Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае

Б. И. Сулейманов $^{1)}$

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, 450008 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 2017 г.

После переработки 10 августа 2017 г.

Исследовано влияние малой дисперсии на самофокусировку решений уравнений нелинейной геометрической оптики в пространственно одномерном случае. В главном порядке это влияние описывается с помощью универсального специального решения нелинейного уравнения Шредингера, являющегося изомонодромным. Рассмотрены аналитические и асимптотические свойства этого универсального решения.

DOI: 10.7868/S0370274X17180102

1. Решениям пространственно одномерных уравнений нелинейной геометрической оптики (HГО)

$$\rho_T' + (\rho v)_X' = 0, \quad v_T' + v v_X' - 4\rho_X' = 0, \tag{1}$$

часто используемых для описания самых разных явлений в неустойчивых средах, присуще [1–4] разбиение их на отдельные самостягивающиеся сгустки, разделенные промежутками нулевой интенсивности $\rho=0$. В §26, §28 и §32 монографии Жданова и Трубникова [4] содержится важный вывод о том, что в ситуации "общего положения" такие сгустки самофокусируются и что, по-видимому, сингулярности соответствующих решений системы НГО в окрестностях фокальных точек $T=T_f, X=X_f$ в главном порядке задаются автомодельным решением системы (1)

$$\rho(T,X) = (T - T_f)^{-2/3} \left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36} \right], \tag{2}$$

где $s=(X-X_f)(T-T_f)^{-2/3},\ a$ — постоянная, $\rho(T,X)=0$ вне стягивающегося при $T\to T_f$ промежутка $|X-X_f|\leq \sqrt{18a}(T-T_f)^{2/3}.$

Данная статья посвящена описанию влияния малой дисперсии на такие процессы самофокусировки, необходимость изучения которого, в частности, отмечена в заключительном абзаце §32 монографии [4].

2. Эталонный пример уравнения, на решениях которого будет изучаться это влияние, представляет нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$-\mathrm{i}\varepsilon G_T' = \varepsilon^2 G_{XX}'' + 2|G|^2 G \qquad (\varepsilon \ll 1). \tag{3}$$

Приближение НГО к решениям данного уравнения возникает следующим образом: подстановка

$$G = \rho^{1/2} \exp\left(\frac{i\Phi}{\varepsilon}\right) \tag{4}$$

в НУШ (3) дает систему

$$\rho_T' + 2(\rho \Phi_X')_X' = 0,$$

$$\Phi_T' + (\Phi_X')^2 - 2\rho = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{\rho})_{XX}''}{\sqrt{\rho}},$$
(5)

бездисперсионный предел которой ($\varepsilon=0$)

$$\rho_T' + 2(\rho \Phi_X')_X' = 0, \quad \Phi_T' + (\Phi_X')^2 - 2\rho = 0$$
 (6)

после дифференцирования по переменной X второго из (5) уравнения сводится к системе НГО (1) с $v=2\Phi'_{X}.$

Из автомодельности решения этой системы с компонентой (2) следует, что вторая его компонента имеет вид $v(T,X)=(T-T_f)^{-1/3}2s/3$. Следовательно, соответствующие самофокусирующиеся сгустки, описываемые решениями системы (6), при $T\to T_f-0$ и $X\to X_f$ на некотором стягивающемся к точке $X=X_f$ промежутке ненулевой интенсивности, имеют асимптотики (Φ_* – постоянная)

$$\Phi(T,X) = \Phi_* + (T - T_f)^{1/3} \left[3a + \frac{s^2}{6} \right] + \dots,$$

$$\rho(T,X) = (T - T_f)^{-2/3} \left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36} \right] \dots$$
(7)

3. Действуя согласно методу согласования [5], с целью учета поправочного действия правой части системы (5) на самофокусировку решений (6), осуществим следующие действия.

¹⁾e-mail: bisul@mail.ru

(і) Сделаем такие замены

$$X - X_f = x\varepsilon^{\alpha}, \quad T - T_f = t\varepsilon^{3\alpha/2},$$

$$G = \exp\left(\frac{i\Phi_*}{\varepsilon}\right) \frac{q}{\varepsilon^{\gamma}},$$
(8)

чтобы в образе (3) – уравнении

$$-i\varepsilon^{1-3\alpha/2}q_t = \varepsilon^{2-2\alpha}q_{xx} + 2\varepsilon^{-2\gamma}|q|^2q$$

– все члены были одного порядка. Получаем, что в заменах (8) $\alpha=2, \gamma=1,$ и что решение уравнения (3) в окрестности точки фокуса (T_f,X_f) в главном порядке задается формулой

$$G = \frac{q(t,x)}{\varepsilon} + ..., \tag{9}$$

где q(t,x) – гладкое при всех t и x решение q(t,x) = $= r(t,x) \exp{(i\varphi(t,x))}$ фокусирущего НУШ

$$-iq_t = q_{xx} + 2|q|^2 q, (10)$$

уже независящее от малого параметра ε . Таким образом, согласно первому из растяжений (8), ширина соответствующего сгустка в момент $T = T_f$ ненулевая, хотя и довольно малая – порядка $O(\varepsilon^2)$.

(ii) Из условия согласования с асимптотиками (7) выведем, что это глобально гладкое решение НУШ (10) при $-t+x^2\to\infty$ вне двух ветвей кривой

$$x^2 = 18at^{4/3} (11)$$

стремится к нулю, а внутри их его амплитуда |r(t,x)| и фаза $\varphi(t,x)$ в главном задаются формулами

$$\varphi = t^{1/3} \left[3a + \frac{s^2}{6} \right] + \dots,$$

$$|r| = |t|^{-1/3} \left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36} \right]^{1/2} + \dots.$$
(12)

Из универсальности НУШ (10) в условиях малой дисперсии и слабой нелинейности и изложенного выше следует, что данное специальное решение НУШ (10) также довольно универсально.

4. В окрестности точки фокуса (T_f, X_f) соотношениями (7) описывается и известный самофокусирующийся импульс Таланова [6], фактически соответствующий [1] точным решениям системы (6) вида

$$\Phi = \delta(T) + g(T)X^{2}, \rho = \frac{\delta_{T}(T)}{2} + X^{2} \left[\frac{g'_{T}(T)}{2} + 2g^{2}(T) \right],$$

где, как легко видеть,

$$g_{TT}'' + 20gg_T' + 48g^3 = 0,$$
 $\delta_{TT}'' + 4g\delta_T' = 0.$

(Вне интервала $|X| < \left[-\delta_T(T)/(g_T'(T) + 4g^2(T)) \right]^{1/2}$ этот импульс тождественно равен нулю.)

Так что в случае применимости приближения $H\Gamma O$ к решениям уравнения (3), описываемого такими самофокусирующимися импульсами Таланова, поведение приближаемых ими решений $G(T, X, \varepsilon)$ будет, понятно, также задаваться формулой (9).

Замечание 1. Вывод статьи [7] о неприменимости этого приближения НГО для решений НУШ к ситуации уравнения (3) с параметром $\varepsilon \ll 1$, напрямую не относится. (Попытка свести эту ситуацию к той же, что в [7] приводит к тому, что вместо 1 в неравенстве $N\gg 1$ из раздела 2 [7] будет стоять малый параметр.) Однако вопрос о применимости к решениям (3) данного приближения Таланова все же пока надо признать остающимся открытым.

5. Данное решение q(t,x) НУШ (10) является представителем множества специальных решений интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) уравнений – аналогов так называемых специальных функций волновых катастроф [8, Гл. 6, §4]. Общая теория таких решений, изучение которой было начато Китаевым в публикации в Записках ЛО-МИ [9] (независимо частный случай одного подобного решения рассматривался автором данной статьи в том же номере Записок ЛОМИ [10]), позднее получила дальнейшее развитие и уже довольно многочисленные применения [11–20].

Замечание 2. К этим же решениям обычно приводит и использование методики Дубровина [21], основанной на приближенных симметриях нелинейных уравнений с малым параметром [22].

Как и другие представители данного множества, это решение q НУШ (10) относится к классу изомонодромных [23]: для данного q(t,x) наряду с системами линейных обыкновеных дифференциальных уравнений (OДУ) МОЗР [24] $(\lambda$ – параметр)

$$\Psi_x' = i \begin{pmatrix} -\lambda & q \\ q^* & \lambda \end{pmatrix} \Psi, \tag{13}$$

$$\Psi_t' = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(2\lambda^2 - |q|^2) & 2\mathrm{i}\lambda q - q_x \\ 2\mathrm{i}\lambda q^* + q_x^* & \mathrm{i}(2\lambda^2 - |q|^2) \end{pmatrix} \Psi, \tag{14}$$

их соответствующее совместное решение Ψ удовлетворяет также системе линейных ОДУ

$$\Psi_{\lambda}' = A(\lambda, t, x)\Psi, \tag{15}$$

где матрица $A(\lambda,t,x)$ рациональна по переменной $\lambda.$

Исходя из вида переменной $s=xt^{-2/3}$ в асимптотике (12) этого решения q(t,x) НУШ (10) и выводов из [9–20], естественно сопоставить q(t,x) интеграл

$$I(t,x) = \int_{I} \lambda^{m} \exp i(\lambda x - \lambda^{2} t + \delta \lambda^{-1}) d\lambda, \qquad (16)$$

в котором δ , m – постоянные, а L – такой контур, что интегрирование по частям интеграла не дает вкладов от внеинтегральных членов. (Интеграл Фурье (16) удовлетворяет линейной части НУШ (10) $-\mathrm{i}I_t=I_{xx}$ и его асимптотика при больших значениях |t| описывается [8] как раз после замены $x=st^{2/3}$.)

Далее, уже из вида подинтегральной экспоненты этого линейного аналога q(t,x) с учетом гладкости q(t,x) и вида систем (13), (14) согласно общей идеологии [9] (и более конкретно-применительным рассуждениям и выкладкам из [11]) вытекает, что в ОДУ (15)

$$A(\lambda, t, x) = \sum_{j=-2}^{1} A_j(t, x) \lambda^j, \tag{17}$$

где

$$A_{1} = -4it \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_{0} = \begin{pmatrix} -ix & 4itq \\ 4itq^{*} & ix \end{pmatrix},$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2it|q|^{2} & ixq - 2tq_{x} \\ ixq^{*} + 2tq_{x}^{*} & -2it|q|^{2} \end{pmatrix},$$

$$A_{-2} = \left[-t(q_{x}q^{*} - q_{x}^{*}q) + \right]$$

$$+ \frac{i}{2}(x|q|^{2} + \int_{0}^{x} |q|^{2}(t,\zeta)d\zeta + \nu) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \right]$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -tq'_{t} - (xq)'_{x}/2 \\ t(q^{*})'_{t} + (xq^{*})'_{x}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствием совместности на данном изомонодромном решении q(t,x) систем линейных ОДУ (13) и (15), (17) является тот факт, что, наряду с НУШ (10) q(t,x) удовлетворяет и нелинейному ОДУ

$$it[q_{xxx} + 6|q|^2 q_x] + \frac{xq_{xx}}{2} + q_x + x|q|^2 q +$$

$$+ (\nu + \int_0^x |q|^2 (t, \zeta) d\zeta) q = 0.$$
(18)

Аналогично, из совместности систем линейных ОДУ (14) и (15) следует, что q(t,x) удовлетворяет также нелинейному ОДУ по независимой переменной t. При этом $\det A_{-2}=\mathrm{const.}$ Исходя из асимптотик (12), находим, что в нашем случае

$$\det A_{-2} = \frac{a^3}{2}. (19)$$

6. Аналогии с поведением совместных решений линейных частей ОДУ (18) и НУШ (10) позволяют прийти к выводу о том, что при $-t\gg 1$ в области провала интенсивности $|q|^2$, которая расположена в областях $|x|>(18a)^{1/2}|t|^{2/3}$, асимптотика q(t,x) должна иметь вид

$$\frac{1}{t^{1/2}} \sum_{i=1}^{3} \beta_j \frac{|f_j(s)|^{3/2} \exp\left(iH_j(t,s)\right)}{|f_j(s)|^3 - d|^{1/2}} + \dots$$
 (20)

Здесь

$$H_j = t^{1/3} \left(s f_j(s) - f_j(s)^2 + \frac{d}{f_j(s)} \right) + \gamma_j \ln t + \alpha_j(s),$$

 $\beta_j,\,\gamma_j$ — постоянные, а функции $f_j(s)\,(f_1(s) < f_2(s) < < f_3(s))$ как и в асимптотиках некоторых линейных аналогов q(t,x) вида (16), вычисляемых согласно методу стационарной фазы [8], определяются из кубического уравнения $s-2f_j(s)-d/f_j^2(s)=0$.

Потребовав теперь, чтобы асимптотики (20) теряли пригодность на полукубической параболе (11), с необходимостью получаем, что в двух последних выделенных формулах $d = (2a)^{3/2}$. В свою очередь, из этого факта вытекает, что в (17) и (18)

$$\nu = 0. \tag{21}$$

При t=0 из ОДУ (18) и равенства (21) следует справедливость равенства $q_x'(0,0)=0$ и четность по x функции q(0,x). Рассматривая теперь последнюю в качестве начального данного при t=0 задачи Коши для НУШ (10), приходим к выводу о четности нашего решения q(t,x) по переменной x и при всех t.

По этой причине при x=0 условием совместности уравнений метода изомонодромных деформаций (ИДМ) (14) и (15), (17) является удовлетворение функцией q(t,0) нелинейному ОДУ

$$tq_{tt}'' + \frac{3q_t'}{2} = 2it|q|^2 q_t' + i|q|^2 q.$$
 (22)

Все гладкие решения $q(t,0)=r(t,0)\exp\left(\mathrm{i}\varphi(t,0)\right)$ этого ОДУ таковы, что r(t,0) и $\varphi_t'(t,0)$ четны по t. Следовательно, и при всех x функции r(t,x), $\varphi_t'(t,x)$ для данного совместного решения $q(t,x)=r(t,x)\exp\left(\mathrm{i}\varphi(t,x)\right)$ НУШ (10) и ОДУ (18) четны по переменной t. (Из справедливости НУШ (10) при t=0 выводим, что $\varphi_x'(0,x)r^2(0,x)=\mathrm{const.}$ Из этого же соотношения, из (21) и из ОДУ (18) следует, что $\varphi(0,x)=\varphi_0=\mathrm{const.}$ Далее, без ограничения общности, будем считать, что $\varphi_0=0$.)

Значит, вне малой окрестности точки фокуса (T_f, X_f) после критического момента $T = T_f$ при

некоторых конечных значениях $|X-X_f|^2+|T-T_f|^2$ соответствующие решения уравнения с малой дисперсией (3) вновь описываются квазиклассическим приближением (4), определяемым решениями системы (6). В данной области эти решения (6) некоторое время будут описывать расфокусирующиеся сгустки, асимптотика которых на сужающемся при $T \to T_f + 0$ промежутке ненулевой амплитуды также описывается формулами (7). Далее, естественно, ожидать, что по истечении некоторого времени эти сгустки вновь начнут сужаться и самофокусироваться. (Правда, в принципе, у соответствующих решений системы НГО за точками фокуса возможны [1–4] и другие особенности – см. также [25, 26] и ссылки в последней из этих работ.)

7. Так как $q(0,x)=r(0,x)\exp{(\mathrm{i}\varphi_0)}$, то в силу четности q(0,x), вида ОДУ (18) и равенств (19), (21) получаем, что r(0,x) при $x\to 0$ раскладывается в ряд

$$r(0,x) = (2a^3)^{1/2} - (2a^3)^{3/2} \frac{4x^2}{3} + \dots$$
 (23)

Поэтому интенсивности рассматриваемых решений (3) в фокальных точках (T_f,X_f) и пределы $R(T_f)=(2a)^{3/2}$ при $T\to T_f$ интегралов $R(T)=\int \rho(T,X)dX$ от интенсивностей соответствующих сгустков с асимптотиками (2) связаны соотношением $|G(T_f,X_f,\varepsilon)|^2=R^2(T_f)/(4\varepsilon^2)$.

Решение r(0,x) ОДУ (18) посредством замен

$$y = 2^{3/2} (2a^3)^{1/4} x^{1/2}, \quad r(0, x) = -2(2a^3)^{1/2} \frac{w_y'}{y}$$

выражается через четное по переменной y решение w(y) частного случая третьего уравнения Пенлеве $w''_{yy}+w'_y/y+\sin w=0$, удовлетворяющее условию $w(0)=\pi/2$. Из известной [27] (Теорема 14.6) асимптотики w(y) при $y\to\infty$ находим, что при $x\gg 1$

$$r(0,x) \approx \frac{h}{x^{3/4}} \sin\left(2(2a)^{3/4}x^{1/2} + b\ln x + c\right),$$
 (24)

где $h = (2a)^{3/8} \sqrt{\ln 2/\pi}, b = -\ln 2/(4\pi),$

$$c = \frac{\pi}{4} + \arg \Gamma \left(\frac{\mathrm{i} \ln 2}{2\pi} \right) - 7 \frac{(\ln 2)^2}{4\pi} - \frac{\ln 2 \ln(2a^3)}{8\pi}.$$

С учетом соотношения (19) из этой асимптотики следует, что при t=0 и $x\to\infty$

$$\int_{0}^{x} |q|^{2}(0,\zeta)d\zeta = (2a^{3})^{1/2} - \frac{h^{2}}{x^{1/2}} + O(x^{-1}).$$

Правая часть (24) задает главный член асимптотики при $x \to \infty$ описываемого изомонодромного решения НУШ и при любом фиксированном t.

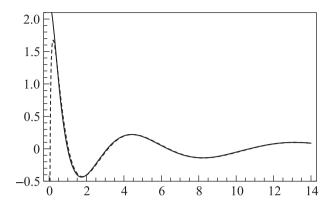


Рис. 1. Графики r(0,x) (сплошная линия) и правой части асимптотики (24) (штриховая линия) при $2a^3=5$

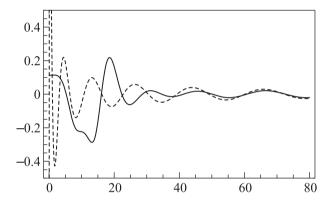


Рис. 2. Графики $r(t,x)\cos(\varphi(t,x))$ (сплошная линия) и правой части асимптотики (24) (штриховая линия) при $2a^3=5$ и t=12

Так что $\int_{-\infty}^{\infty} |q|^2(t,x)dx = 2(2a^3)^{1/2}$. Исходя из вида этого главного члена нетрудно явно выписать и правую часть асимптотики (20). В частности, в (20)

$$\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}}, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{\ln 2}{6\pi}.$$

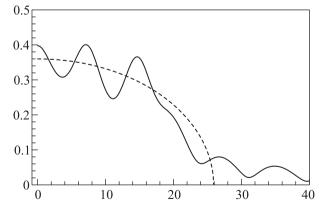


Рис. 3. Графики r(t,x) (сплошная линия) и главного члена второй из асимптотик (12) (штриховая линия) при $2a^3=5$ и t=12

8. При x=0 из четности по x нашего измонодромного решения q(x,t) следует, что пара совместных на решениях ОДУ (22) линейных уравнений ИДМ (14) и (15), (17), сводится к паре уравнений ИДМ из классической работы [28], условием совместности которой является удовлетворение функцией

$$\xi(t) = \frac{8t}{a^3} \left[t \varphi_t'(t,0) r^2(t,0) + \frac{\mathrm{i}}{2} (t r^2(t,0))_t' \right]$$

следующему случаю третьего уравнения Пенлеве:

$$\xi_{tt}'' = \frac{(\xi_t')^2}{\xi} - \frac{\xi_t'}{\xi} - \frac{a^3 \xi^2}{4t^2} + \frac{2i}{t} + \frac{16}{\xi}.$$
 (25)

Из соотношения (23) и четности функций r(t,0), $\varphi_t(t,0)$, можно, воспользовавшись результатами статьи [29], в явном виде выписать асимптотику $\xi(t)$ для больших значений -t. А из последней уже вытекает заключение о том, что при $|x|<(18a)^{1/2}|t|^{2/3}$ на фоне приближения НГО, задаваемых правыми частями (12), происходят малоамплитудные колебания с двумя фазами вида

$$t^{1/3}3h_j(s)\sqrt{h_j^2(s)-2a+s^2/9}+\mu_j\ln t,$$

где μ_i – постоянные, а

$$h_j^2(s) = 3a - \frac{s^2}{24} \pm \frac{s}{2}\sqrt{a + s^2/144}.$$

9. Характер этих колебаний и характер колебаний в асимптотике (20) качественно соответствуют выводам работ [17, 18], в которых описано влияние малой дисперсии на процессы провального самообострения импульсов приближения НГО.

Асимптотика q(t,x) в окрестности правой из кривых (11) описывается (также подобно тому как в [17, 18]) в терминах комплексных решений ОДУ $\omega_{zz}''+(|\omega|^2+z)\omega=0$ по переменной $z=(s-3\sqrt{2a})t^{2/9},$ которые стремятся к нулю при $z\to\infty$, и для которых при $z\to-\infty$ $|\omega(z)|\approx \sqrt{-z/2}.$ Формулой $f=(\ln\omega)_z'$ эти его решения задают [30] комплексные сингулярные решения второго уравнения Пенлеве $f_{zz}''=2f^3+2zf+\kappa,$ где $\kappa=\omega_z\omega^*-\omega_z^*\omega-1.$

Замечание 3. Аналогичным образом, вероятно (см. абзац после формулы (4.18) в статье [31]), подобная переходная область может быть описана и в пространственно многомерных случаях.

10. Автор выражает глубокую благодарность А.М. Камчатнову, по настоятельному совету которого, собственно, и было проведено исследование, являющееся предметом данной статьи. Он также признателен Д.П. Новикову за указание на то, что при x=0 и $q_x(t,0)=0$ уравнения (14),(15),(17) сводятся

к паре уравнений ИДМ для третьего уравнения Пенлеве (25) из [28], и А.В. Китаеву за консультации по поводу свойств соответствующего решения $\xi(t)$ этого уравнения (в особенности, за замечание о симметрии $\xi(t)$ по переменной t). Весьма полезными при написании данной статьи были обсуждения части ее результатов с Е.А. Кузнецовым и А.В. Михайловым. Численные эксперименты, результаты которых представлены на рис. 1–3, были проведены с помощью В.Ю. Новокшенова и О.А. Султанова.

- 1. А.В. Гуревич, А.Б. Шварцбург, ЖЭТФ **58**, 2012 (1970).
- 2. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, *Нелинейная теория* распространения радиоволн в ионосфере, Наука, М. (1973).
- 3. А.Б. Шварцбург, Геометрическая оптика в нелинейной теории волн, Наука, М. (1976).
- 4. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые* неустойчивые среды, Наука, М. (1991).
- 5. А. М. Ильин, Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, Наука, М. (1989).
- 6. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ 2, 218 (1965).
- E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, and I. A. Shimokhin, Physica D 87, 201 (1995).
- 8. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М. (1987).
- 9. А.В. Китаев, Записки ЛОМИ 187, 53 (1991).
- 10. Б. И. Сулейманов, Записки ЛОМИ 187, 110 (1991).
- 11. Б. И. Сулейманов, Мат. заметки 52, 182 (1992).
- 12. Б. И. Сулейманов, И. Т. Хабибуллин, ТМФ $\bf 97$, 213 (1993).
- 13. Б. И. Сулейманов, Письма в ЖЭТФ 58, 606 (1993).
- 14. Б. И. Сулейманов, ЖЭТФ 104, 1089 (1994).
- 15. V. R. Kudashev, arXiv preprint putt-soll 9404002. (1994)-arxiv.org.
- 16. A. V. Kitaev, J. Math. Phys. 35, 2934 (1994).
- 17. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, Письма в ЖЭТФ **62**, 358 (1995).
- 18. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов, ТМФ **118**, 413 (1999).
- 19. В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов, ПММ **65**, 456 (2001).
- 20. Р. Н. Гарифуллин, Б. И. Сулейманов, ЖЭТФ **137**, 149 (2010).
- 21. B. Dubrovin, Commun. in Math. Phys. 267, 117 (2006).
- 22. В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, ПМТФ ${f 2},\,40\,\,(1989).$
- 23. А. Р. Итс, Известия АН СССР 49, 530 (1985).
- 24. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
- B. Dubrovin, T. Grava, and C. Klein, J. Nonlinear Sc. 19, 57 (2009).

- 26. M. Bertola and A. Tovbis, Coom. Pure and Appl. Math. ${\bf 66},\,678$ (2013).
- 27. А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Рима*на, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск (2005).
- 28. R. Garnier, Ann. Sci. Ecole Norm. 29(4), 1 (1912).
- A. V. Kitaev and A. H. Vartanian, Inverse Problems 20, 1165 (2004).
- 30. M. Jimbo and T. Miwa, Physica D 2, 407 (1981).
- 31. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).