волновом векторе $k = 1.3\sqrt{2} \approx 1.8\text{ см}^{-1}$. Кроме этого, на рис. 4 присутствуют четыре хорошо выраженных пика, лежащие на окружности 2 радиусом около 0.9 см^{-1} . Также хорошо выражены пики, расположенные на окружности 3 радиусом 0.5 см^{-1} . Центральная окружность 4 выделяет пик энергии на масштабе от 0 до 0.2 см^{-1} .

В области векторов, превосходящих k_p , хорошо видны пики на волновых векторах, близких по модулю к 2.2 см^{-1} .

Следует отметить, что пики, лежащие на окружностях радиусами 0.9 и 0.5 см^{-1} , не формируют квадратные решетки, поэтому можно предположить, что эти структуры, на поверхности не связаны с волновыми процессами на поверхности воды. Вероятнее всего мы имеем дело с процессами, идущими в вихревой системе. Обратим внимание, что значения волновых векторов пиков на распределении $E(k)$ на рис. 1а, равны 1.8 , 0.9 и 0.5 , т.е. относятся приблизительно как $4:2:1$. Поэтому можно предположить, что на начальной стадии накачки в вихревой системе идет процесс удвоения размеров вихрей в результате их слияния. Затем на больших временах после включения накачки вихревые структуры сильно размываются формирующимися крупными вихрями на масштабе ячейки.

Следует специально подчеркнуть, что эксперименты мы проводили в ячейке конечных размеров, поэтому максимальный размер вихря ограничен длиной стороны ванны, равной 70 см . Волна на частоте накачки формирует дискретную систему вихрей, и это не может не отразиться на процессе взаимодействия вихрей. Доминирующим процессом во взаимодействии вихрей решетки будет последовательное удвоение размера пары вихрей. Для диполя вихрей размером 4.8 см на частоте накачки достаточно всего четырех процессов слияния, чтобы достичь размеров экспериментальной ванны.

На рис. 4б приведено распределение энергии в пространстве волновых векторов, сформировавшееся через 300 с после включения накачки. Видно, что

относительная интенсивность пиков на малых волновых векторах значительно выросла. Четыре пика, соответствующие решетке вихрей на масштабе накачки сохранились (окружность 1). Окружность 2 увеличилась в диаметре до 1.1 см^{-1} , на ней лежат четыре пика, составляющие прямоугольник, и, предположительно, сформировавшиеся из пиков рис. 4а с волновым вектором $k = 0.9 \text{ см}^{-1}$ в результате деформации решетки большими вихрями. Четко обозначились два мощных пика на масштабе $k = 0.35 \text{ см}^{-1}$ (окружность 3). Окружностью 4 выделена центральная часть диаметром 0.2 см^{-1} , соответствующая масштабу больших вихрей.

Можно было бы предположить, что пики с волновыми векторами 0.35 и 0.12 см^{-1} в распределении $E(k)$ формируются волнами, возникшими на поверхности воды в результате распада волн на частоте накачки. Чтобы проверить это предположение обратимся к распределению горизонтальной скорости декорирующих полиамидных частиц $V_{\text{hor}}(f)$ по частоте $f = \omega/2\pi$ (рис. 5). На этом рисунке хорошо виден до-

минорный пик на частоте накачки 6 Гц (волновой вектор равен 3.3 см^{-1}) и частоте 14.9 Гц (4.0 см^{-1}) также могут возникнуть в результате четырехволновых процессов слияния волн на частотах около $3, 6$ и 9 Гц .

Таким образом, при возбуждении двух перпендикулярных стоячих волн с разностью фаз в 90° на частоте 6 Гц с волновым вектором $k = 1.3 \text{ см}^{-1}$ на поверхности воды возбуждаются дополнительно волны в результате нелинейного волнового взаимодействия. Следует полагать, что все возникшие поверхностные волны принимают участие в формировании вихревого движения. Проявление этого механизма мы наблюдаем на рис. 2б в виде пиков на распределении $E(k)$ на волновых векторах 0.35 и 1.8 см^{-1} с частотами около 3 и 6 Гц , а также на волновых векторах близких к $2.3, 3.3$ и 4.0 см^{-1} , соответствующих волнам на частотах $9, 12$ и 14.9 Гц . Пик на волновом векторе $k = 4.9 \text{ см}^{-1}$ мог возникнуть в результате взаимодействия волн частотой около 18 Гц , сформировавшихся, например, при взаимодействии двух волн частотами 6 и 15 Гц . Однако наша методика не позволяет регистрировать волны частотой выше 15 Гц . Отметим, что волны на частотах выше частоты накачки в силу большого вязкого затухания являются, в основном, бегущими.

Амплитуда волны h пропорциональна отношению горизонтальной скорости V_{hor} к частоте ω , $h = V_{\text{hor}}/\omega$. Как следует из рис. 5, для волн на частотах 3 и 6 Гц амплитуды относятся примерно как $1:2$. Отметим также, что энергия вихревого движения, которая порождается стоячей волной, пропорциональна энергии волны, $h^2 = (V_{\text{hor}}/\omega)^2$. Из этой оценки следует, что энергии стоячих волн на частотах 3 Гц и 6 Гц относятся примерно как $1:4$. Так как энергия в вихревом движении пропорциональна квадрату угловой амплитуды $\alpha^2 \sim (V_{\text{hor}}\omega)^2$, то значения энергий вихревого движения на масштабах 1.3 см^{-1} и 0.35 см^{-1} отличаются более, чем на порядок. Однако даже при таком соотношении энергий нельзя пренебрегать накачкой на частотах около 3 Гц . Важно заметить, что поток энергии на частотах 2.9 Гц и 3.1 Гц может оказаться существенным в формировании вихревого каскада. В пользу этого предположения свидетельствует тот факт, что значительное изменение энергии вихревого движения на поверхности воды, показанное на рис. 3, начинается точно в момент появления волн частотой около 3 Гц (отмечено стрелкой).

Таким образом, энергия в вихревое движение поступает в основном на масштабе накачки $k_p = 1.3 \text{ см}^{-1}$ и на масштабе 0.35 см^{-1} , а также на волновых векторах, близких к $2.3, 3.3, 4.0$ и 4.9 см^{-1} . Вих-

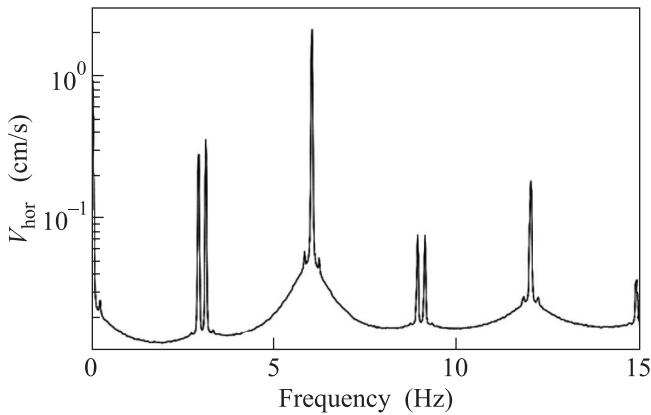


Рис. 5. Распределение горизонтальной скорости декорирующих полиамидных частиц $V_{\text{hor}}(f)$ по частоте

минирующий пик на частоте накачки 6 Гц , а также пики на частотах $2.9, 3.1, 8.9, 9.1, 12$ и 14.9 Гц . Причем эти пики появляются в распределении $V_{\text{hor}}(f)$ к 130 с накачки.

На низких частотах на рис. 5 видны два пика на частотах 2.9 и 3.1 Гц , с разными амплитудами. Эти пики могли возникнуть вместе с пиками на частотах 8.9 и 9.1 Гц в результате четырехволновых процессов, доминирующих во взаимодействии гравитационных волн:

$$6 \text{ Гц} + 6 \text{ Гц} \Rightarrow 2.9 \text{ Гц} + 9.1 \text{ Гц}$$

$$6 \text{ Гц} + 6 \text{ Гц} \Rightarrow 3.1 \text{ Гц} + 8.9 \text{ Гц}.$$

Волновой вектор волны на частоте 9 Гц равен 2.3 см^{-1} , на частоте 3 Гц — 0.35 см^{-1} . Пики на

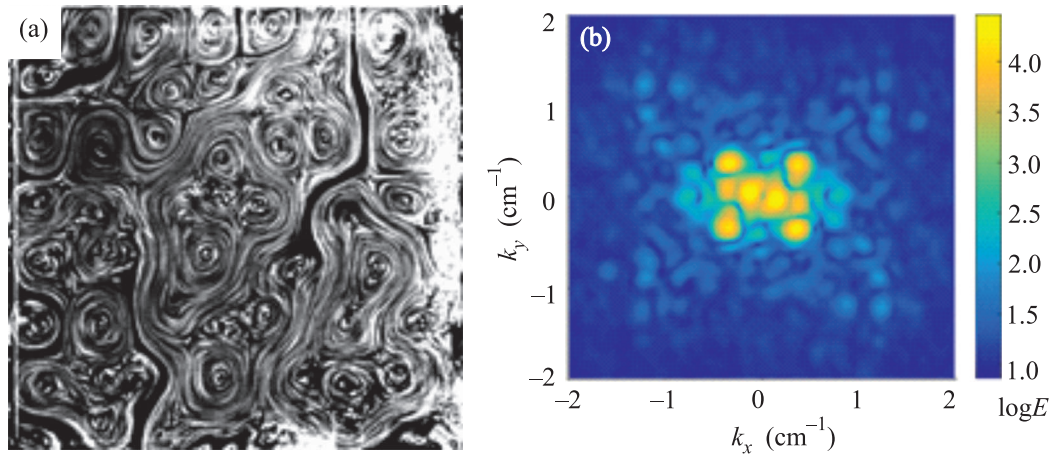


Рис. 6. (Цветной онлайн) Треки полиамидных частиц (а) и распределение энергии в пространстве волновых векторов $E(k)$ (б) при возбуждении поверхности воды стоячей волной частотой 3 Гц в течение 300 с. Угловая амплитуда волны $\alpha \approx 0.07$ рад

ревые структуры, сформированные волнами на частотах от 2.9 до 18 Гц (кроме 6 Гц), со временем значительно деформируются и перемешиваются крупномасштабными течениями в результате нелинейного взаимодействия. Поэтому пики в распределении $E(k)$, сформировавшемся через 300 с после включения накачки, наблюдаются на волновых векторах, соответствующих длинам волн, равным $2\pi/\lambda$, возникающих на поверхности воды. Решетка вихрей, формируемая накачкой на частоте 6 Гц, не разрушается полностью крупномасштабными течениями из-за сильной завихренности (высокой азимутальной скорости) в узлах решетки.

Мы имеем дело с процессами передачи энергии в системе вихрей, однако стационарное распределение $E(k)$ устанавливается в условиях накачки на нескольких масштабах. Таким образом, энергия по каскаду распространяется как в сторону больших, так и малых векторов из нескольких масштабов – прямой и обратный каскады, т.е. распределение $E(k)$ устанавливается в условиях распределенной накачки, в отличие от рассмотренной в теории [9, 10].

Поскольку мы не наблюдаем на поверхности воды волновое движение на частоте 1.5 Гц с длиной волны около 140 см (первый резонанс ячейки), то самый мощный пик на волновом векторе $\approx 0.1 \text{ см}^{-1}$, по видимому, не связан с взаимодействием волн. Крупномасштабный вихрь может формироваться в результате слияния вихрей, первоначально генерируемых волнами на частотах 2.9 Гц и 3.1 Гц. В результате этого взаимодействия пары вихрей объединяются, образуя последовательно вихревое движение большего масштаба [13].

Для подтверждения этого предположения на рис. 6а приведены треки полиамидных частиц, движущихся на поверхности воды при возбуждении на ней перпендикулярных стоячих волн с угловой амплитудой $\alpha \approx 0.07$ рад на частоте 3 Гц в течение 300 с. На рисунке хорошо виден процесс формирования крупномасштабного течения вихрями, образующими первоначально вихревую решетку с периодом, равным 17 см. На рис. 6б показано распределение энергии в пространстве волновых векторов, хорошо видны четыре пика, соответствующие решетке вихрей на частоте накачки. Самые мощные пики на больших масштабах в центре распределения соответствуют большим вихрям, а появление пиков на масштабах меньше вектора накачки свидетельствует об установлении как обратного, так и прямого каскадов.

Обратим внимание, что степенная функция волнового вектора $E(k) \sim k^{-1.75}$ описывает в среднем каскад энергии вихревого движения на волновых векторах как больше, так и меньше вектора волны накачки на частоте 6 Гц. Такое распределение, как уже отмечалось, близко к $E(k)$ в прямом турбулентном каскаде энергии в трехмерных жидкостях. В нашем случае отличие экспериментальной зависимости $E(k)$ от теоретической можно обусловить наличием нескольких масштабов накачки на векторах: от 0.35 см^{-1} до 4.9 см^{-1} . Прямые каскады направлены в сторону больших волновых векторов и доминируют над обратными.

Закключение. Экспериментально показано, что при возбуждении взаимно перпендикулярных гравитационных стоячих волн частотой 6 Гц в результа-

те нелинейного взаимодействия на поверхности воды возникают волны с частотами выше и ниже частоты накачки. Все эти волны принимают участие в формировании вихревого движения на масштабах длины волны.

Распределение энергии $E(k)$ в диапазоне волновых векторов от 0.3 см^{-1} до 5 см^{-1} формируется в основном процессами нелинейного взаимодействия вихрей, которые генерируются волнами, распространяющимися по поверхности воды. Вклады генерации вихрей низко- и высокочастотными волнами проявляется в виде отдельных пиков на кривых $E(k)$. Распределение $E(k)$ пропорциональное $k^{-1.75}$, формируется накачкой на нескольких масштабах. Зависимость $E(k)$ от волнового вектора обусловлена существованием прямых каскадов из областей накачки на масштабах волн с частотами от 3 до 18 Гц.

Отметим, что при интерпретации результатов, полученных в экспериментальных ячейках конечного размера, следует принимать во внимание дискретность в спектре поверхностных возбуждений и в вихревом движении.

Авторы благодарны М.Ю. Бражникову, И.В. Колоколову, В.В. Лебедеву и Л.П. Межову-Деглину за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ # 17-12-01525.

1. A. von Kameke, F. Huhn, G. Fernandez-Garcia, A.P. Munuzuri, and V. Perez-Munuzuri, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 074502 (2011).
2. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, *Phys. Rev. X* **4**, 021021 (2014).
3. S. V. Filatov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, *JETP Lett.* **2**(7), 432 (2015).
4. S. V. Filatov, V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles, M. Y. Brazhnikov, A. A. Levchenko, and V. V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 054501 (2016).
5. С. В. Филатов, С. А. Алиев, А. А. Левченко, Д. А. Храмов, *Письма в ЖЭТФ* **104**(10), 714 (2016).
6. O. N. Mesquita, S. Kane, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. A* **45**(6), 3700 (1992).
7. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, and M. Shats, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 194501 (2013).
8. M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. (London)* **121**, 299 (1831).
9. R. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
10. U. Frisch, *Turbulence, The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1995).
11. L. Biferale, S. Musacchio, and F. Toschi, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 164501 (2012).
12. W. Thielicke and E. J. Stamhuis, *J. Open Research Software* **2**(1), 30 (2014).
13. С. В. Филатов, Д. А. Храмов, А. М. Лихтер, А. А. Левченко, *Поверхность.* **12**, 73 (2017).