Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 9, стр. 494 – 497 *10 ноября 1988 г.*

О "КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ" ЛОКАЛИЗАЦИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г.В.Мильников, И.М.Соколов

Рассмотрена задача о локализации уровней Ландау частицы, находящейся в плавном двумерном случайном потенциале. В рамках квазиклассического приближения, соответствующего пределу сильного магнитного поля H, получена зависимость обратной длины локализации $\gamma(E)$ от энергии и корреляционных свойств потенциала.

Вопрос о локализации электронных состояний в двумерной системе в магнитном поле вызывает значительный интерес. Например, квантовый эффект Холла требует наличия как локализованных, так и делокализованных состояний [1, 2]. В работах [3 - 6] исследовалось поведение обратной длины локализации $\gamma(E)$ в таких системах. Хотя величина $\gamma(E)$ и не определяет непосредственно транспортных свойств системы, вычисление ее необходимо хотя бы потому, что эта величина – единственная характеристика системы, которая может быть с большой точностью определена в численном эксперименте. Ниже мы исследуем поведение этой величины для случая сильного поля $H \to \infty$ или достаточно плавного потенциала [7, 8].

Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + V(x, y) \equiv \mathcal{H}_0 + V \quad , \tag{1}$$

где $V(x, y)$ – случайный потенциал. Этот потенциал мы будем считать гауссовым, $\langle V \rangle = 0$, $\langle V(\rho) V(\mathbf{r} + \rho)\rangle = g(r)$, длина корреляции этого потенциала λ – характерный (большой) пространственный масштаб задачи. В калибровке Ландау собственные функции $\mathcal{H}_0$ имеют вид

$$\psi_{X,n} = (2^n n! \sqrt{\pi} l L)^{-1/2} \exp\left(iy\frac{X}{l^2} - \frac{(x - X)^2}{2l^2}\right) H_n\left(\frac{x - X}{l}\right),$$

где $l^2 = \hbar c/eH$, n – номер уровня Ландау, X принимает значение $\frac{2\pi l^2}{L}\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, L – размер системы в направлении y. В сильных полях $(\hbar\omega_H \equiv \hbar\frac{eH}{mc} \gg V)$ и при низких температурах случайное поле приводит к смешиванию лишь состояний, соответствующих одному уровню Ландау. Для определенности будем рассматривать нулевой уровень. Волновая функция состояния с энергией E (отсчитываемой от $E_0 = \hbar\omega_H/2$) $\psi = \sum_X C_X \psi_{X,0}$ амплитуды C_X удовлетворяют уравнению

$$EC_X = \sum_{X'} C_{X'} \langle X | V | X' \rangle \, , \tag{2}$$

где $\langle X | V | X' \rangle = \int \psi^*_{X,0} V(x, y) \psi_{X',0}\, dxdy$. При $H \to \infty$ $l \ll \lambda, L$. Диагональный матричный элемент $\langle X | V | X \rangle$ в большой системе $\sim L^{-1}$, и стремится к нулю при $L \to \infty$

При $H \to \infty$ (2) можно заменить интегральным уравнением

$$EC(x) = \frac{L}{2\pi l^2} \int V(x, \xi) C(\xi) d\xi \quad , \tag{3}$$

где

$$V(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} lL} \int \exp\left(-i\frac{y}{l^2}(x-\xi) - \frac{(\eta - x)^2 + (\eta - \xi)^2}{2l^2}\right) V(\eta, y) d\eta dy \approx$$

$$\approx \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4l^2}\right) V\left(\frac{x+\xi}{2}, \widetilde{\frac{x-\xi}{l^2}}\right). \tag{4}$$

(Знак $\sim$ над вторым аргументом означает взятие по этому аргументу преобразования Фурье). Подставляя (4) в (3) и отыскивая решение в виде $C(x) \sim \exp\left(i \int^{x} k(x')dx'\right)$получаем

$$E = V(x, k(x) l^2). \tag{5}$$

Уравнение (5) согласуется с результатом [9] и определеляет закон дисперсии $k(E, x)$, т. е. квазиклассическое поведение системы, условием применимости которого является малость l и k^{-1} в сравнении с λ. Этот закон дисперсии полностью определяет локализацию в пределе сильного поля. Длина локализации состояния

$$\gamma(E) = \lim_{|x - x'| \to \infty} \frac{\langle \ln G(x, x', E) \rangle}{|x - x'|}. \tag{6}$$

Используем для функции Грина смешанное представление [10] $G(x,x',E) = \frac{1}{2\pi}\int G(R, k, E) \times \exp(ikr)dk$, $r = x - x'$, $R = (x + x')/2$. При $k\lambda \gg 1$ $G(R, k, E)$ определяется законом дисперсии (5):

$$G(R, k, E) = (E - E(k, R) + i\epsilon)^{-1} \quad , \tag{7}$$

где $E(k, R) = V(R, kl^2)$. Переходя к x-представлению и подставляя результат в (6), получим

$$\gamma(E) = \langle \min_n |\, \mathrm{Im} k_n(E) | \rangle, \tag{8}$$

где $\{k_n(E)\}$ – набор корней дисперсионного уравнения (5).

Прежде чем переходить к вычислению величины γ для двумерной задачи рассмотрим в качестве примера задачу о локализации в плавном одномерном потенциале с длиной корреляции λ собственных функций уравнения Шредингера $E\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' + U(x)\psi$. В этом случае $E(k, R) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(R)$ и

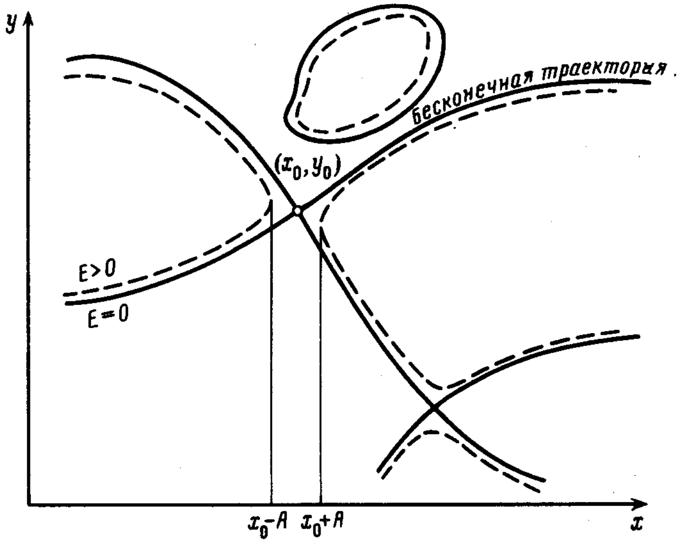
$$\gamma(E) = \langle |\, \mathrm{Im} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))} \rangle . \tag{9}$$

В гауссовом потенциале при $E \gg \sqrt{g(0)}$, $\gamma(E) = \sqrt{\frac{2\pi m}{\hbar^2}E}$, что согласуется с результатом применения фазового формализма [11]. Физически результат (9), означает, что при $k\lambda \gg 1$ волновая функция затухает только в классически запрещенных областях. В ограниченном случайном потенциале $\gamma(E) = 0$ при $E > \max U(x)$, что не противоречит утверждению о локализованности всех состояний, а означает лишь, что $\gamma \to 0$ при $\lambda \to \infty$ (в области $E < \max U(x)$ $\gamma \to \mathrm{const}$).

Вернемся к двумерной задаче.

Рассмотрим значения E, близкие к 0. Линии уровня $V(x, kl^2) = E$ будем называть траекториями корней. Из симметрии $V(x)$ следует, что $E = 0$ есть порог протекания по областям $V < E$ и $V > E$ и, следовательно, что существует линия уровня $V = 0$, пронизывающая всю систему. Такая линия единственна, на ней реализуется абсолютный минимум $|\operatorname{Im}(k(E))| = 0$, $\gamma = 0$. Рост γ при $E \neq 0$ соответствует разрыву этой траектории в седловых точках потенциала $V(x, y)$ (см. рисунок) [1]. С точностью до квадратичных членов в этих точках

$$V(x, kl^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x - x_0)^2 - \frac{l^4}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(k - \frac{y_0}{l^2}\right)^2, \tag{10}$$



где (x_0, y_0) – координаты седловой точки. При малых E траектория расщепляется в этих точках. Наименьшая обратная длина локализации определяется появлением вблизи этих седловых точек, соответствующих $E \approx 0$ областей, в которых $\operatorname{Im} k(x, y) \neq 0$. При этом

$$\gamma(E) = \frac{1}{L_c}\left\langle \int_{x_0 - A}^{x_0 + A} \operatorname{Im} k(E, x)dx \right\rangle, \tag{11}$$

где $A = \sqrt{2E \Big/ \dfrac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2}}$, а L_c – средняя разность x- координат точек расщепления траектории.

На языке теории протекания эта величина есть некоторый характерный размер конечного кластера вблизи порога протекания. Этот размер пропорционален длине корреляции $\xi \sim (p - p_c)^{-\nu}$, где в двумерном случае $\nu = 4/3$ [10], $p_c = 1/2$, а $p = \int_{-\infty}^{E} p(V)dV$. Таким

---

[1] Картина траекторий корней на другом языке воспроизводит перколяционную модель, рассмотренную в работе [7].

образом $L_c = B(p - p_c)^{-\nu}$, где константа B есть функционал автокорреляционной функции g. В случае, если $g = g(r/\lambda)$, где λ – длина корреляции, $B \sim \lambda$, коэффициент пропорциональности может быть определен только численно.

Интеграл в (11) легко берется. После усреднения получаем

$$\gamma(E) = \frac{E^{\nu+1}\,\Gamma^2(1/4)}{2Bl^2\sqrt{2D_1}\,(2\pi D)^{\nu/2}} \sim \left(\frac{E}{\langle V^2\rangle^{1/2}}\right)^{\nu+1}\frac{\lambda}{l^2},$$

где $D = g(0) = \langle V^2\rangle$, $D_1 = g^{\mathrm{IV}}(0) \sim \langle V^2\rangle/\lambda^4$. Обратим внимание, что по мере перехода ко все более плавному потенциалу $\lambda \to \infty$ длина локализации γ^{-1} уменьшается (в пределе постоянного поля дрейф вообще отсутствует).

Рассмотренная картина основана на пренебрежении неортогональностью волновых функций на различных траекториях. Их неортогональность приводит к "неопределенности" энергии в законе дисперсии (5) $\Delta E \sim \langle V^2\rangle^{1/2}(l/\lambda)^2$. В соответствии с этим полученный результат представляет собой промежуточную асимптотику зависимости $\gamma(E)$ при $\langle V^2\rangle^{1/2} \gg E \gg \langle V^2\rangle^{1/2}(l/\lambda)^2$. При больших h или H область применимости этой асимптотики оказывается весьма широкой.

Полученный результат подтверждает выводы [3] о степенной зависимости $\gamma \sim |E|^{\alpha}$. В случае $\lambda \to \infty$ $\alpha = \nu + 1 = 7/3$, в то время как в численном эксперименте для системы с короткокореллированным потенциалом было получено $\alpha \leqslant 2$.

Авторы благодарят С.М.Апенко и Л.В.Келдыша за полезные обсуждения.

Литература

1. *Aoki H., Ando T.* Sol. St. Comm., 1981, **38**, 1079.
2. *Tsui D.C., Allen S.J.* Phys. Rev. B, 1981, **24**, 4082.
3. *Aoki H., Ando T.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 831.
4. *Ono Y.,* J. Phys. Soc. Jap. 1982, **51**, 2055.
5. *Ando T.* J. Phys. Soc. Jap. 1983, **52**, 1740.
6. *Aoki H.* J. Phys. C., 1983, **16**, 1893.
7. *Kazarinov R.F., Lurye S.* Phys. Rev. B, 1982, **25**, 7626.
8. *Iordansky S.V.* Sol. St. Comm., 1982, **43**, 1.
9. *Tsukada M., J.* Phys. Soc. Jap. 1976, **41**, 1466.
10. *Бонч-Бруевич В.Л. и др.* Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М.: Наука, 1981.
11. *Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
12. *Riedel E.K.* Physica (Utrecht), 1981, **106A**, 110.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 августа 1988 г.
После переработки
27 сентября 1988 г.