Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 5, с. 342 – 346

Структура энергетических потоков в топологических трехмерных диссипативных солитонах[1)]

С. В. Федоров[+], *Н. Н. Розанов*[+*#2)], *Н. А. Веретенов*[+*]

[+] *Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), 197101 Санкт-Петербург, Россия*

[*] *Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова, 199053 Санкт-Петербург, Россия*

[#] *Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, 194021 Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 9 января 2018 г.

После переработки 12 января 2018 г.

На примере трехмерных диссипативных оптических солитонов с одной незамкнутой и одной замкнутой линиями дислокаций волнового фронта выявлена внутренняя структура топологических диссипативных солитонов, проявляющаяся в наличии особых точек, линий и поверхностей в поле потоков электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга). Сохранение топологических признаков таких солитонов, которые могут формироваться в однородной лазерной среде с насыщающимися усилением и поглощением или в лазерах с достаточно большими продольным и поперечными размерами, предоставляет дополнительные возможности для информационных приложений.

DOI: 10.7868/S0370274X18050132

Существование топологических солитонов со сложной внутренней структурой, таких как узловые, было предсказано Л.Д. Фаддеевым [1] применительно к консервативным системам. Дальнейшие исследования выявили существование подобных многокомпонентных солитонов в широком круге консервативных физических систем – различных типах конденсата Бозе–Эйнштейна, в плазме, жидких кристаллах и сверхпроводимости [2–6]. Эксперименты с топологическими солитонами пока немногочисленны; в дополнение к цитированным в [7–9], укажем анализ структур в сверхпроводящем [3]Не во вращающемся сосуде [10], хотя эта система и не обладает пространственной однородностью. В то же время диссипативные солитоны, локализация поля в которых обеспечивается балансом притока и оттока энергии или вещества, отличаются от консервативных солитонов значительно большей устойчивостью и разнообразием структур. При этом диссипативные солитоны более просто могут быть сформированы в нелинейно-оптических и лазерных системах, перспективных для информационных приложений [7]. Нетривиальные диссипативные топологические трехмерные солитоны, включая узловые, недавно были найдены численным моделированием в [8, 9]. Так, в [9] обнаружен новый класс топологических диссипативных оптических солитонов с несколькими замкнутыми и незамкнутыми вихревыми линиями (на которых поле обращается в нуль), что отвечает топологии тэнглов (запутанных клубков) [11]. Задачей настоящего сообщения служит выявление внутренней структуры таких солитонов на основании анализа потоков энергии, играющих принципиальную роль в особенности для диссипативных солитонов.

Моделью служит однородная однокомпонентная среда с безынерционным насыщением усиления и поглощения или же лазер с быстро насыщающимся поглощением, обладающий достаточно большими размерами. Излучение считаем квазимонохроматическим с поляризацией, близкой к линейной, распространяющимся преимущественно вдоль оси z с угловой расходимостью, близкой к дифракционной. Уравнение для медленно меняющейся огибающей поля E в безразмерных единицах имеет вид [7–9]:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[(i + d_\perp)\nabla_\perp^2 + (i + d_\parallel)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right] E + + f_{nl}(|E|^2)E. \quad (1)$$

Здесь $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – поперечный лапласиан, x и y – поперечные координаты, $\tau = t - z/v_g$ – время в сопровождающей системе координат, движущейся вдоль оси z с групповой скоростью v_g, t –

[1)] См. доп.материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[2)] e-mail: nnrosanov@mail.ru

время в лабораторной системе координат. “Коэффициенты диффузии” $d_\parallel$ и $d_\perp$, $0 < d_{\perp,\parallel} \ll 1$, описывают ширину спектрального контура ($d_\parallel$) и дихроизм – угловую селективность ($d_\perp$) линейного усиления/поглощения. Наконец, отражающая баланс потерь и усиления функция интенсивности излучения $I = |E|^2$,

$$f_{nl}(I) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + \frac{g_0}{1+I/\beta}, \tag{2}$$

отвечает двухуровневым схемам для усиления и поглощения при нулевой частотной расстройке. В (2) g_0 и a_0 – коэффициенты ненасыщенного усиления и поглощения, а β – отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения. При равенстве коэффициентов диффузии $d_\perp = d_\parallel \equiv d$ в (1) фигурирует единый трехмерный лапласиан $\nabla^2_{\mathbf{r}} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial \tau^2$ в изотропном трехмерном пространстве $\mathbf{r} = (x, y, \tau)$:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (i + d)\nabla^2_{\mathbf{r}} E + f_{nl}(|E|^2)E. \tag{3}$$

Потоки электромагнитной энергии в принятом квазиоптическом приближении определяются вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathrm{Im}[E^*\nabla E] = I\nabla\Phi$, где $\Phi = \arg E$ – фаза поля; здесь и далее опускаем нижний индекс у оператора $\nabla_{\mathbf{r}}$. Линии потока энергии, касательная к которым в каждой точке совпадает по направлению с вектором $\mathbf{S}$, при фиксированном z определяются уравнениями $dx/S_x = dy/S_y = d\tau/S_\tau$. Особые элементы этих динамических уравнений определяются условиями $S_x(x, y, \tau) = 0$, $S_y(x, y, \tau) = 0$, $S_\tau(x, y, \tau) = 0$. Для фундаментальных солитонов, интенсивность I которых отлична от нуля на любых конечных расстояниях от центральной области, особенности возникают лишь при нулевом градиенте фазы, $\nabla\Phi = 0$ [7, 12]. Последнее равенство в общем случае удовлетворяется в изолированных точках пространства $\mathbf{r}$. В отличие от них, для топологических солитонов особенности возникают и при условии нулевой интенсивности, $I = 0$, или же $\mathrm{Re}\,E = \mathrm{Im}\,E = 0$ (в общем случае вихревые линии в пространстве $\mathbf{r}$).

На рис. 1 показаны области локализации (a), (c), (e), (f) и вихревые линии (b), (d), (g) солитонов следующих типов: (a), (b) – “прецессон” с единственной искривленной незамкнутой вихревой линией [8], (c), (d) – осесимметричное и (e) – асимметричное “яблоко” с прямой незамкнутой и замкнутой вихревыми линиями [9], (f), (g) – асимметричное “яблоко” с искривленной незамкнутой вихревой линией. В последней структуре, полученной нами в определенной области параметров – “штопорном” солитоне, – происходит нелинейная стабилизация изгибной неустойчивости незамкнутой вихревой линии, причем эта линия непрерывно совершает “штопорные” движения [13].

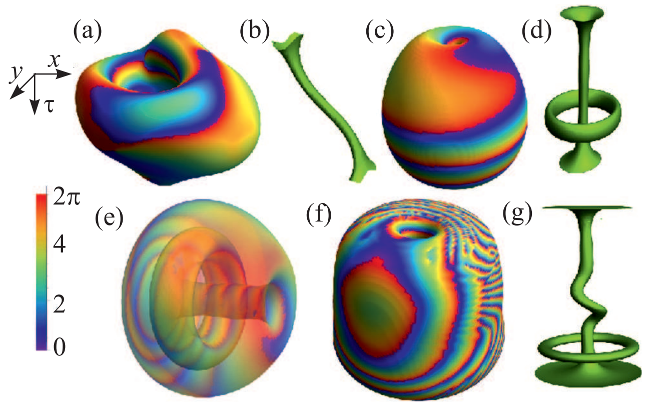

Рис. 1. (Цветной онлайн) Поверхности изоинтенсивности рассматриваемых солитонов по уровню $I/I_{\max} = 0.05$ на (a), (c), (e), (f) и 0.15 на (b), (d), (g). Шкала внизу слева характеризует фазу поля на поверхности постоянной интенсивности. $\beta = 10$, $a_0 = 2$, $g_0 = 2.11$ (c, d, e), 2.127 (f, g), 2.135 (a, b), $d = 0.06$ (a–d), 0.05 (f, g) и $d_\perp = 0.05$, $d_\parallel = 0.032$ (e)

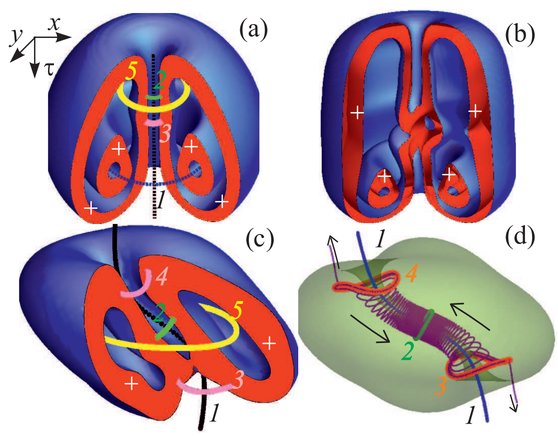

Рис. 2. (Цветной онлайн) Области источников ($\nabla \cdot \mathbf{S} > 0$, красный цвет, знак +) и стоков ($\nabla \cdot \mathbf{S} < 0$ – синий цвет) энергии для осесимметричного (a) и асимметричного (b) “яблока”, и “прецессона” (c), (d). Замкнутые траектории на (a) и/или (c): вихревые линии *1*, седловой *2*, отталкивающие, неустойчивые *3*, *4*, и притягивающий, устойчивый *5* предельные линии. (d) – вихревая линия *1*, предельные линии *2*–*4* и спираль на сепаратрисной поверхности, разделяющей области притяжения вихревой линии и отдаляющихся от нее линий потока энергии. Стрелки показывают направление тангенциальной составляющей потока энергии вблизи линии *1*. Параметры те же, что на рис. 1

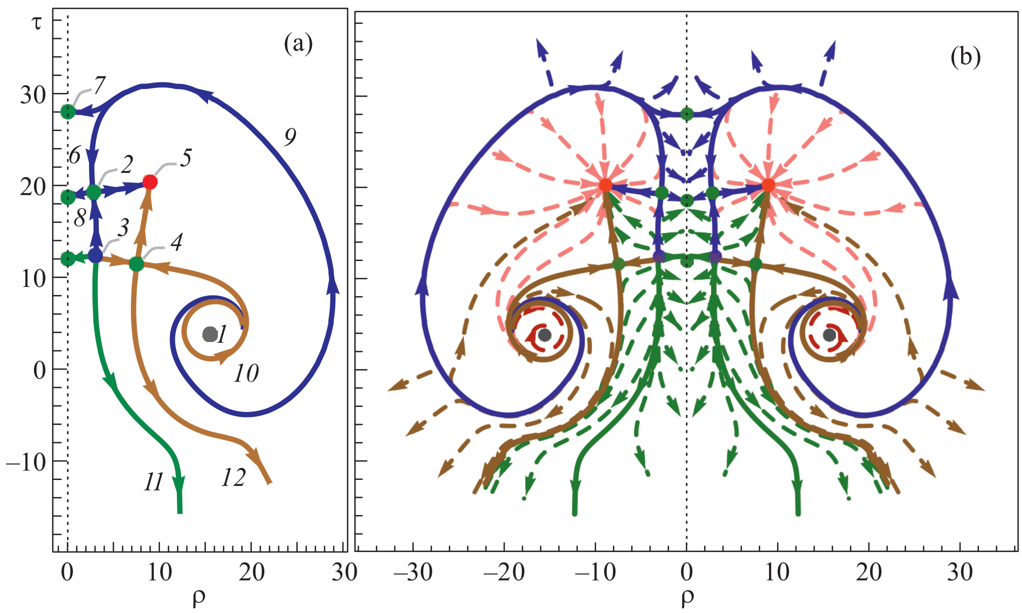

Рис. 3. (Цветной онлайн) Особые элементы фазовой плоскости (a) и "рядовые" линии потоков энергии (b), демонстрирующие характер особых элементов для осесимметричного "яблока". Вертикальная пунктирная прямая $\rho = 0$ указывает вихревую линию. На ней расположены 3 вырожденные особые точки: устойчивый узел *6* и два седла *7*, *8*. Близкие сепаратрисы *9*, выходящие из неустойчивого предельного цикла *10* и попадающие в седла *2*, *4* и *7*, разделяют ограниченную область с траекториями, локализованными внутри солитона, и область траекторий, уходящих на периферию. *1* – устойчивый фокус, *5* – устойчивый узел. Неограниченная сепаратриса *11* отделяет траектории, уходящие на периферию вблизи вихревой линии, от приближающихся к "притягивающей" линии *12*

Локальной характеристикой структуры солитонов служит знак дивергенции потока энергии: для источников поля $\nabla\cdot\mathbf{S} > 0$, а для стоков $\nabla\cdot\mathbf{S} < 0$. Как видно из рис. 2, границы раздела областей источников и стоков энергии тороидальны. Для "прецессона" источники расположены внутри единственной области – полом тороиде, а для "яблока" – в двух полых тороидах.

Более полно внутренняя структура солитонов характеризуется топологией линий потока энергии (нелокальные характеристики). Ориентацию линий определяем по знаку их (единичного) топологического заряда m (при движении вдоль линии или в малой окрестности вокруг нее в направлении ориентации фаза поля возрастает). В случае осесимметричного "яблока" поле представляется как $E = A(\rho,\tau')\exp(im\varphi + iq_z z)$, где $\tau' = \tau - \nu_\tau z$, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $m = \pm 1$ (штрих далее опускаем, ν_τ и q_z – постоянные). Тогда фазовое пространство (ρ,τ) потоков энергии двумерно и уравнения для линий потока имеют вид

$$\frac{d\rho}{dl} = S_\rho(\rho,\tau), \quad \frac{d\tau}{dl} = S_\tau(\rho,\tau). \qquad (4)$$

Эволюционная переменная l имеет смысл длины линии от некоторой произвольной точки со знаком + или – в зависимости от того, совпадает ли движение вдоль линии с ее ориентацией. Структуру фазовой плоскости уравнений (4) определяют особые точки, в которых $S_\rho = S_\tau = 0$, сепаратрисы седел и предельные циклы (замкнутые линии) [14].

На рис. 3a показаны 5 изолированных особых точек: "устойчивый" (по отношению к увеличению длины l) фокус *1*, устойчивый и неустойчивый узлы *5* и *3*, седла *2* и *4*, их сепаратрисы и единственный "неустойчивый" предельный цикл *10*. Особого рассмотрения требует сплошная линия особых точек $\rho = 0$, совпадающая с незамкнутой вихревой линией. В ее окрестности амплитуда поля A разлагается в ряд по нечетным степеням радиуса: $A = \rho f(\tau) - \rho^3 g(\tau) + \ldots$ В низшем по ρ порядке

$$S_\rho = -\rho^3 F_\rho(\tau), \; S_\tau = -\rho^2 F_\tau(\tau). \qquad (5)$$

В области локализации поля функция $F_\rho(\tau) = 2\mathrm{Im}(f^* g) > 0$, а $F_\tau(\tau) = \mathrm{Im}(f^* df/d\tau)$ трижды меняет знак, $F_\tau(\tau_n) = 0$, $n = 1, 2, 3$. В окрестности n-го нуля положим $F_\rho(\tau) = F_\rho(\tau_n)$, $F_\tau(\tau) = F'_\tau(\tau_n)(\tau - \tau_n)$. Тогда для линии с начальными значениями (ρ_0, τ_0)

$$\rho(\tau) = \rho_0 \left|\frac{\tau - \tau_n}{\tau_0 - \tau_n}\right|^{F_\rho(\tau_n)/F'_\tau(\tau_n)}. \qquad (6)$$

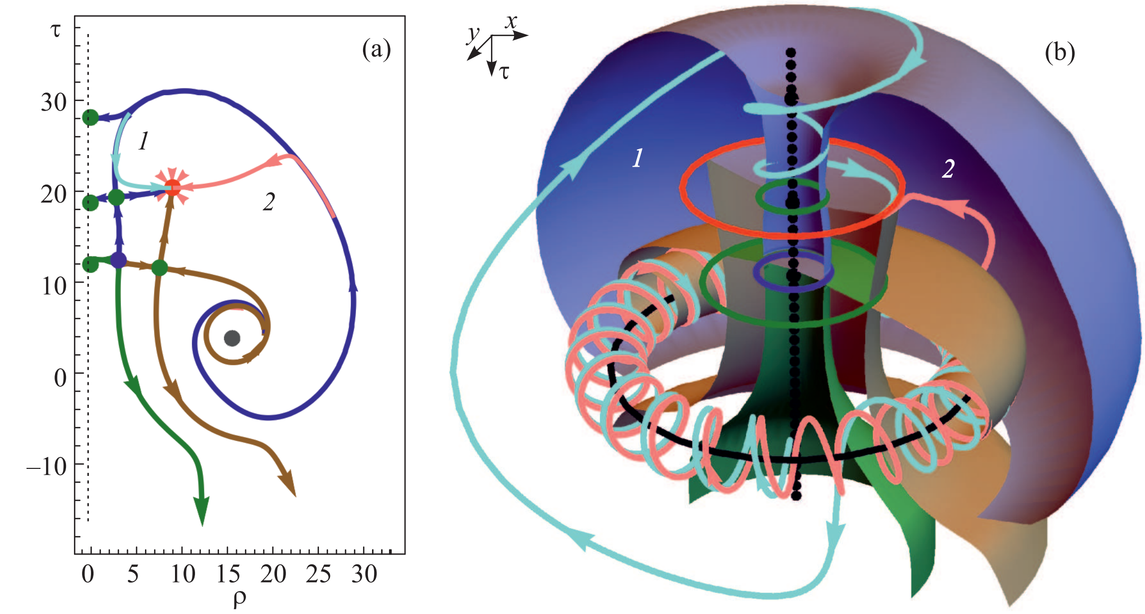

Рис. 4. (Цветной онлайн) Преобразование фазовой полуплоскости рис. 3a в 3D-фазовое пространство потоков энергии (a, b) за счет вращения элементов (a) вокруг оси τ. В разрезе (b) показаны особые поверхности, разделяющие линии потока энергии с качественно различающимся поведением. Они получены вращением вокруг оси τ особых линий рис. 3a: предельного цикла *10* и сепаратрис, как приходящих в седла *2*, *4*, *7* из предельного цикла, так и соединяющих седла *3*, *8*, седла и узлы *2*, *6*, *2*, *5*, *3*, *4*, *4*, *5*, и уходящих на периферию сепаратрисы *11* и линии *12*. След вращения предельного цикла образует полый тороид, а след сепаратрис формируют цилиндрические поверхности (b). Линии *1* и *2* – общего положения, иллюстрируют сильную связь локализованных и уходящих на периферию потоков энергии

Из (6) следует, что при $F'_\tau(\tau_n) > 0$ линия входит в вырожденную особую точку ($\rho(\tau) \to 0$ при $\tau \to \tau_n$), что отвечает на рис. 3a устойчивому узлу *6*. Если $F'_\tau(\tau_n) < 0$, то при $\tau \to \tau_n$ линия удаляется от особой точки, что реализуется для вырожденных седел *7* и *8* на рис. 3a.

Еще одной представленной на рис. 3a особенностью фазовой плоскости являются исходящие из неустойчивого предельного цикла и входящие в седла (2), (4) и (7) сепаратрисы. Они, вместе с вихревой линией и не показанной на рис. 3a линией, исходящей из неустойчивого предельного цикла и разделяющей траектории, приближающиеся при $l \to +\infty$ либо к вихревой линии при $\tau \to +\infty$, либо к линии *12*, полностью определяют разбиение фазовой плоскости на ячейки с качественно различающимся поведением линий потока энергии.

Использование осевой симметрии солитона-“яблока” с привлечением дополнительного к (4) уравнения для угловой координаты φ, $d\varphi/dl = \rho^{-2} I(\rho, \tau)$, позволяет получить и трехмерное фазовое пространство потоков энергии. Как показано на рис. 4, при вращении элементов (a) вокруг оси τ след 2D-предельного цикла образует полый тороид, а сепаратрисы, исходящие из предельного цикла, формируют цилиндрические поверхности (b). Линии *1* и *2* (b) – общего положения, они иллюстрируют сильную связь локализованных и уходящих на периферию потоков энергии. След от вращения изолированных особых точек у “яблока” дает 5 замкнутых линий (колец) (см. рис. 4b и 2a). Для “прецессона” часть таких замкнутых линий (4) приведена на рис. 2c. На указанной на рис. 2d сепаратрисной поверхности “прецессона” имеются три замкнутых (предельных, 3D-аналоги 2D-предельных циклов) линии (*2*, *3* и *4* на рис. 2c), отвечающие трем вырожденным особым точкам на вихревой линии. Центральная из них совпадает с центром симметрии инверсии поля. Вблизи вихревой линии тангенциальная составляющая потока энергии направлена так же, как для “яблока”. Вихревую линию окружает поверхность с неустойчивыми замкнутыми траекториями *3* и *4* на рис. 2d, которая ограничивает область траекторий, уходящих на периферию вблизи незамкнутой вихревой линии. В центре поверхности, вблизи линии “седловой” замкнутой линии *2*, шаг спиральных линий потока уменьшается до нуля.

Таким образом, в данной работе найден новый тип устойчивого топологического лазерного солитона с необычным “штопорным” движением вихревой линии (рис. 1f, g, рис. 2b и анимация [13]). Выявлена внутренняя структура солитонов с одной незамкнутой вихревой линией. Незамкнутая вихревая линия является аттрактором: все линии потока энергии внутри окружающей эту вихревую линию сепаратрисной поверхности приближаются к вихревой линии при $l \to \infty$. По-видимому, наличие трех вырожденных точек на незамкнутой вихревой линии служит общим свойством подобных устойчивых солитонов. Если представить структуру с единственной вырожденной точкой на незамкнутой вихревой линии, то она будет неустойчивой: исходящие из центра потоки не скомпенсированы, что приведет к расширению структуры.

В отсутствие замкнутых вихревых линий потоки энергии разделяются поверхностью типа искривленного цилиндра на наматывающиеся на вихревую линию и уходящие на периферию вне ее окрестности. При наличии дополнительной замкнутой вихревой линии ("яблоко") в фазовом пространстве потоков энергии возникают дополнительные разделяющие поверхности, как замкнутые тороиды, так и незамкнутые, уходящие на периферию солитона. Наличие линий потока энергии, закручивающихся вблизи и незамкнутой, и замкнутой вихревых линий, подчеркивает их сильную связь, обеспечивающую повышенную устойчивость исследуемых топологических солитонов.

Результаты работы получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.scc.spbstu.ru). Исследование отвечает плану работ по гранту РНФ 18-12-00075.

1. L. D. Faddeev, *Quantization of solitons*, Princeton preprint IAS-75-QS70, Institute for Advanced Study, Princeton (1975).
2. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Nature **387**, 58 (1997).
3. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Phys. Rev. Lett. **85**, 3416 (2000).
4. E. Babaev, Phys. Rev. Lett. **88**, 177002 (2002).
5. J. Garaud, J. Carlstrom, and E. Babaev, Phys. Rev. Lett. **107**, 197001 (2011).
6. Y.-C. Zhang, Z.-W. Zhou, B. A. Malomed, and H. Pu, Phys. Rev. Lett. **115**, 253902 (2015).
7. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит (2011).
8. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
9. N. A. Veretenov, S. V. Fedorov, and N. N. Rosanov, Phys. Rev. Lett. **119**, 263901 (2017).
10. V. M. H. Ruutu, Ü. Parts, J. H. Koivuniemi, M. Krusius, E. V. Thuneberg, and G. E. Volovik, Pis'ma v ZhETF **60**, 659 (1994).
11. A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhauser Verlag (1996).
12. Н. А. Калитеевский, Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, Опт. спектроск. **85**, 1394 (1998) [N. A. Kaliteevskii, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Opt. Spectrosc. **85**, 485 (1998)].
13. См. Дополнительный материал с анимацией формирования и установления линии нулей у "штопорного солитона" – асимметричного "яблока" по адресу www.jetpletters.ac.ru; $d = 0.05$, $g_0 = 2.127$
14. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, И. И. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука (1966).