Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 8, стр. 409 – 412 *25 октября 1988 г.*

КОНФОРМНЫЕ БЛОКИ МИНИМАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.Герасимов, А.Морозов

С помощью бозонизованного расширения минимальных моделей построены прообразы конформных блоков для этих теорий.

1. В последнее время достигнут некоторый прогресс в изучении конформных теорий на произвольных замкнутых римановых поверхностях [1, 2]. Основными объектами в соответствующем исчислении являются "конформные блоки" – голоморфные сечения определенных расслоений над пространствами модулей, связанных с рассматриваемой теорией. В работах [1] обсуждаются некоторые общие свойства этих объектов, однако, за малыми исключениями, явные примеры конформных блоков пока неизвестны. Исключения исчерпываются минимальными моделями – известны корреляторы для рода 0 и характеры для рода 1 [3, 4], – b-, c-системами – известны корреляторы в случае произвольного рода, – и некоторыми простыми обобщениями типа торических и орбифольдных компактификаций.

В этом письме мы предлагаем воспользоваться процедурой бозонизации для минимальных моделей [5] с центральными зарядами $c = 1 - 24\alpha_0^2 = 1 - 6(m-n)^2/mn$ в случае произвольного рода, и с ее помощью построить выражения, которые могут послужить материалом для построения конформных блоков в этих теориях.

2. Размерности примарных полей в минимальных моделях $M_{n,\,m}$ (n, m – два взаимно простых положительных целых числа) даются формулой Каца

$$h_{r,\,s} = \frac{(mr - ns)^2 - (m-n)^2}{4mn} \tag{1}$$

при условиях $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant m-1$. Без этих условий и дополнительных ограничений на состояния высших уровней, следующих из существования нуль-векторов [3] (1) совпадает со спектром действительного бозонного поля ϕ, принимающего значения на окружности радиуса $R = \sqrt{2mn}$. Рассмотрим соответствующее струнное действие.

$$S = (2\pi)^{-1} \int d^2 z (\partial\phi\bar{\partial}\phi - {}^1/_2\, i\sqrt{2}\alpha_0\, \phi\sqrt{g}\mathcal{R}\,) \tag{2}$$

(g и $\mathcal{R}$ – метрика на мировом листе и ее кривизна). Значения поля ϕ и $\phi + 2\pi R$, $R = \sqrt{2mn}$ предполагаются тождественными. Тензор энергии-импульса равен $T_\phi = -{}^1/_2(\partial\phi)^2 - i\sqrt{2}\alpha_0\,\partial^2\phi$. Значение R определяется однозначностью $\exp(-S)$ при отождествлении ϕ и $\phi + 2\pi R$: надо учесть, что $(4\pi)^{-1} \int \sqrt{g}\, R = 2(p-1)$ – целое число для замкнутых и открытых римановых поверхностей. Первичные вертексные операторы имеют вид $|\alpha\rangle \sim \exp(i\sqrt{2}\alpha\phi)|0\rangle$, и условие однозначности при $R = \sqrt{2mn}$ разрешает α принимать значения вида $\alpha_{r,s} = \frac{1}{2}(r-1)\alpha_+ + \frac{1}{2}(s-1)\alpha_-$ с $\alpha_+ = \sqrt{m/n}$, $\alpha_- = -\sqrt{n/m}$ (т.е. $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2}$) и любыми целыми r, s. Размерности $\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$ этих операторов по отношению к T_ϕ даются формулой Каца (1).

Не представляет труда вычислить функциональный интеграл

$$\int D\phi e^{-S} \prod_i e^{i\sqrt{2}\alpha_i\phi(\xi_i)} \sim \left[\frac{\exp^{1/24cS_L}}{(\det\Delta_0)^{1/2}} \sum_{\vec{\delta}} |F_{\vec{\delta}}|^2\right] \delta\left(\Sigma\alpha_i + 2\alpha_0(p-1)\right) \qquad (3)$$

(вычисление ничем не отличается от проводимого в работах [6, 7]). В (3) S_L – действие Лиувилля, p – род мировой поверхности, а

$$F_{\vec{\delta}}\{\xi\} \sim \prod_{i<j} E(\xi_i\xi_j)^{2\alpha_i\alpha_j}\, \sigma_*(\xi_i)^{-4\alpha_i\alpha_0}\, \theta\left[\begin{matrix}\delta\\ 0\end{matrix}\right]\left(2\sqrt{mn}\left(\Sigma\alpha_i\vec{\xi}_i + 2\alpha_0\vec{\Delta}\right)\middle| 2mnT\right) F_* \qquad (4)$$

Буквально эта формула справедлива, когда метрика на мировой поверхности равна $g = |\nu_*|^4$, т. е. сингулярна и имеет двойные нули в точках $R^*_1, \ldots, R^*_{p-1}$. Через $E(\xi_i, \xi_j)$ в (4) обозначен бидифференциал Прима, $\sigma_*(\xi) \equiv \nu_*(\xi)/\prod_\alpha E(\xi, R^*_\alpha)$; $F_* \equiv \prod_{\alpha<\beta} E(R^*_\alpha, R^*_\beta)/\prod_\alpha \nu'_*(R^*_\alpha)$.

θ-функция в (4) имеет порядок $2mn$, а тета-характеристика $\vec{\delta}$ принимает значения в множестве $[\mathbb{Z}_{2mn} \equiv (2mn)^{-1}\mathbb{Z}(\mathrm{mod}\,2mn)]^{\otimes p}$. Выражения F_δ – это искомые прототипы конформных блоков. Отметим, что $F_{\vec{\delta}}\{\xi\}$ изменяются на фазовые множители при сдвигах ξ на A_M-периоды, а при сдвиге ξ_i на период B_M $F_{\vec{\delta}}$ превращается в другой конформный блок,

$$F[\delta_1 \ldots \delta_p] \to F[\delta_1 \ldots \delta_M + \frac{(r_i-1)m - (s_i-1)n}{2mn} \ldots \delta_p]. \qquad (5)$$

3. Разумеется, бозонизованная теория (2) – это больше, чем минимальная модель, для получения которой нужно еще наложить некоторые ограничения. Смысл их, однако, только в том, чтобы выделить **неприводимое** представление алгебры Вирасоро. Это линейная операция, и поэтому правильные конформные блоки являются линейными комбинациями $F_{\vec{\delta}}\{\xi\}$. На самом деле эта операция не вполне тривиальна, поскольку в тех случаях, когда возможно интегрирование по какому-то ξ_i, т. е. соответствующая размерность равна единице, оно также должно рассматриваться в числе линейных операций, необходимых для выделения неприводимого представления. Условие $\Sigma_i\alpha_i + 2\alpha_0(p-1) = 0$, возникающее из-за интегрирования по постоянной моде в (3), означает, что в киральной версии бозонизованной теории имеются нулевые моды – аналоги голоморфных дифференциалов. И с этой точки зрения для устранения нулевых мод естественно ввести в число первичных операторов в левой части (3) подходящее количество операторов размерности 1, $\exp i\sqrt{2}\alpha_\pm\phi$. Интегрируя по положению этих операторов вдоль нестягиваемых контуров, мы получим следующее приближение к конформным блокам теории. Истинные конформные блоки являются дискретными линейными комбинациями этих объектов. Они удовлетворяют уравнениям [2], вытекающим из условий существования нуль-векторов. Остановимся коротко на выводе этих уравнений в случае произвольного рода.

4. Рассмотрим корреляторы тензоров энергии-импульса минимальной модели, T, и ее бозонизованной версии (2) , T_ϕ :

$$G(\xi) \equiv \langle T(\xi) \rangle; \qquad G_\phi(\xi) \equiv \langle T_\phi(\xi) \rangle; \qquad G(\xi_1, \xi_2) \equiv \langle T(\xi_1) T(\xi_2) \rangle;$$
$$G_\phi(\xi_1, \xi_2) \equiv \langle T_\phi(\xi_1) T_\phi(\xi_2) \rangle: \tag{6}$$

Разность двух средних из первой строки является голоморфным квадратичным дифференциалом: гравитационная аномалия сокращается. Поэтому она равна линейной комбинации 2-дифференциалов $f_1(\xi) \ldots f_{3p-3}(\xi)$, связанных с модулями y_k, рассматриваемой поверхности: $g^{(1)}(\xi) \equiv G(\xi) - G_\phi(\xi) = \sum_{k=1}^{3p-3} a_k f_k(\xi)$. Коэффициенты a_k могут быть выражены через производные характера χ обсуждаемой теории:

$$\frac{\partial \ln \chi}{\partial y_k} = \int \langle T(\xi) \rangle \eta_k(\xi) \Rightarrow a_k = \sum_{l=1}^{3p-3} a_l \int f_l \eta_k = \frac{\partial \ln \chi}{\partial y_k} - \frac{\partial \ln \chi_\phi}{\partial y_k}.$$

Для дальнейших приложений к корреляторам более высокого порядка, заметим, что почти всюду на пространстве модулей голоморфные квадратичные дифференциалы являются билинейными комбинациями линейных, $f_k(\xi) = \sum_{\mu,\nu=1}^{p} F_{k\mu\nu}\, \omega_\mu(\xi) \omega_\nu(\xi)$. Поэтому

$$g^{(1)}(\xi) = \sum_{k=1}^{3p-3} a_k f_k(\xi) = \sum_{\mu,\nu=1}^{p} A_{\mu\nu}\, \omega_\mu(\xi)\omega_\nu(\xi); \quad A_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{3p-3} a_k F_{k\mu\nu}.$$

Это представление позволяет определить симметрический голоморфный (1,1)-бидифференциал $\tilde{g}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) \equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{p} A_{\mu\nu}\, \omega_\mu(\xi_1)\, \omega_\nu(\xi_2)$, который окажется полезным ниже.

В случае двухточечного коррелятора можно рассмотреть следующую безаномальную комбинацию:

$$g^{(2)}(\xi_1, \xi_2) \equiv G(\xi_1, \xi_2) - G(\xi_1)G(\xi_2) - G_\phi(\xi_1, \xi_2) + G_\phi(\xi_1) G_\phi(\xi_2).$$

Этот мероморфный квадратичный бидифференциал имеет полюса на диагонали, его сингулярная часть диктуется операторным разложением,

$$T(\xi_1) T(\xi_2) \sim \frac{c/2}{(\xi_1 - \xi_2)^4} + \frac{2T(^1/_2(\xi_1 + \xi_2))}{(\xi_1 - \xi_2)^2} + 0(1).$$

Из этого следует, что

$$g^{(2)}(\xi_1, \xi_2) \sim \frac{2g^{(1)}(^1/_2(\xi_1 + \xi_2))}{(\xi_1 - \xi_2)^2} + O(1) \sim \frac{2\tilde{g}^{(1)}(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)^2} + O(1),$$

и поэтому (2,2)-бидифференциал $g^{(2)}(\xi_1, \xi_2) = 2\omega(\xi_1, \xi_2)\tilde{g}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \sum_{k,l=1}^{3p-3} a_{kl} f_k(\xi_1) f_l(\xi_2)$.

Здесь через $\omega(\xi_1, \xi_2) \equiv \partial^2 \ln E(\xi_1, \xi_2) / \partial\xi_1 \partial\xi_2$ обозначен стандартный симметричный (1,1)-бидифференциал с полюсом второго порядка на диагонали. Коэффициенты a_{kl} могут быть выражены через производные характера $\partial^2 \ln \chi / \partial y_k \partial y_l$ и $\partial \ln \chi / \partial y_k \cdot \partial \ln \chi / \partial y_l$.

Таким образом можно рекуррентно определить все многоточечные корреляторы T в терминах χ .

Минимальная модель задается конкретным условием существования "нулевого вектора", которое может быть записано как уравнение на средние тензора энергии-импульса и его производных в совпадающих точках:

$$\langle P(T) \rangle (\xi) = 0 \tag{7}$$

(например, для $M_{2,5}$ $P(T) = \partial^2 T - (10/3)\, T^2$ [2]). После подстановки найденных выражений для корреляторов T в [7] возникает однородное уравнение на характер χ . (7) является голоморфным дифференциалом по ξ и может быть разложено по базису соответствующих дифференциалов. В результате получается конечный набор уравнений, предложенный Замолодчиковым в [2]. Различные решения этих уравнений являются различными характерами теории. Аналогично выводятся уравнения для произвольных конформных блоков. Для такого вывода знание бозонизованной теории полезно, но не необходимо. Истинная польза состоит в том, что бозонные блоки (4) образуют узкий класс сечений, среди линейных комбинаций которых (включая интегральные комбинации) находятся до сих пор неизвестные (для $p \geqslant 2$) решения уравнений Замолодчикова. (Известные формулы для однопетлевых характеров [4], естественно, удовлетворяют этим уравнениям).

Было бы очень интересно сделать следующий шаг и в другом направлении – бозонизовать таким же "избыточным" образом любые конформные теории. Для этого имеет смысл рассмотреть более сложные компактификации (например, орбифольдного типа). В определенном смысле это дало бы возможность единого описания конформных теорий, не требующую классификации неприводимых представлений алгебры Вирасоро.

Авторы признательны Ал.Замолодчикову, А.Рослому и В.Фатееву за обсуждения.

Литература

1. *Friedan D., Shenker S.* Nucl. Phys. B, 1987, **281**, 509; *Verlinde E.* Preprint THU-88/17; *Vafa C.* Preprint HUTP-88/A011; *Moore G., Seiberg N.* Preprint IASSNS-HEP-88/18.
2. *Zamolodchikov Al.* Preprint ITEP-88.
3. *Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.* Nucl. Phys. B, 1984, **241**, 3.
4. *Rocha-Caridi A.* In: "Vertex Operators in Mathematics and Physics" Springer, N.Y., 1984; *Itzykson C., Zuber J.* Nucl. Phys. B, 1987, **280**, 445; *Gepner D.* Nucl. Phys. B, 1987, **287**, 111.
5. *Dotsenko V., Fateev V.* Nucl. Phys. B, 1984, **240**, 312.
6. *Knizhnik V.* Phys. Lett. B, 1986, **180**, 247.
7. *Alvarez-Gaume L., Bost J., Moore G. et al.* Comm. Math. Phys., 1987, **112**, 503. *Olshanetsky M. et al.* Nucl. Phys. B, 1988, **299**, 389.

Институт теоретической и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 августа 1988 г.