

О структуре интенсивной стоячей гравитационной волны

А. А. Кириллов¹⁾, Дж. Монтани²⁾, Е. П. Савелова⁺

⁺Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005 Москва, Россия

^{*}Dipartimento di Fisica Università di Roma, 00185 Roma, Italy

Поступила в редакцию 9 января 2018 г.

После переработки 29 января 2018 г.

Рассмотрена однородная времени-подобная модель Бианки–VIII. Для данной модели получен новый класс несингулярных решений вакуумных уравнений Эйнштейна, которые описывают интенсивную стоячую гравитационную волну.

DOI: 10.7868/S0370274X18060012

Из-за недавнего обнаружения гравитационных волн (ГВ) [1] возрос интерес к наблюдательным эффектам, связанным с их изучением. Ряд таких эффектов известен давно, так стоячие гравитационные и звуковые волны генерируют осцилляции в спектрах мощности СМВ (реликтового излучения) и плотности вещества (так называемые Сахаровские осцилляции [2]). Кроме того, в работе [3] утверждается, что интенсивные стоячие ГВ способны объяснить наблюдаемое ускорение Вселенной.

Естественное происхождение стоячих ГВ можно объяснить квантовыми эффектами в ранней Вселенной. Такие волны существуют на масштабах превышающих размеры горизонта. Попадая под горизонт, они начинают эволюционировать и распадаться, тем самым формируя наблюдаемую структуру. Однако, если предположить, что наша Вселенная хотя бы в одном направлении ограничена, то часть стоячих волн может выжить. Наблюдение связанных с ними эффектов может дать дополнительную важную информацию о реальной топологической структуре нашей Вселенной.

В настоящей статье мы рассмотрим структуру интенсивной стоячей ГВ во Вселенной, замкнутой в направлении z . Для описания ГВ мы используем метрику, которая обладает однородными времени-подобными сечениями $z = \text{const}$, которые соответствуют модели Бианки–VIII. Уравнения Эйнштейна для такой модели совпадают с хорошо известной моделью Mixmaster и допускают полную классификацию всех возможных решений. В общем случае такие решения являются асимметричными и классифицируются двумя конечными последовательностями це-

лых чисел (M_0, M_1, \dots, M_K) и (N_0, N_1, \dots, N_L) , которые играют роль обобщенных волновых чисел стоячей гравитационной волны. В пределе, когда длина волны стремится к нулю, такие волны формируют голую сингулярность [4, 5] общего колебательного типа [6] на одной или обеих границах $z \rightarrow \pm\infty$.

Предполагая однородность пространственно-временного сечения $z = \text{const}$, выберем метрику в форме

$$ds^2 = -\phi^2 dz^2 + (a^2 \ell_\alpha \ell_\beta - b^2 m_\alpha m_\beta - c^2 n_\alpha n_\beta) dx^\alpha dx^\beta, \quad (1)$$

где ϕ, a, b, c – функции только координаты z , а векторы ℓ_α, m_α и n_α являются однородными базисными векторами, которые задают структурные константы. Важно, что времени-подобный вектор ℓ соответствует отрицательной структурной константе $\lambda = \frac{\ell \cdot \text{rot } \ell}{v} = -1$ в обозначениях [6]. В ином случае (так же как для модели Бианки–IX) пространство оказывается ограниченным в направлении z только с одной стороны [5]. Полагая $a = b = c$ и применяя преобразования из приложения Г в [6], метрика (1) преобразуется к виду $ds^2 = -\phi^2 dz^2 + a^2(dt^2 - \sin^2 t d\alpha^2 - \cos^2 t d\beta^2)$, где $0 < \alpha, \beta < \infty$.

Уравнения Эйнштейна в вакууме сводятся к системе, которая точно совпадает с моделью Бианки–IX для однородных пространственно-подобных сечений (Mixmaster). В калибровке $\phi = abc$ уравнения Эйнштейна сводятся к системе (для диагональных компонент $R_\ell^\ell = 0$)

$$2\alpha_{zz} = (b^2 - c^2)^2 - a^4, \quad (2)$$

$$2\beta_{zz} = (c^2 + a^2)^2 - b^4, \quad (3)$$

$$2\gamma_{zz} = (a^2 + b^2)^2 - c^4, \quad (4)$$

¹⁾e-mail: ka98@mail.ru

²⁾G. Montani

а интеграл движения принимает вид $(R_z^a - \frac{1}{2}R = 0 - \text{компонента})$

$$\sum \alpha_z^2 - \left(\sum \alpha_z\right)^2 + \sum a^4 - \frac{1}{2} \left(\sum a^2\right)^2 = 0, \quad (5)$$

где мы обозначили $\sum \alpha_z = \alpha_z + \beta_z + \gamma_z$, и так далее. Как классическое так и квантовое поведение такой системы хорошо изучено [6–13]. Имеются так же обобщение на суперструны [14–16] и многомерье [17–20].

В классической теории эволюция может быть описана в терминах последовательности казнеровских режимов. Однако, в отличии от модели Mixmaster, система (2)–(5) представляет собой краевую задачу, что определяет процедуру выбора решений. Простейшее решение типа стоячей ГВ соответствует решению Тауба [21]. Оно получается непосредственно из системы (2)–(5) в предположении, что две масштабные функции совпадают. Пусть это будут $a^2 = b^2$, тогда найдем [21]:

$$a^2 = b^2 = \frac{\Lambda \operatorname{ch}(2\Lambda(z - z_0))}{2 \operatorname{ch}^2(\Lambda(z - z_0) + \delta)}, \quad c^2 = \frac{2\Lambda}{\operatorname{ch}(2\Lambda(z - z_0))}.$$

Здесь Λ , z_0 и δ – произвольные константы. При $z \rightarrow \pm\infty$ это решение переходит в решение Казнера

$$a^2 = b^2 \rightarrow \Lambda e^{\mp 2\delta}, \quad c^2 \rightarrow 4\Lambda e^{\mp 2\Lambda z} \rightarrow 0, \quad (6)$$

что соответствует набору казнеровских показателей $(p_\ell, p_m, p_n) = (0, 0, 1)$ и фиктивной сингулярности [6]. Для решения Тауба легко показать, что пространство ограничено по z , а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} abcdz \sim \sim (abc)_{\max} = R_0^3$ имеет смысл геодезического расстояния между сечениями $z = \pm\infty$.

Удобнее рассмотреть граничную задачу (2)–(5) в следующем виде. Потребуем, чтобы на сечении $z = 0$ определитель метрики abc достигал максимально возможного значения $(abc)_{\max} = R_0^3 = \text{const}$ (в случае решения Тауба это всегда можно достичь соответствующим выбором константы z_0). Таким образом на этом сечении мы получаем $\sum \alpha_z = 0$, и определитель будет уменьшаться в обоих направлениях $z \rightarrow \pm\infty$. При $z \rightarrow \pm\infty$ потребуем выполнения граничных условий типа (6), которые соответствует набору казнеровских показателей $(p_\ell, p_m, p_n) = (0, 0, 1)$ и их перестановкам. Такие условия гарантируют регулярность построенного решения.

Полный набор решений можно получить, если от системы (2)–(5) перейти к бильярду на плоскости Лобачевского [9, 10, 12]. Для этого удобно выделить общий масштабный фактор R_0^3 из метрики

$$-ds^2 = \phi^2 dz^2 + R_0^2 \gamma_{ab} \ell_\alpha^a \ell_\beta^b dx^\alpha dx^\beta, \quad (7)$$

где $\ell_\alpha^a(x)$ – набор однородных векторов $(\ell_\alpha, m_\alpha, n_\alpha)$, $\gamma_{ab} = \text{diag}(-e^{q_1}, e^{q_2}, e^{q_3})$, а общий множитель R_0 характеризует абсолютное значение метрических функций [12] и определяется граничными условиями. Будем использовать параметризацию масштабных функций задаваемую следующими соотношениями (детали можно найти в [13]). Введем параметры анизотропии

$$Q_a = q_a / \left(\sum q\right), \quad (8)$$

и следующие переменные:

$$e^{-2S} = \frac{1}{6} \left(\left(\sum q_a\right)^2 - \sum q_a^2 \right),$$

$$Q_1(u, v) = \frac{-u}{u^2 + u + 1 + v^2}, \quad Q_2(u, v) = \frac{1 + u}{u^2 + u + 1 + v^2},$$

$$Q_3(u, v) = \frac{u(u + 1) + v^2}{u^2 + u + 1 + v^2}.$$

Тогда действие для функций S , $\eta = (u, v)$ принимает вид

$$I = \int (\mathbf{P} \cdot \frac{d\eta}{d\ell} - h) d\ell, \quad (9)$$

где $h \equiv \pm P_S = \sqrt{\varepsilon^2 + 6e^{-2S}V}$, $\varepsilon^2 = v^2 P^2$, а потенциал дается соотношением

$$V = R_0^4 \left(\sum \lambda_a^2 e^{2q_a} - \frac{1}{2} \left(\sum \lambda_a e^{q_a}\right)^2 \right). \quad (10)$$

Конфигурационным пространством системы является плоскость Лобачевского. В координатах η конфигурационному пространству соответствует модель Пуанкаре (полуплоскость $v > 0$ или верхняя полуплоскость комплексной переменной $u + iv$). Переменная ℓ играет роль геодезического пути в конфигурационном пространстве и связана с S условием $\frac{d\ell}{dz} = \left| \frac{dS}{dz} \right| = 1$, которое фиксирует функцию ϕ как $\phi = \frac{3R_0^3 \sqrt{-\gamma}}{h} e^{-2S}$. Вариация действия дает систему уравнений эквивалентную (2)–(5).

Переход к бильярду предполагает использование асимптотической формы потенциала, в котором каждый член в (10) при $-\gamma \ll 1$ аппроксимируется потенциальной стенкой следующим образом

$$(-\gamma)^{Q_a} \rightarrow \theta_\infty[Q_a] = \begin{cases} +\infty, & Q_a < 0, \\ 0, & Q_a > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда $h = \text{const}$ и решение соответствует просто геодезическому движению на плоскости Лобачевского (казнеровский режим). Отметим, что такое приближение хорошо работает при $(-\gamma) \rightarrow 0$, в то время как вблизи сечения $z = 0$ имеем $(-\gamma) \lesssim 1$ и данное приближение является достаточно грубым. Тем

не менее, с качественной точки зрения, приближение продолжает работать и вблизи $z = 0$, что позволяет его использовать как приближения первого порядка.

Потенциал V_∞ вырезает область $Q_a > 0$, и полное решение можно аппроксимировать кусочно-гладкой функцией, которая представляет серию казнеровских (геодезических) решений. Полное решение имеет две ветви: $z < 0$, где $\frac{dS}{dz} < 0$, и $z > 0$, соответствующую $\frac{dS}{dz} > 0$. На обеих ветвях определитель метрики $\gamma(z)$ убывает монотонно. Обе ветви объединяются в одну общую геодезическую линию (правая и левая ветвь от точки O на рис. 1). Фундаментальная об-

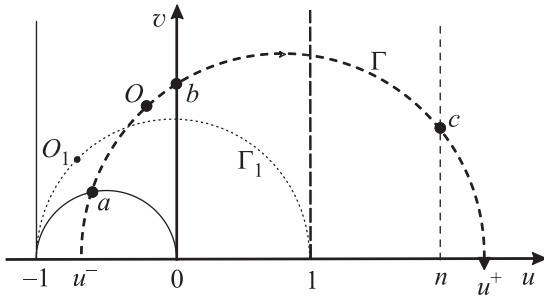


Рис. 1. Продолжение полного решения на всю плоскость Лобачевского. Кривая Γ_1 соответствует решению Тауба, а Γ – решению общего вида. Точки O и O_1 соответствуют максимуму $\sqrt{-\gamma}$. Часть кривой Γ между a и b лежит в фундаментальной области бильярда $Q_a > 0$. Участок Γ между b и c – одна казнеровская эра. c – точка пересечения Γ с линией $u = n = [u^+]$ соответствует началу следующей эры

ласть бильярда – это область, где $Q_a > 0$. Она ограничена геодезическим треугольником

$$u = 0, \quad u = -1, \quad \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}. \quad (12)$$

Геодезические линии на полуплоскости – это полуокружности с центрами на абсолюте $v = 0$ и перпендикулярные к абсолюту лучи, которые задаются выражениями

$$u = U + V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta, \quad (13)$$

где

$$U = \frac{1}{2}(u^+ + u^-), \quad V = \frac{1}{2}(u^+ - u^-),$$

и u^\pm – константы, а угол θ относится к геодезическому пути ℓ (который пробегает интервал $-\infty < \ell < \infty$) как

$$\ell = \ell_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (14)$$

Очевидно, что в области бильярда угол θ может пробегать интервал $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (см. рис. 1). Выражения (13), (14) описывают лишь часть решения (траекторию) между двумя отражениями от границы бильярда. Отражение от любой стенки ($Q_a = 0$) определяет отображение $T_a(u, v)$, которое в свою очередь определяет новые значения констант интегрирования u^\pm и ℓ_0 для соседних (последующих или предыдущих) частей решения. Отображение записывается следующим образом

$$T_1(u, v) = (-u, v), \quad T_2(u, v) = (-u - 2, v),$$

$$T_3(u, v) = \left(\frac{-u(2u+1) - 2v^2}{(2u+1)^2 + 4v^2}, \frac{v}{(2u+1)^2 + 4v^2} \right).$$

Ограничивая их на абсолют (полагая $v = 0$), находим отображение только для постоянных u^\pm в форме

$$T_1(u^\pm) = -u^\pm, \quad T_2(u^\pm) = -u^\pm - 2, \quad T_3(u^\pm) = -\frac{u^\pm}{2u^\pm + 1},$$

которое определяет сшивку двух соседних казнеровских решений.

Важно, что каждое отображение T_a представляет движение плоскости Лобачевского. Поэтому набор T_a задает образующие дискретной (некоммутативной) подгруппы G группы движения плоскости Лобачевского H^2 . Любой элемент $g \in G$ может быть определен с помощью композиции

$$g = (T_{a_1} T_{b_1})^{n_1} T_{a_1}^{k_1} (T_{a_2} T_{b_2})^{n_2} T_{a_2}^{k_2} \dots \quad (15)$$

где n_i – целые числа, а числа k_i принимают только два значения $k_i = 0, 1$, и $a_i \neq b_i$. Бильярд B может быть рассмотрен как факторизация $B = H^2/G$ полуплоскости H^2 по дискретной подгруппе G .

При описании решения в терминах [6] каждый элемент g (15) соответствует последовательности казнеровских эр. На каждой эре две масштабные функции a_i и b_i осциллируют, а одна ведет себя монотонно. Целые числа n_i и k_i характеризуют число таких осцилляций ($N_i = 2n_i + k_i$ – полное число казнеровских эпох на данной эре). Удобно продолжить траекторию на всю плоскость Лобачевского, а функциональную зависимость параметров анизотропии изменять $Q_a^g(u, v)$ (это означает, что параметры u и v всегда переходят с помощью соответствующих элементов $g \in G$ в фундаментальную область бильярда $g(u, v) \in B$ и, поэтому, всегда $Q_a^g(u, v) = Q_a(g(u, v)) > 0$), тогда константы интегрирования u^\pm и ℓ_0 остаются неизменными, а функциональная зависимость $Q_a(u, v)$ меняется со сменой казнеровских решений.

Примем значение $\ell = 0$ ($\theta = \theta_0$) как начальную точку $z = 0$, которая соответствует максимальному значению определителя ($-\gamma(0) \sim 1$) (точка O на рис. 1). Тогда часть решения $\ell < 0$ ($\theta \geq \theta_0$, $z < 0$) соответствует области, где значение $\sqrt{-\gamma(z)}$ растет с ростом координаты z , а оставшаяся часть $\ell > 0$ ($\theta \leq \theta_0$) соответствует убыванию $\sqrt{-\gamma(z)}$. Общее решение соответствует всевозможным значениям $u^- < 0$ и $u^+ + 1 > 0$. Тогда разложение этих чисел в цепные дроби

$$u^- = -[M_0, M_1, M_2, \dots], \quad u^+ = [N_0, N_1, N_2, \dots] - 1,$$

где

$$[N_0, N_1, N_2, \dots] = N_0 + \frac{1}{N_1 + \frac{1}{N_2 + \dots}}$$

и числа N_k принимают значения $N_k = 1, 2, \dots$, однозначно задает структуру полного решения, а именно, полное решение выглядит как набор кусочно-гладких казнеровских решений.

Таким образом, мы видим, что пространство решений для нашей модели может быть разделено на два класса.

Первый важный класс соответствует регулярным решениям и имеет место в случае, когда оба числа u^\pm являются рациональными и раскладываются в конечные цепные дроби $u^- = -[M_0, M_1, M_2, \dots, M_K]$, $u^+ = [N_0, N_1, N_2, \dots, N_L] - 1$. В частности, простейшее решение определяется числами $u^\pm = \pm 1$ и соответствует решению Тауба. Такое решение описывает нелинейную стоячую ГВ. Набор чисел M_k и N_k определяет структуру волны – положения максимумов и минимумов масштабных функций $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ (в линейном случае они соответствуют узлам и пучностям). Для достаточно длинных дробей волне можно приписать характерный масштаб неоднородности (длину волны) как $L_{\text{in}} \sim L_0 / (\sum M_k + \sum N_k)$, где $L_0 \sim R_0$ – максимальный размер Вселенной в направлении z .

Второй класс решений соответствует случаю, когда характерная длина такой волны стремится к ну-

лю $L_{\text{in}} \rightarrow 0$. Данный класс решений возникает, когда одна или обе точки u^\pm соответствуют иррациональным числам, и одна или обе цепные дроби становятся бесконечными. Тогда [4, 5] решение переходит в одну или две голые сингулярности типа БЛХ [6].

1. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
2. L. P. Grishchuk, *Phys.-Usp.* **55**, 210 (2012).
3. L. Marochnik, *Universe* **3**(4), 72 (2017).
4. S. L. Parnovsky, *Physica A* **104**, 210 (1980).
5. S. L. Parnovsky and W. Piechocki, *Gen. Relativ. Gravit.* **49**, 87 (2017).
6. В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, *УФН* **102**, 463 (1970).
7. V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, *Adv. Phys.* **31**, 639 (1982).
8. J. D. Barrow, *Phys. Rep.* **85**, 1 (1982).
9. A. A. Kirillov, *JETP Lett.* **55**, 561 (1992).
10. A. A. Kirillov, *Sov. Phys. JETP* **76**, 355 (1993).
11. G. Montani, *Class. Quantum Grav.* **12**, 2505 (1995).
12. A. A. Kirillov and G. Montani, *JETP Lett.* **66**, 475 (1997).
13. A. A. Kirillov and G. Montani, *Phys. Rev. D* **56**, 6225 (1997).
14. T. Damour and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 920 (2000).
15. T. Damour and M. Henneaux, *Phys. Lett. B* **488**, 108 (2000).
16. T. Damour and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4749 (2001).
17. J. Demaret, M. Henneaux, and P. Spindel, *Phys. Lett. B* **164**, 27 (1985).
18. A. Hosoya, L. G. Jensen, and A. Stein-Schabes, *Nucl. Phys. B* **238**, 657 (1987).
19. A. A. Kirillov and V. N. Melnikov, *Phys. Rev. D* **52**, 723 (1995).
20. R. Benini, A. A. Kirillov, and G. Montani, *Class. Quantum Grav.* **22** 1483 (2005).
21. A. H. Taub, *Annals of Mathematics* **53**, 472 (1951).