Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 9, стр. 465 – 467 *10 ноября 1988 г.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КИРАЛЬНОСТИ И СТРУКТУРА ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.С.Горский

Показано, что преобразование киральности для одночастичных безмассовых состояний может быть определено единым образом для произвольного спина, как перенос по замкнутому контуру в импульсном пространстве.

Обнаружение нетривиальной топологической фазы в адиабатическом приближении [1, 2], которая, как правило обязана своим существованием пересечению энергетических уровней при некоторых значениях параметров, стимулировало исследование структуры спектра, как функции параметров в различных физических задачах. Одним из наиболее ярких примеров проявления топологической фазы Берри является оптическая интерференция в системе двух спиральных волноводов [3, 4], где роль параметра играет волновой вектор фотона, описывающий при распространении волны замкнутый контур в импульсном пространстве. В работе [5] исходя из анализа структуры группы Пуанкаре было продемонстрировано, что движение безмассовой нейтральной частицы со спином в импульсном пространстве происходит в эффективном поле монополя с единичным магнитным зарядом расположенного в точке $\mathbf{p} = 0$. Мы покажем, что наличие монополя приводит к тому, что перенос волновой функции частицы произвольного спина по замкнутому контуру $|\mathbf{p}| = \mathrm{const}$ в импульсном пространстве эквивалентен преобразованию киральности.

Рассмотрим свободную безмассовую частицу со спином 1/2, динамика которой описывается уравнением Дирака

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\vec{\alpha}\vec{\nabla})\Psi , \qquad \alpha = \vec{\gamma_0}\vec{\gamma} , \tag{1}$$

где $\Psi(\mathbf{x}, t)$ – четырехкомпонентная волновая функция. Уравнение (1) допускает одночастичное плосковолновое решение $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = u_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$, где $u_{\mathbf{p}}$ – стандартный биспинор. В качестве четырех независимых решений с фиксированным импульсом выберем решения, характеризующиеся определенными значениями энергии $E = \pm|\mathbf{p}|$ и киральности $\lambda = \pm {}^1/_2$

$$u_{\underset{E\ \lambda}{+\ +}} = \begin{pmatrix} u_{++} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{+-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{+-} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-+} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-+} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{--} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{--} \end{pmatrix},$$

где использовано спинорное представление матриц Дирака. Следовательно мы имеем дело с двухуровневой системой, причем каждый уровень двукратно вырожден по киральности. Пересечение уровней происходит в точке $\mathbf{p} = 0$, что и приводит, в согласии с [5], к существованию монополя в этой точке. Решения уравнения Шредингера при обходе по замкнутому контуру в импульсном пространстве, согласно Берри, приобретают нединамическую фазу, зависящую от знака энергии и киральности

$$u_{+\lambda} \to u_{+\lambda} e^{i\lambda\Omega(\mathbf{p})} \quad , \qquad u_{-\lambda} \to u_{-\lambda} e^{-i\lambda\Omega(\mathbf{p})} \quad , \tag{2}$$

где $\Omega(\mathbf{p})$ – описываемый при вращении вектором $\mathbf{p}$ телесный угол. На другом языке это можно понять, вспоминая, что оператор чистого вращения в импульсном пространстве имеет вид:

$$\mathbf{M} = [-i\mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + i\lambda \mathbf{A}_M] + \frac{\lambda \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad ,$$

где $\mathbf{A}_M$ – потенциал поля монополя, а λ играет роль электрического заряда в импульсном пространстве [5]. Отметим также, что переходы на вырожденном уровне с изменением киральности, индуцированные монополем, отсутствуют [6]. Выполняя разложение волновой функции по линейно независимым решениям (2) нетрудно убедиться, что перенос волновой функции по замкнутому контуру при малом $\Omega(\mathbf{p})$ имеет вид малого кирального преобразования

$$\delta \Psi_{\mathbf{p}} = i \frac{\Omega(\mathbf{p})}{2} \gamma_5 \Psi_{\mathbf{p}} \tag{3}$$

В качестве другого примера рассмотрим частицу со спином 1. Уравнения Максвелла могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{E} + i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} - i\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\vec{\nabla} & 0 \\ 0 & -s\vec{\nabla} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} + i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} - i\mathbf{B} \end{pmatrix} , \tag{4}$$

где $(s_e)_{jk} = -i\epsilon_{ejk}$ – оператор спина фотона. Уравнение (4) имеет форму уравнения Шредингера, причем импульс является сохраняющейся величиной. Нетрудно убедиться, что комбинации $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ и $\mathbf{E} - i\mathbf{B}$ имеют фиксированную и противоположную спиральность. Таким обазом, аналогично случаю $s = {}^1/_2$ при обносе по замкнутому контуру в $\mathbf{p}$ пространстве с малым Ω имеем

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{E}_{\mathbf{p}} - i\mathbf{B}_{\mathbf{p}}) &= i\Omega(\mathbf{p})(\mathbf{E}_{\mathbf{p}} - i\mathbf{B}_{\mathbf{p}}) \\ \delta(\mathbf{E}_{\mathbf{p}} + i\mathbf{B}_{\mathbf{p}}) &= -i\Omega(\mathbf{p})(\mathbf{E}_{\mathbf{p}} + i\mathbf{B}_{\mathbf{p}}) \end{aligned} \tag{5}$$

что эквивалентно стандартному дуальному преобразованию, обычно принимаемому за преобразование киральности для фотонного поля. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для высших спинов.

Рассмотренная картина может быть обобщена на случай вторично-квантованных полей. Например, для безмассового фермионного поля разложение по плоским волнам имеет вид $\Psi(x) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}(x)$, где $a_{\mathbf{p}}$ – операторы, а суммирование проводится по плоским волнам с положительными и отрицательными частотами. Выполним под знаком суммы преобразование импульса при котором каждый вектор **p** вращается вокруг некоторой оси по замкнутому контуру, причем все вектора описывают равный телесный угол. В результате имеем $\delta\Psi(x) = \dfrac{i\Omega(x)}{2}\gamma_5\Psi(x)$, если считать Ω малым и зависящим от пространственной координаты. Таким образом, киральные преобразования во вторично-квантованной теории можно отождествить с локальными вращениями в импульсном пространстве.

Для массивных частиц пересечение уровней в области действительных значений импульса отсутствует, поэтому топологическая фаза в этом случае не возникает. Таким образом неустранимых топологических особенностей в фазовом пространстве свободных массивных частиц не существует. В теории со взаимодействием положение возможной точки пересечения уровней в **p**-пространстве фиксируется конкретным видом внешнего поля, например, положительные и отрицательные уровни фермиона в магнитном поле **B** пересекаются на плоскости $\mathbf{p} \perp \mathbf{B}$. Отметим, что связь кирального тока со структурой фазового пространства отмечалась в [7] при обсуждении явления в He^3, аналогичного фермионной киральной аномалии. Единое определение киральности для различных спинов может также оказаться полезным при интерпретации обсуждающихся в последнее время бозонных аномалий.

Автор благодарен М.А.Шифману за полезные обсуждения.

Литература

1. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc., 1984, **45**, 392.
2. *Simon B.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2167.
3. *Chiao R., Wu Y.S.* Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 933.
4. *Tomita A., Chiao R.* Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 937.
5. *Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z.* Phys. Rev. D, 1987, **35**, 2383.
6. *Segert J.* J.Math. Phys., 1987, **59**, 161.
7. *Воловик Г.Е.* ЖЭТФ, 1987, **92**, 2116.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
12 скнтября 1988 г.