

# Структура энергетических потоков в топологических трехмерных диссипативных солитонах<sup>1)</sup>

С. В. Федоров<sup>+</sup>, Н. Н. Розанов<sup>+\*#2)</sup>, Н. А. Веретенов<sup>++\*</sup>

<sup>+</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), 197101 Санкт-Петербург, Россия

<sup>\*</sup> Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова, 199053 Санкт-Петербург, Россия

<sup>#</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 9 января 2018 г.

После переработки 12 января 2018 г.

На примере трехмерных диссипативных оптических солитонов с одной незамкнутой и одной замкнутой линиями дислокаций волнового фронта выявлена внутренняя структура топологических диссипативных солитонов, проявляющаяся в наличии особых точек, линий и поверхностей в поле потоков электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга). Сохранение топологических признаков таких солитонов, которые могут формироваться в однородной лазерной среде с насыщающимся усилением и поглощением или в лазерах с достаточно большими продольным и поперечными размерами, предоставляет дополнительные возможности для информационных приложений.

DOI: 10.7868/S0370274X18050132

Существование топологических солитонов со сложной внутренней структурой, таких как узловые, было предсказано Л.Д. Фаддеевым [1] применительно к консервативным системам. Дальнейшие исследования выявили существование подобных многокомпонентных солитонов в широком круге консервативных физических систем – различных типах конденсата Бозе–Эйнштейна, в плазме, жидких кристаллах и сверхпроводимости [2–6]. Эксперименты с топологическими солитонами пока немногочисленны; в дополнение к цитированным в [7–9], укажем анализ структур в сверхпроводящем <sup>3</sup>He во вращающемся сосуде [10], хотя эта система и не обладает пространственной однородностью. В то же время диссипативные солитоны, локализация поля в которых обеспечивается балансом притока и оттока энергии или вещества, отличаются от консервативных солитонов значительно большей устойчивостью и разнообразием структур. При этом диссипативные солитоны более просто могут быть сформированы в нелинейно-оптических и лазерных системах, перспективных для информационных приложений [7]. Нетривиальные диссипативные топологические трехмерные солитоны, включая узловые, недавно были найдены численным модели-

рованием в [8, 9]. Так, в [9] обнаружен новый класс топологических диссипативных оптических солитонов с несколькими замкнутыми и незамкнутыми вихревыми линиями (на которых поле обращается в нуль), что отвечает топологии тэнглов (запутанных клубков) [11]. Задачей настоящего сообщения служит выявление внутренней структуры таких солитонов на основании анализа потоков энергии, играющих принципиальную роль в особенности для диссипативных солитонов.

Моделью служит однородная однокомпонентная среда с безынерционным насыщением усиления и поглощения или же лазер с быстро насыщающимся поглощением, обладающий достаточно большими размерами. Излучение считаем квазимонохроматическим с поляризацией, близкой к линейной, распространяющимся преимущественно вдоль оси  $z$  с угловой расходимостью, близкой к дифракционной. Уравнение для медленно меняющейся огибающей поля  $E$  в безразмерных единицах имеет вид [7–9]:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ (i + d_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 + (i + d_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E + f_{nl}(|E|^2)E. \quad (1)$$

Здесь  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – поперечный лапласиан,  $x$  и  $y$  – поперечные координаты,  $\tau = t - z/v_g$  – время в сопровождающей системе координат, движущейся вдоль оси  $z$  с групповой скоростью  $v_g$ ,  $t$  –

<sup>1)</sup> См. доп. материалы к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)

<sup>2)</sup> e-mail: nnrosanov@mail.ru

время в лабораторной системе координат. “Коэффициенты диффузии”  $d_{\parallel}$  и  $d_{\perp}$ ,  $0 < d_{\perp, \parallel} \ll 1$ , описывают ширину спектрального контура ( $d_{\parallel}$ ) и дихроизм – угловую селективность ( $d_{\perp}$ ) линейного усиления/поглощения. Наконец, отражающая баланс потерь и усиления функция интенсивности излучения  $I = |E|^2$ ,

$$f_{ni}(I) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + \frac{g_0}{1+I/\beta}, \quad (2)$$

отвечает двухуровневым схемам для усиления и поглощения при нулевой частотной расстройке. В (2)  $g_0$  и  $a_0$  – коэффициенты ненасыщенного усиления и поглощения, а  $\beta$  – отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения. При равенстве коэффициентов диффузии  $d_{\perp} = d_{\parallel} \equiv d$  в (1) фигурирует единый трехмерный лапласиан  $\nabla_{\mathbf{r}}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial \tau^2$  в изотропном трехмерном пространстве  $\mathbf{r} = (x, y, \tau)$ :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (i + d)\nabla_{\mathbf{r}}^2 E + f_{ni}(|E|^2)E. \quad (3)$$

Потоки электромагнитной энергии в принятом квазиоптическом приближении определяются вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = \text{Im}[E^* \nabla E] = I \nabla \Phi$ , где  $\Phi = \text{arg } E$  – фаза поля; здесь и далее опускаем нижний индекс у оператора  $\nabla_{\mathbf{r}}$ . Линии потока энергии, касательная к которым в каждой точке совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{S}$ , при фиксированном  $z$  определяются уравнениями  $dx/S_x = dy/S_y = d\tau/S_{\tau}$ . Особые элементы этих динамических уравнений определяются условиями  $S_x(x, y, \tau) = 0$ ,  $S_y(x, y, \tau) = 0$ ,  $S_{\tau}(x, y, \tau) = 0$ . Для фундаментальных солитонов, интенсивность  $I$  которых отлична от нуля на любых конечных расстояниях от центральной области, особенности возникают лишь при нулевом градиенте фазы,  $\nabla \Phi = 0$  [7, 12]. Последнее равенство в общем случае удовлетворяется в изолированных точках пространства  $\mathbf{r}$ . В отличие от них, для топологических солитонов особенности возникают и при условии нулевой интенсивности,  $I = 0$ , или же  $\text{Re } E = \text{Im } E = 0$  (в общем случае вихревые линии в пространстве  $\mathbf{r}$ ).

На рис. 1 показаны области локализации (a), (c), (e), (f) и вихревые линии (b), (d), (g) солитонов следующих типов: (a), (b) – “прецессор” с единственной искривленной незамкнутой вихревой линией [8], (c), (d) – осесимметричное и (e) – асимметричное “яблоко” с прямой незамкнутой и замкнутой вихревыми линиями [9], (f), (g) – асимметричное “яблоко” с искривленной незамкнутой вихревой линией. В последней структуре, полученной нами в определенной области параметров – “штопорном” солитоне, – про-

исходит нелинейная стабилизация изгибной неустойчивости незамкнутой вихревой линии, причем эта линия непрерывно совершает “штопорные” движения [13].

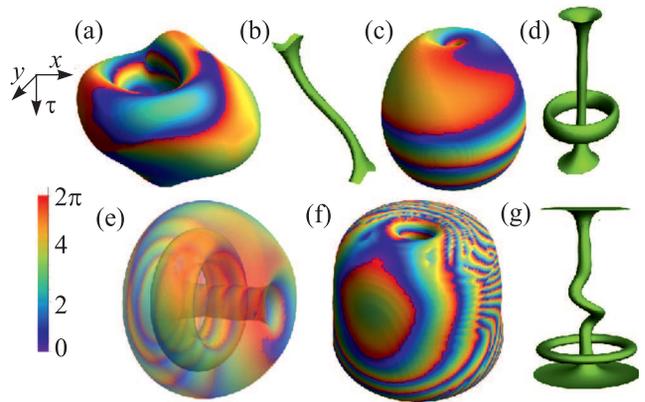


Рис. 1. (Цветной онлайн) Поверхности изоинтенсивности рассматриваемых солитонов по уровню  $I/I_{\text{max}} = 0.05$  на (a), (c), (e), (f) и  $0.15$  на (b), (d), (g). Шкала внизу слева характеризует фазу поля на поверхности постоянной интенсивности.  $\beta = 10$ ,  $a_0 = 2$ ,  $g_0 = 2.11$  (c, d, e),  $2.127$  (f, g),  $2.135$  (a, b),  $d = 0.06$  (a–d),  $0.05$  (f, g) и  $d_{\perp} = 0.05$ ,  $d_{\parallel} = 0.032$  (e)

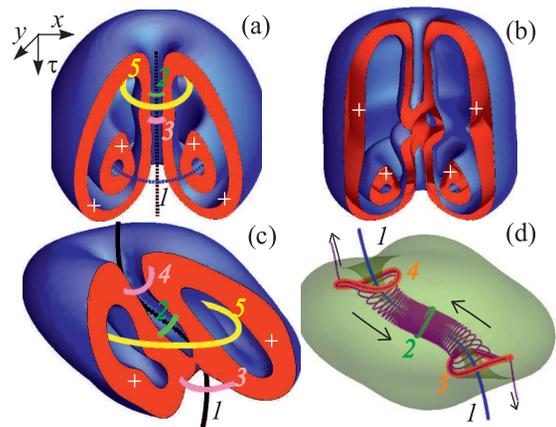


Рис. 2. (Цветной онлайн) Области источников ( $\nabla \cdot \mathbf{S} > 0$ , красный цвет, знак +) и стоков ( $\nabla \cdot \mathbf{S} < 0$  – синий цвет) энергии для осесимметричного (a) и асимметричного (b) “яблока”, и “прецессора” (c), (d). Замкнутые траектории на (a) и/или (c): вихревые линии 1, седловой 2, отталкивающие, неустойчивые 3, 4, и притягивающий, устойчивый 5 предельные линии. (d) – вихревая линия 1, предельные линии 2–4 и спираль на сепаратрисной поверхности, разделяющей области притяжения вихревой линии и отдаляющихся от нее линий потока энергии. Стрелки показывают направление тангенциальной составляющей потока энергии вблизи линии 1. Параметры те же, что на рис. 1

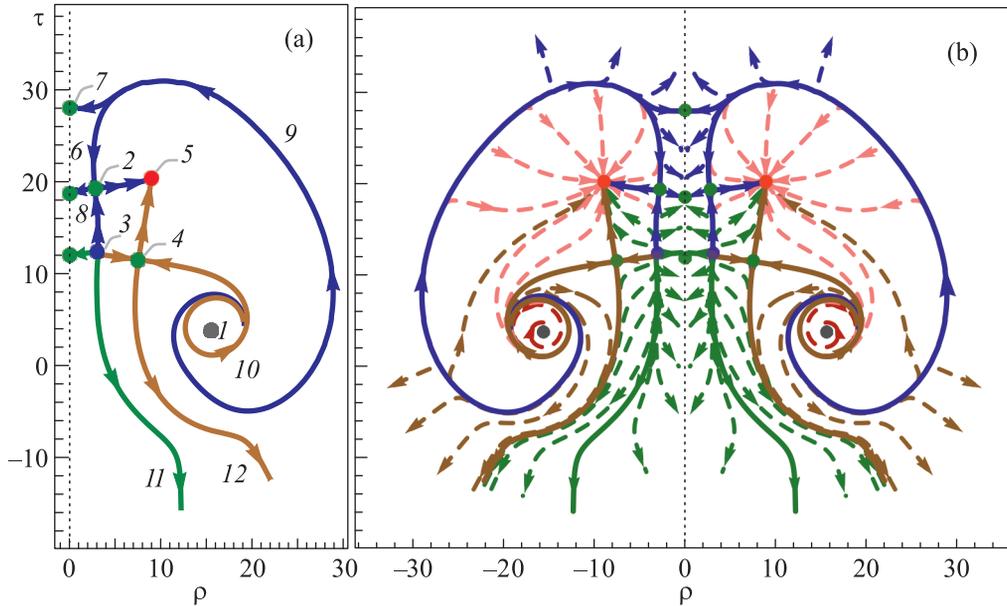


Рис. 3. (Цветной онлайн) Особые элементы фазовой плоскости (а) и “рядовые” линии потоков энергии (б), демонстрирующие характер особых элементов для осесимметричного “яблока”. Вертикальная пунктирная прямая  $\rho = 0$  указывает вихревую линию. На ней расположены 3 вырожденные особые точки: устойчивый узел 6 и два седла 7, 8. Близкие сепаратрисы 9, выходящие из неустойчивого предельного цикла 10 и попадающие в седла 2, 4 и 7, разделяют ограниченную область с траекториями, локализованными внутри солитона, и область траекторий, уходящих на периферию. 1 – устойчивый фокус, 5 – устойчивый узел. Неограниченная сепаратриса 11 отделяет траектории, уходящие на периферию вблизи вихревой линии, от приближающихся к “притягивающей” линии 12

Локальной характеристикой структуры солитонов служит знак дивергенции потока энергии: для источников поля  $\nabla \cdot \mathbf{S} > 0$ , а для стоков  $\nabla \cdot \mathbf{S} < 0$ . Как видно из рис. 2, границы раздела областей источников и стоков энергии тороидальны. Для “прецессона” источники расположены внутри единственной области – полом тороиде, а для “яблока” – в двух полых тороидах.

Более полно внутренняя структура солитонов характеризуется топологией линий потока энергии (нелокальные характеристики). Ориентацию линий определяем по знаку их (единичного) топологического заряда  $m$  (при движении вдоль линии или в малой окрестности вокруг нее в направлении ориентации фаза поля возрастает). В случае осесимметричного “яблока” поле представляется как  $E = A(\rho, \tau) \exp(im\varphi + iq_z z)$ , где  $\tau' = \tau - \nu_\tau z$ ,  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $m = \pm 1$  (штрих далее опускаем,  $\nu_\tau$  и  $q_z$  – постоянные). Тогда фазовое пространство  $(\rho, \tau)$  потоков энергии двумерно и уравнения для линий потока имеют вид

$$\frac{d\rho}{dl} = S_\rho(\rho, \tau), \quad \frac{d\tau}{dl} = S_\tau(\rho, \tau). \tag{4}$$

Эволюционная переменная  $l$  имеет смысл длины линии от некоторой произвольной точки со знаком +

или – в зависимости от того, совпадает ли движение вдоль линии с ее ориентацией. Структуру фазовой плоскости уравнений (4) определяют особые точки, в которых  $S_\rho = S_\tau = 0$ , сепаратрисы седел и предельные циклы (замкнутые линии) [14].

На рис. 3а показаны 5 изолированных особых точек: “устойчивый” (по отношению к увеличению длины  $l$ ) фокус 1, устойчивый и неустойчивый узлы 5 и 3, седла 2 и 4, их сепаратрисы и единственный “неустойчивый” предельный цикл 10. Особого рассмотрения требует сплошная линия особых точек  $\rho = 0$ , совпадающая с незамкнутой вихревой линией. В ее окрестности амплитуда поля  $A$  разлагается в ряд по нечетным степеням радиуса:  $A = \rho f(\tau) - \rho^3 g(\tau) + \dots$ . В низшем по  $\rho$  порядке

$$S_\rho = -\rho^3 F_\rho(\tau), \quad S_\tau = -\rho^2 F_\tau(\tau). \tag{5}$$

В области локализации поля функция  $F_\rho(\tau) = 2\text{Im}(f^*g) > 0$ , а  $F_\tau(\tau) = \text{Im}(f^*df/d\tau)$  трижды меняет знак,  $F_\tau(\tau_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ . В окрестности  $n$ -го нуля положим  $F_\rho(\tau) = F_\rho(\tau_n)$ ,  $F_\tau(\tau) = F'_\tau(\tau_n)(\tau - \tau_n)$ . Тогда для линии с начальными значениями  $(\rho_0, \tau_0)$

$$\rho(\tau) = \rho_0 \left| \frac{\tau - \tau_n}{\tau_0 - \tau_n} \right|^{F_\rho(\tau_n)/F'_\tau(\tau_n)}. \tag{6}$$

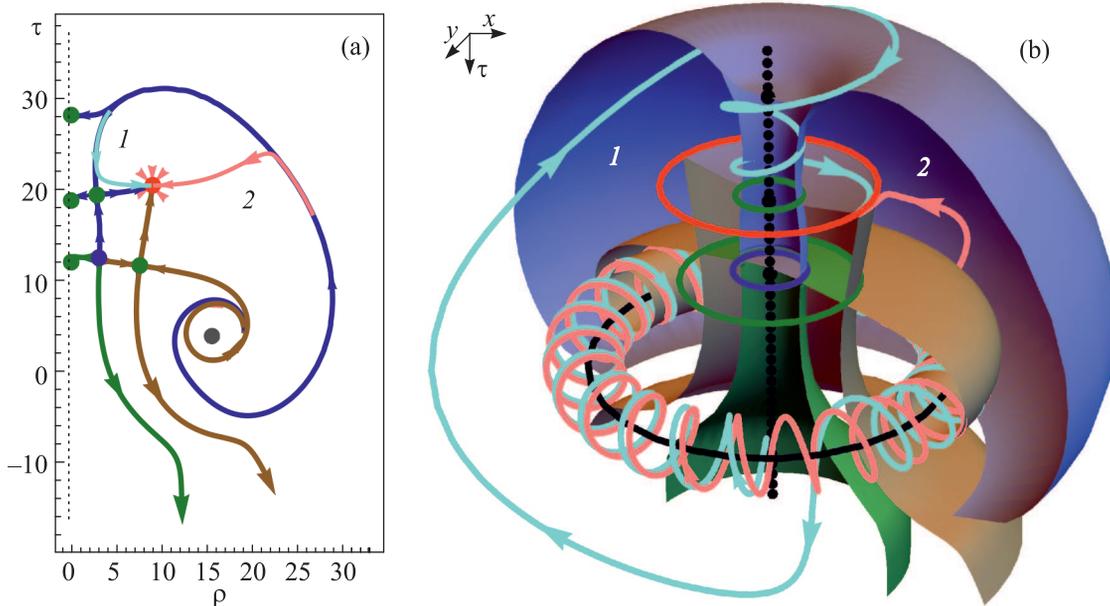


Рис. 4. (Цветной онлайн) Преобразование фазовой полуплоскости рис. 3а в 3D-фазовое пространство потоков энергии (а, б) за счет вращения элементов (а) вокруг оси  $\tau$ . В разрезе (б) показаны особые поверхности, разделяющие линии потока энергии с качественно различающимся поведением. Они получены вращением вокруг оси  $\tau$  особых линий рис. 3а: предельного цикла 10 и сепаратрис, как приходящих в седла 2, 4, 7 из предельного цикла, так и соединяющих седла 3, 8, седла и узлы 2, 6, 2, 5, 3, 4, 4, 5, и уходящих на периферию сепаратрисы 11 и линии 12. След вращения предельного цикла образует полый тороид, а след сепаратрис формируют цилиндрические поверхности (б). Линии 1 и 2 – общего положения, иллюстрируют сильную связь локализованных и уходящих на периферию потоков энергии

Из (6) следует, что при  $F'_\tau(\tau_n) > 0$  линия входит в вырожденную особую точку ( $\rho(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \tau_n$ ), что отвечает на рис. 3а устойчивому узлу 6. Если  $F'_\tau(\tau_n) < 0$ , то при  $\tau \rightarrow \tau_n$  линия удаляется от особой точки, что реализуется для вырожденных седел 7 и 8 на рис. 3а.

Еще одной представленной на рис. 3а особенностью фазовой плоскости являются исходящие из неустойчивого предельного цикла и входящие в седла (2), (4) и (7) сепаратрисы. Они, вместе с вихревой линией и не показанной на рис. 3а линией, исходящей из неустойчивого предельного цикла и разделяющей траектории, приближающиеся при  $l \rightarrow +\infty$  либо к вихревой линии при  $\tau \rightarrow +\infty$ , либо к линии 12, полностью определяют разбиение фазовой плоскости на ячейки с качественно различающимся поведением линий потока энергии.

Использование осевой симметрии солитона-“яблока” с привлечением дополнительного к (4) уравнения для угловой координаты  $\varphi$ ,  $d\varphi/dl = \rho^{-2}I(\rho, \tau)$ , позволяет получить и трехмерное фазовое пространство потоков энергии. Как показано на рис. 4, при вращении элементов (а) вокруг оси  $\tau$  след 2D-предельного цикла образует полый тороид, а сепаратрисы, исходящие из предельного цикла, формируют цилиндрические поверхности (б). Линии 1 и 2 (б) – общего положения, они иллюстрируют сильную связь локализованных и уходящих на периферию потоков энергии. След от вращения изолированных особых точек у “яблока” дает 5 замкнутых линий (колец) (см. рис. 4б и 2а). Для “прецессона” часть таких замкнутых линий (4) приведена на рис. 2с. На указанной на рис. 2d сепаратрисной поверхности “прецессона” имеются три замкнутых (предельных, 3D-аналоги 2D-предельных циклов) линии (2, 3 и 4 на рис. 2с), отвечающие трем вырожденным особым точкам на вихревой линии. Центральная из них совпадает с центром симметрии инверсии поля. Вблизи вихревой линии тангенциальная составляющая потока энергии направлена так же, как для “яблока”. Вихревую линию окружает поверхность с неустойчивыми замкнутыми траекториями 3 и 4 на рис. 2d, которая ограничивает область траекторий, уходящих на периферию вблизи незамкнутой вихревой линии. В центре поверхности, вблизи линии “седловой” замкнутой линии 2, шаг спиральных линий потока уменьшается до нуля.

Таким образом, в данной работе найден новый тип устойчивого топологического лазерного солитона с необычным “штопорным” движением вихревой

линии (рис. 1f, g, рис. 2b и анимация [13]). Выявлена внутренняя структура солитонов с одной незамкнутой вихревой линией. Незамкнутая вихревая линия является аттрактором: все линии потока энергии внутри окружающей эту вихревую линию сепаратрисной поверхности приближаются к вихревой линии при  $l \rightarrow \infty$ . По-видимому, наличие трех вырожденных точек на незамкнутой вихревой линии служит общим свойством подобных устойчивых солитонов. Если представить структуру с единственной вырожденной точкой на незамкнутой вихревой линии, то она будет неустойчивой: исходящие из центра потоки не скомпенсированы, что приведет к расширению структуры.

В отсутствие замкнутых вихревых линий потоки энергии разделяются поверхностью типа искривленного цилиндра на наматывающиеся на вихревую линию и уходящие на периферию вне ее окрестности. При наличии дополнительной замкнутой вихревой линии (“яблоко”) в фазовом пространстве потоков энергии возникают дополнительные разделяющие поверхности, как замкнутые тороиды, так и незамкнутые, уходящие на периферию солитона. Наличие линий потока энергии, закручивающихся вблизи и незамкнутой, и замкнутой вихревых линий, подчеркивает их сильную связь, обеспечивающую повышенную устойчивость исследуемых топологических солитонов.

Результаты работы получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого ([www.scc.spbstu.ru](http://www.scc.spbstu.ru)). Исследование отвечает плану работ по гранту РФФИ 18-12-00075.

1. L. D. Faddeev, *Quantization of solitons*, Princeton preprint IAS-75-QS70, Institute for Advanced Study, Princeton (1975).
2. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, *Nature* **387**, 58 (1997).
3. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3416 (2000).
4. E. Babaev, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 177002 (2002).
5. J. Garaud, J. Carlstrom, and E. Babaev, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 197001 (2011).
6. Y.-C. Zhang, Z.-W. Zhou, B. A. Malomed, and H. Pu, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 253902 (2015).
7. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит (2011).
8. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 183901 (2016).
9. N. A. Veretenov, S. V. Fedorov, and N. N. Rosanov, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 263901 (2017).
10. V. M. H. Ruutu, Ü. Parts, J. H. Koivuniemi, M. Krusius, E. V. Thuneberg, and G. E. Volovik, *Pis'ma v ZhETF* **60**, 659 (1994).
11. A. Kawachi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhauser Verlag (1996).
12. Н. А. Калитеевский, Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, *Опт. спектроск.* **85**, 1394 (1998) [N. A. Kaliteevskii, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, *Opt. Spectrosc.* **85**, 485 (1998)].
13. См. Дополнительный материал с анимацией формирования и установления линии нулей у “штопорного солитона” – асимметричного “яблока” по адресу [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru);  $d = 0.05$ ,  $g_0 = 2.127$
14. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, И. И. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука (1966).