Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 8, с. 481 – 483

Неоднородные состояния в нелинейной самофокусирующей среде, порождаемые нелинейным дефектом

С. Е. Савотченко[1)]

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, 308012 Белгород, Россия

Поступила в редакцию 7 марта 2018 г.

После переработки 15 марта 2018 г.

Рассмотрена модель плоского дефекта с нелинейными свойствами, разделяющего среды с нелинейностью керровского типа. Установлено, что в среде с самофокусировкой возникают новые стационарные состояния, существование которых обусловлено нелинейностью дефекта, и которые в случае линейного дефекта не возникают. Получены энергии таких состояний в явном аналитическом виде. Определены условия существования таких состояний в зависимости от характеристик дефекта и среды.

DOI: 10.7868/S0370274X18080027

Изучение нелинейных поверхностных волн, распространяющихся вдоль границ раздела сред с различными физическими характеристиками, остается актуальным в связи с их широким применением в оптических системах хранения данных [1–3]. При теоретическом описании нелинейных волн в средах с дефектами активно используется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), которое для случая среды с эффектом Керра содержит кубическое (относительно искомого поля) слагаемое [3]. К примеру, локализованные состояния на границе нелинейных и линейных сред в различных моделях рассмотрены в [4–6], а влияние пространственной дисперсии среды на локализацию вблизи дефекта было проанализировано в [7].

В данной работе предлагается обобщение предложенной в [8, 9] модели тонкого дефектного слоя, который внутри характеризуется керровской нелинейностью. Основной целью работы является нахождение энергии стационарных состояний, возникающих в рассматриваемой системе исключительно вследствие нелинейности дефекта.

Рассмотрим простую модель контакта двух кристаллических сред. Их границу раздела будем считать тонкой, по сравнению с расстояниями локализации возмущений характеристик среды, ей создаваемыми, а также плоской. Выберем координаты так, что бы плоскость дефекта проходила через начало координат и была расположена в плоскости yOz, перпендикулярно оси Ox.

Будем рассматривать возбуждения, однородно распределенные вдоль плоскости дефекта и неоднородные в перпендикулярном к ней направлении, на основе одномерной модели, описываемые стационарным НУШ:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + \Omega(x)\psi + \gamma(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi, \quad (1)$$

где E – энергия стационарного состояния, m – эффективная масса возбуждения, $\Omega(x) = \Omega_1$, $x < 0$, $\Omega(x) = \Omega_2$, $x > 0$, $\Omega_{1,2}$ – постоянные величины. Параметр нелинейности в НУШ будет иметь вид: $\gamma(x) = -\gamma_1$, $x < 0$, $\gamma(x) = -\gamma_2$, $x > 0$, где $\gamma_{1,2}$ – постоянные величины. Для среды с самофокусировкой (притяжением) параметр нелинейности $\gamma(x)$ является отрицательным, а для дефокусирующих (отталкиванием) сред – положительным. В данной работе будет рассматриваться только случай среды с самофокусировкой, что соответствует $\gamma_{1,2} > 0$.

Нелинейные свойства плоского дефекта будем описывать одномерным потенциалом в виде [8, 9]:

$$U(x) = \{U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x), \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, U_0 – интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом в линейном приближении, расположенным в начале координат, W_0 – параметр нелинейности дефекта, положительное значение которого соответствует дефокусировке, а отрицательное – самофокусировке в тонком дефектном слое.

Следует отметить, что нелинейное уравнение со слагаемым вида (2) использовалось при формулировке модели оптической системы, в которой периодическая модуляция линейного показателя преломления сочетается с одиночным нелинейным дефектом [10, 11]. В качестве примера можно привести дан-

[1)]e-mail: savotchenkose@mail.ru

ную физическую модель нелинейной оптической среды с эффектом Керра, содержащей периодически расположенные дефектные слои, характеризующиеся показателем преломления, сильно отличающимся от показателя преломления оптической среды других слоев между ними [12]. Если считать, что слои перпендикулярны оси Oz, то вектор электрического поля $\mathbf{E}$, направленный вдоль оси Oy, подчиняется уравнению Максвелла: $n^2(z,\mathbf{E})\mathbf{E}''_{tt} = c^2\Delta\mathbf{E}$, где $n(z,\mathbf{E})$ – показатель преломления, представимый для среды, для которой характерен эффект Керра, в виде: $n(z,\mathbf{E}) = n_0 + n_1 - \sigma\alpha|E|^2$, n_0 и n_1 – значения линейных показателей преломления в широком слое и узком слое световода, σ – параметр, который в "фокусирующей" среде равен -1, в "дефокусирующей" среде равен $+1$, α – коэффициент нелинейности среды.

Если ввести комплексную функцию $\psi = E_1 + iE_2$, связанную с напряженностью электрического поля через медленно меняющиеся от z и t функции E_1 и E_2 выражением $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y\{E_1(z,t)\cos(kx-\omega t) + E_2(z,t)\sin(kx-\omega t)\}$, описывающим монохроматическую волну с волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k$ и частотой $\omega = ck/n_0$, то после замены единиц времени и координаты (t в единицах $2n_0/\alpha\omega$, а z заменяется на x в единицах $(n_0/\alpha)^{1/2}/k$), для функции ψ при учете $n_1 \ll n_0$ и $\alpha|\psi|^2 \ll n_0$ получается стандартизованное НУШ: $i\psi'_t = -\psi''_{xx} + 2\sigma|\psi|^2\psi + F(x)$, где $F(x) = \Sigma\{U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x-2an)\psi$, $U_0 = -2hn_1/n_0$, $W_0 = -a\beta/n_0$, h – ширина световода, $2a$ – расстояние между ними, β – коэффициент нелинейности внутри световода. Условие того, что ширина световодов много меньше расстояния между ними позволяет перейти к точечному взаимодействию, описываемому дельта-функцией. В случае слабой связи между плоскопараллельными волноводами, амплитуда поля в них намного больше средней амплитуды поля во всем кристалле, поэтому нелинейные слагаемые было предложено учитывать и внутри самих волноводов [11].

Недавно была предложена новая физическая модель, приводящая в предельном случае к НУШ (ультраквантовый предел, описываемый уравнением Гросса-Питаевского) как с потенциальной ямой конечной ширины, так и с короткодействующим потенциалом в виде дельта-функции [13]. Потенциальная яма, задаваемая (2), позволяет учесть обусловленные нелинейным межэкситонным взаимодействием свойства ловушки для малоамплитудных экситонных колебательных состояний, получить в явном виде распределения полей, описываемые решениями НУШ в элементарных функциях и проанализировать условия их существования и локализации.

Решение НУШ (1) с потенциалом (2) эквивалентно нахождению решения контактной краевой задачи для НУШ без потенциала:

$$\psi''_{xx} + 2m(E - \Omega(x) + \gamma(x)\psi^2)\psi = 0, \tag{3}$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0), \tag{4}$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2m\psi(0)\{U_0 + W_0|\psi(0)|^2\}. \tag{5}$$

Нелинейное граничное условие (5) получается после интегрирования обеих частей уравнения (1) с потенциалом (2) по x на малом интервале $[-\varepsilon;\varepsilon]$ и устремлении ε к нулю [8]. В [9] показано существование локализованных состояний в нелинейных средах с фокусировкой и дефокусировкой с нелинейным дефектом и проанализирована их устойчивость. В данной работе будут рассматриваться более общие состояния, описываемые периодическими решениями НУШ.

В самофокусирующей среде при $E < \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$ НУШ (3) имеет пространственно-периодическое решение в виде:

$$\psi_j(x) = kq_{cj}(m\gamma_j)^{-1/2}\mathrm{cn}(q_{cj}(x - x_{cj}), k), \tag{6}$$

где $q_{cj}^2 = 2m(\Omega_j - E)/(2k^2 - 1)$, k – модуль эллиптической функции cn ($1 > k^2 > 1/2$). Здесь и далее значение индекса $j = 1$ соответствует величинам, относящимся к характеристикам кристалла слева от плоскости дефекта при $x < 0$, а значение индекса $j = 2$ – справа от плоскости дефекта при $x > 0$.

Из граничных условий (4), (5) вытекают соотношения:

$$\eta q_{c1}\mathrm{cn}(q_{c1}x_{c1}, k) = q_{c2}\mathrm{cn}(q_{c2}x_{c2}, k), \tag{7}$$

$$D_{c1} - D_{c2} = mU_0 + W_0k^2q_{c1}^2\mathrm{cn}^2(q_{c1}x_{c1}, k)/\gamma_1, \tag{8}$$

где $\eta = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2}$, $D_{cj} = q_{cj}\mathrm{sn}(q_{cj}x_{cj}, k)/\mathrm{sn}(q_{cj}x_{cj} + K(k), k)/2$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

В точной форме можно определить энергию состояния, для которого $x_{c2} = x_{c1} = 0$. Тогда из (7) следует связь $q_{c2} = \eta q_{c1}$, а из (8) вытекает соотношение:

$$q_{c1}^2 = -\gamma_1 mU_0/W_0k^2. \tag{9}$$

Отсюда следует, что такое состояние возможно только при противоположных знаках параметров дефекта. Из (9) получается энергия в виде:

$$E = \Omega_1 + \gamma_1 mU_0(2k^2 - 1)/2mW_0k^2. \tag{10}$$

Модуль эллиптической функции становится определенным через параметры кристалла и дефекта:

$$k^2 = \frac{U_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{2\{U_0(\gamma_2 - \gamma_1) + W_0(\Omega_2 - \Omega_1)\}}. \qquad (11)$$

При $k \to 1$ из (11) можно получить условие локализации состояния: $U_0/W_0 = (\Omega_1 - \Omega_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)$. В этом случае из (6) получается локализованное состояние, описываемое исчезающей на бесконечности функцией: $\psi(x) = \psi_0/\mathrm{ch}\{(m\gamma_1)^{1/2}(1+\theta(x)\eta)\psi_0 x\}$, где $\theta(x)$ – тета-функция Хевисайда, $\psi_0 = (-U_0/W_0)^{1/2}$.

Состояния такого вида с энергией (10) возможны только, когда плоский дефект разделяет кристаллы с различными по величине (но не по знаку) характеристиками нелинейности ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). Более того, их существование обусловлено исключительно тем, что дефект обладает нелинейными свойствами, поскольку при $W_0 = 0$ они не возникают.

НУШ (3) имеет другое пространственно-периодическое решение:

$$\psi_j(x) = q_{dj}(m\gamma_j)^{-1/2}\mathrm{dn}(q_{dj}(x - x_{dj}), k), \qquad (12)$$

выражаемое через эллиптическую функцию dn, $q_{dj}^2 = 2m(\Omega_j - E)/(2 - k^2)$.

Подстановка (12) в граничные условия (4), (5) приводит к выражениям:

$$\eta q_{d1}\mathrm{dn}(q_{d1}x_{d1}, k) = q_{d2}\mathrm{dn}(q_{d2}x_{d2}, k), \qquad (13)$$

$$D_{d1} - D_{d2} = mU_0 + W_0 q_{d1}^2 \mathrm{dn}^2(q_{d1}x_{d1}, k)/\gamma_1, \qquad (14)$$

где $D_{dj} = k^2 q_{dj}\mathrm{sn}(q_{dj}x_{dj}, k)\mathrm{sn}(q_{dj}x_{dj} + K(k), k)/2$.

В точной форме можно определить энергию состояния, для которого $x_{d2} = x_{d1} = 0$. Тогда из (13) следует связь $q_{d2} = \eta q_{d1}$, а из (14) вытекает соотношение: $q_{d1}^2 = -\gamma_1 mU_0/W_0$. Отсюда следует, что также как и для состояний 1-го типа, такое состояние возможно только при противоположных знаках параметров дефекта. Из этих выражений получается энергия в виде:

$$E = \Omega_1 + \gamma_1 mU_0(2 - k^2)/2mW_0, \qquad (15)$$

а также модуль эллиптической функции:

$$k^2 = 2\frac{U_0(\gamma_1 - \gamma_2) + W_0(\Omega_1 - \Omega_2)}{U_0(\gamma_1 - \gamma_2)}. \qquad (16)$$

Можно отметить, что произведение эллиптических модулей, определяемых выражениями (11) и (16), равно единице. Из (16) вытекает такое же условие локализации состояния. Состояния такого вида, также как и для состояний 1-ого типа, возможны только, когда плоский дефект разделяет кристаллы с различными характеристиками нелинейности, причем такой дефект должен обязательно обладать нелинейными свойствами ($W_0 \neq 0$).

Таким образом, установлено, что граница раздела с нелинейными свойствами между нелинейными самофокусирующими кристаллами может порождать два типа стационарных пространственно-неоднородных периодических состояний, описывающих возбуждения сред, существование которых обусловлено исключительно нелинейными свойствами дефекта. Полученные новые состояния возникают в случае дефокусирующей нелинейности дефекта ($W_0 > 0$) и притягивающего дефекта ($U_0 < 0$) или в случае самофокусирующей нелинейности дефекта ($W_0 < 0$) и отталкивающего дефекта ($U_0 > 0$). Кроме того, состояния такого вида могут реализовываться только в том случае, когда дефект разделяет самофокусирующие среды с различными по величине параметрами нелинейности ($\gamma_1 \neq \gamma_2$).

Следует подчеркнуть, что предложенная в данной работе модель представляет собой обобщение рассмотренной в [7, 8], в рамках которого удалось получить новые типы стационарных состояний, существование которых в нелинейной среде с “линейным” дефектом не возможно.

1. И. С. Паняев, Д. Г. Санников, Компьютерная оптика **41**, 183 (2017).
2. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. A. Zharov, A. D. Boardman, and P. Egan, Phys. Rev. E **69**, 016617-1 (2004).
3. Д. Михалаке, Р. Г. Назмитдинов, В. К. Федянин, Физика элементарных частиц и атомного ядра **20**, 198 (1989).
4. С.Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **19**, 291 (2017).
5. С. Е. Савотченко, ЖТФ **62**, 1776 (2017).
6. С. Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **19**, 567 (2017).
7. С. Е. Савотченко, Известия высших учебных заведений. Физика **47**, 79 (2004).
8. I. V. Gerasimchuk, P. K. Gorbach, and P. P. Dovhopolyi, Ukr. J. Phys. **57**, 678 (2012).
9. И. В. Герасимчук, ЖЭТФ **121**, 596 (2015).
10. A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **87**, 083901 (2001).
11. Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, Rev. Mod. Phys. **83**, 247 (2011).
12. И. В. Герасимчук, ФНТ **26**, 799 (2000).
13. А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **105**, 565 (2017).