

Самофокусировка светового пучка в среде с релятивистской нелинейностью: новые аналитические решения

В. Ф. Ковалев⁺¹), В. Ю. Быченков*#

⁺ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия

* Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

ВНИИА им. Н.Л. Духова, 127055 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 февраля 2018 г.

После переработки 19 марта 2018 г.

В отличие от известных к настоящему времени теорий релятивистской самофокусировки лазерного пучка в плазме, приближенно аналитически, с использованием ренормгруппового подхода, решена задача о стационарном самософокусированном световом пучке с заданным на входе гауссовым радиальным распределением интенсивности. В зависимости от параметров плазмы и лазерного пучка найдены решения, описывающие его продольно-радиальную волноводную структуру, которые демонстрируют три характерных типа релятивистской самофокусировки: (i) самофокусировку на ось, (ii) самофокусировку в виде трубчатого канала, (iii) распределение типа самозахвата.

DOI: 10.7868/S0370274X18080039

1. Со дня открытия Г.А. Аскарьяном [1], более полувековой давности, явления самофокусировки света в нелинейной среде, его изучение, вплоть до настоящего времени, является предметом непрерывно продолжающихся теоретических исследований [2–8] для различных типов нелинейности среды и моделей распространения света. Современные лазеры обладают интенсивностью, при которой на первый план выходит задача о самофокусировке света в плазме с релятивистской нелинейностью. Несмотря на большое число выполненных теоретических работ, все они далеки от наиболее востребованной постановки задачи о формировании самофокусировочной структуры лазерного пучка, изначально имеющего заданную форму радиального распределения интенсивности. Здесь мы восполняем этот пробел. Полноценной заменой такого теоретического подхода не может быть численное моделирование, несмотря на большое число опубликованных численных результатов по релятивистской самофокусировке (например, [7, 9–18]), поскольку речь идет о многопараметрической задаче, для которой только теория может дать полное представление о характере самофокусировки во всем диапазоне значений управляющих параметров и соотношений между ними.

Все известные к настоящему времени теории релятивистской самофокусировки описывают про-

странственное распределение электрического поля светового пучка в плазме, в той или иной степени основываясь на *ad hoc* построениях, что не позволяет принять получаемые решения, их свойства и вытекающие из них параметрические скейлинги как достоверно отвечающие практической задаче о распространении лазерного пучка заданного радиального распределения на входе, например, гауссова пучка. Естественным продвижением было бы решение соответствующей задачи Коши для плазмы, в которой релятивистски интенсивный лазерный пучок модифицирует диэлектрическую проницаемость плазмы, благодаря как эффекту релятивистской перенормировки массы электронов, так и эффекту силового, пондеромоторного воздействия, приводящего к вытеснению электронов из плазменного канала вплоть до их полной эвакуации – электронной кавитации [9–12, 15–17]. Такая задача на основе приближенной теории, предложенной авторами, была ранее решена для нерелятивистской плазмы с кубической и насыщающейся нелинейностями для гауссова входящего светового пучка [19, 20]. В настоящей работе мы распространяем такую теорию, основанную на ренормгрупповом подходе, на среды с релятивистской нелинейностью.

2. Для анализа эффектов самовоздействия светового пучка в плазме используем широко применяемую (см., например, [9, 10], а также разделы 6 и 6.4.1 в монографии [7]) математическую мо-

¹)e-mail: vfkvfvkv@gmail.com

дель на основе нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$2ik\partial_z E + \Delta_{\perp} E + k^2(\epsilon_{nl}/\epsilon_0)E = 0, \quad E(0, \mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) \quad (1)$$

для комплексной медленно меняющейся в направлении распространения z амплитуды $E(z, \mathbf{r})$ электрического поля циркулярно-поляризованной электромагнитной волны с частотой ω , которое отвечает парааксиальному (квазиоптическому) приближению, описывающему стационарную структуру волнового пучка. Здесь $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_0}$ – волновое число электромагнитной волны, Δ_{\perp} – оператор Лапласа в плоскости \mathbf{r} , перпендикулярной оси пучка z , $\epsilon_0 = 1 - 4\pi e^2 n_{e0}/(m_0 \omega^2)$ – линейная диэлектрическая проницаемость плазмы, а ϵ_{nl} – вещественная часть нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы.

Нелинейность в уравнении Шредингера (1) для пространственно-однородной (при отсутствии пучка) плазмы определяется нелинейной рефракцией светового пучка, задаваемой функцией ϵ_{nl} ,

$$\epsilon_{nl} = \epsilon_0 \frac{k_p^2}{k^2} \left(1 - \frac{n_e}{\gamma n_{e0}} \right), \quad k_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_0 c^2}, \quad (2)$$

и обусловлена двумя факторами: релятивистской нелинейностью массы электрона, определяемой величиной релятивистского фактора $\gamma = \sqrt{1 + |E/E_{\text{rel}}|^2}$, где $E_{\text{rel}}^2 = (\omega c m_0/e)^2$, и релятивистской поперечной стрижкой, которая определяет нелинейную деформацию плотности электронов $n_e = n_{e0} N_e(\gamma)$, пропорциональную $\Delta_{\perp} \gamma$. Обычно для N_e используется хорошо известная, стандартная формула

$$N_e = \max \{ 0, 1 + k_p^{-2} \Delta_{\perp} \gamma \}, \quad (3)$$

которая содержит условие неотрицательности электронной плотности, $n_e \geq 0$, и пригодна для описания сильной модуляции плотности, в том числе и эффекта электронной кавитации [9, 10]. Модификация кусочно-гладкой функции (3) для получения плавного перехода от исчезающе малой плотности электронов $N_e \rightarrow 0$ к линейной по $\Delta_{\perp} \gamma$ зависимости путем учета слабого теплового движения электронов обсуждалась в [14, 21, 22]. Как возможный пример такой модификации можно также использовать следующую гладкую аппроксимацию

$$N_e = \frac{(1 + k_p^{-2} \Delta_{\perp} \gamma)}{(1 - \exp(-\alpha_0 (1 + k_p^{-2} \Delta_{\perp} \gamma)))}, \quad (4)$$

где величина положительного параметра $\alpha_0 \gg 1$ задает характерный размер переходной области с изме-

нением градиента интенсивности и ее пространственной кривизны при переходе N_e от линейной зависимости $N_e \propto \Delta_{\perp} \gamma$ к экспоненциально убывающей, $N_e \rightarrow 0$. При этом механизм, ответственный за существование $\alpha_0 \neq \infty$, можно не конкретизировать, ограничиваясь соображением, как и в [14], что при $\alpha_0 \gg 1$ результаты при разных α_0 слабо отличаются между собой.

Использование квазиоптического приближения (1), ограничивает предел применимости теории, который определен условиями, связывающими характерные продольный Λ_{\parallel} и поперечный Λ_{\perp} масштабы изменения комплексной амплитуды E (см. также [4, 7]),

$$k\Lambda_{\parallel}, k_p \Lambda_{\parallel} \gg 1, \quad k\Lambda_{\perp}^2 \approx \Lambda_{\parallel} \max \{ 1; (k\Lambda_{\perp})^2 \frac{\epsilon_{nl}}{\epsilon_0} \}. \quad (5)$$

Первое из условий, которое отвечает длине импульса лазерного пучка, существенно превышающей длины электромагнитной и плазменной волн, позволяет пренебречь вкладом со второй производной электрического поля по продольной (вдоль оси пучка) координате z по сравнению с первым вкладом в (1) при переходе к НУШ от более общего нелинейного волнового уравнения. Второе соотношение связывает характерные поперечный и продольный масштабы изменения электрического поля, обусловленные дифракцией и нелинейностью. Использование НУШ (1) предполагает учет только электромагнитной волны, распространяющейся вглубь нелинейной среды, т.е. исходит из отсутствия обратных волн, которые могли бы возникнуть при наличии резких градиентов диэлектрической проницаемости среды в продольном направлении (см., например, с. 320 в [5] и с. 432 раздела 17.12 в [8]). Условия (5) могут нарушаться в окрестности существования особенности решения (фокуса), где резко уменьшается характерный продольный масштаб изменения комплексной амплитуды поля, и за точкой фокуса, однако полученное в настоящей работе аналитическое решение характеризует поведение пучка только вплоть до возникновения особенности, что оправдывает использование математической модели на основе НУШ (см. также обсуждение этого вопроса в разделе 9.2 в [7]).

При использовании стандартного представления для комплексной амплитуды поля $E = A \exp(iks)$ и после введения $w \equiv A^2 = |E|^2$ и производной $\mathbf{v} = \{v, 0\} = \nabla_{\perp} s$ эйконала s по радиусу, НУШ (1) сводится к следующим двум уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_z v + v \partial_r v - \frac{1}{2} \partial_r \left[\frac{1}{\sqrt{w}} (\Delta_{\perp} \sqrt{w}) + \rho^2 F \right] &= 0, \\ \partial_z w + w \partial_r v + v \partial_r w + wv/r &= 0, \\ F &= 1 - \frac{N_e(\gamma)}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{1 + i_0 w}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (6) использовано следующее обезразмеривание для координат и комплексной амплитуды поля

$$z \rightarrow \sqrt{2\beta} \frac{z}{d}, \quad r \rightarrow \frac{r}{d}, \quad w \rightarrow \frac{w}{w_0}, \quad v \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2\beta}}, \quad (7)$$

где $\beta = 1/2k^2 d^2$ и d – характерный поперечный размер пучка, w_0 – максимальное значение w на границе среды. Вклады, пропорциональные $\rho^2 = \omega_{pe}^2 d^2 / c^2$ и $i_0 = (e/\omega m_0 c)^2 w_0$, определяют роль процессов релятивистской нелинейности и релятивистской стрикции с функцией F . Параметр i_0 можно записать в виде отношения максимальной интенсивности пучка $I_0 = (c/4\pi)w_0$ к релятивистской интенсивности $I_r = \omega^2 m_0^2 c^3 / (4\pi e^2)$, т.е. $i_0 = I_0 / I_r$. В пределе $i_0 w \ll \ll 1$ функция F отвечает среде с кубической нелинейностью, $\lim_{i_0 w \rightarrow 0} F = F_{\text{cub}} = (i_0/2)w$.

Уравнения (6) следует дополнить краевыми условиями, определяющими структуру пучка на границе, $z = 0$, нелинейной среды. Ниже рассматривается цилиндрически-симметричный пучок с плоским начальным фазовым фронтом, т.е. с равной нулю производной эйконала, $v(0, r) = 0$, и гладкой функцией распределения для квадрата модуля начальной амплитуды $w(0, r) \equiv J(r)$.

Для построения аналитических решений уравнений (6) воспользуемся методом ренормгрупповых симметрий [21], суть которого заключается в нахождении симметрий специального вида, которые оставляют инвариантными приближенные решения уравнений (6), построенные по теории возмущений для малого удаления от границы нелинейной среды, и использовании этих симметрий для продолжения решений от границы $z = 0$ вглубь нелинейной среды. Подобная процедура была использована нами ранее при построении решения уравнений (6) в средах с кубической и с насыщающейся нелинейностями [19]. Для рассматриваемых здесь уравнений (6) приближенные аналитические решения имеют вид

$$v(z, r) = (z/2) \partial_{\chi} S, \quad w(z, r) = J(\mu) \frac{\chi}{r} \frac{\partial_{\chi}^2 S}{\partial_{\mu}^2 S}. \quad (8)$$

Здесь параметры χ и μ определены через z и r с помощью соотношений

$$r = \chi (1 + z^2 \partial_{\chi}^2 S), \quad S(\mu) = S(\chi) + \frac{z^2}{4} (\partial_{\chi} S)^2, \quad (9)$$

включающих функцию S , зависящую от переменной $\chi = r - vz$,

$$\begin{aligned} S(\chi) &= \rho^2 F(J) + \frac{1}{\chi \sqrt{J(\chi)}} \partial_{\chi} \left(\chi \partial_{\chi} \left(\sqrt{J(\chi)} \right) \right), \\ F(J) &= 1 - \frac{N_e(\gamma(J(\chi)))}{\gamma(J(\chi))}, \end{aligned} \quad (10)$$

и учитывающую влияние релятивистской нелинейности и релятивистской стрикции среды.

В условиях баланса нелинейных и дифракционных вкладов в (10), т.е. при $S = 0$, получаются одномерные, зависящие только от r , решения в виде волноводных конфигураций [19, 20], реализующихся только для выделенных распределений амплитуды электрического поля пучка на входе в среду. В случае произвольного распределения $J(r)$ на входе в среду, когда нелинейные и дифракционные вклады не уравновешивают друг друга, распределение электрического поля в среде описывается двумерным, зависящим от r и z , решением (8) системы (6).

3. Используя формулы (8), проанализируем эволюцию пучка с гауссовым начальным профилем для $J(r) = \exp(-r^2)$ и при этом будем считать, что на границе нелинейной среды не проявляется эффект электронной кавитации. Тогда для функции F в (10), которая определяется лишь через начальное распределение интенсивности пучка при $z = 0$, можно использовать наиболее простое выражение для N_e , а именно, формулу (4) в условиях отсутствия кавитации электронов, а выражение для $S(\chi)$ после введения переменной $p = \exp(-\chi^2)$ переписать в виде

$$S(p) = \rho^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + i_0 p}} \right) - \frac{2}{1 + i_0 p} - \frac{\ln p}{(1 + i_0 p)^2}. \quad (11)$$

Напомним, что справедливость (11) ограничена только такими распределениями плотностей электронов, которые отвечают условию отсутствия эффекта электронной кавитации на границе нелинейной среды $z = 0$, имеющему вид неравенства $\rho \geq \rho_{\text{cav}}$, где

$$\rho_{\text{cav}}^2 = 2i_0(1 + i_0)^{-1/2}. \quad (12)$$

Отличительной чертой решения (8), (9), (11) является возможность нарастания искажения волнового фронта пучка с ростом координаты z , вплоть до опрокидывания профиля $v(z, r)$, которое реализуется при нарушении однозначной зависимости r от χ , т.е. при $\partial_{\chi} r = \partial_{\chi\chi} r = 0$. Эти соотношения задают радиальную координату точки опрокидывания $r_{br} = \sqrt{\ln 1/p_{br} (1 - z_{br}^2 \{p \partial_p S\}|_{p=p_{br}})}$, записанную через p_{br} из $\partial_{\chi\chi} r = 0$, и соответствующую координату вдоль оси пучка, z_{br} , которая находится из $\partial_{\chi} r = 0$.

3.1. Наиболее просто эти соотношения выглядят при $p_{br} = 1$, когда особенность возникает на оси пучка в точке $\{z_{br}\}_{p=1} \equiv z_{axis}$, задаваемой соотношением

$$z_{axis}^2 = \left[\frac{\rho^2 i_0}{2} \frac{1}{(1+i_0)^{3/2}} + \frac{(2i_0-1)}{(1+i_0)^2} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Условие положительности $z_{axis}^2 > 0$ определяет область параметров ρ^2 и i_0 , для которых существует осевая особенность. Предел $z_{axis}^2 \rightarrow \infty$ явным образом задает зависящий от i_0 минимальный радиус пучка ρ_{axis} ,

$$\rho_{axis}^2 = (2/i_0)(1-2i_0)(1+i_0)^{-1/2}, \quad i_0 \leq \sqrt{2}-1, \quad (14)$$

при превышении которого, т.е. при $\rho > \rho_{axis}$, появляется осевая особенность. Ограничение сверху на величину i_0 в (14) связано с отсутствием электронной кавитации при $z = 0$, что соответствует $\rho_{axis} \geq \rho_{cav}$. Для больших значений интенсивности пучка, $i_0 > \sqrt{2}-1$, область допустимых значений его радиуса ограничена снизу только условием $\rho > \rho_{cav}$.

3.2. Внеосевой особенности соответствует отличная от нуля величина $p_{br} \neq 1$, задаваемая условием $\partial_{\chi\chi} r = 0$, которое в этом случае принимает вид

$$\left\{ 3(\partial_p S + p\partial_{pp} S) + 2 \ln p (\partial_p S + 3p\partial_{pp} S + p^2\partial_{ppp} S) \right\}_{|p=p_{br}} = 0. \quad (15)$$

Граница области параметров, для которых существует внеосевая особенность, определяется при $2 < i_0 \leq \sqrt{13}-1$ уравнением $\rho = \rho_{off}$, где

$$\rho_{off}^2 = \frac{8(3-i_0)}{(i_0-2)\sqrt{1+i_0}}, \quad 2 < i_0 \leq \sqrt{13}-1. \quad (16)$$

Для больших значений интенсивности пучка, $i_0 > \sqrt{13}-1$, нижняя граница радиуса пучка задается, как и в случае **3.1**, условием $\rho > \rho_{cav}$. Сравнение (14) и (16) показывает, что внеосевая особенность решения проявляется при больших интенсивностях пучка, чем осевая особенность.

3.3. С физической точки зрения представляет интерес еще один вариант поведения релятивистского пучка, когда особенность на оси пучка не возникает, однако интенсивность пучка в приосевой области сохраняется на расстояниях, превышающих длину, на которой происходит дифракционное расхождение пучка в линейной среде. Такой режим самозахвата пучка возникает в том случае, когда его радиус оказывается близким к величине ρ_{axis} (14), однако не превосходит ее.

Как подтверждение полученных выше результатов представим графики пространственных распределений квадрата амплитуды электрического поля

светового пучка, полученных с помощью приближенного аналитического решения (8), для различных значений координаты вглубь от границы нелинейной среды.

Рис. 1а характеризует пространственное распределение пучка, которое соответствует фокусировке

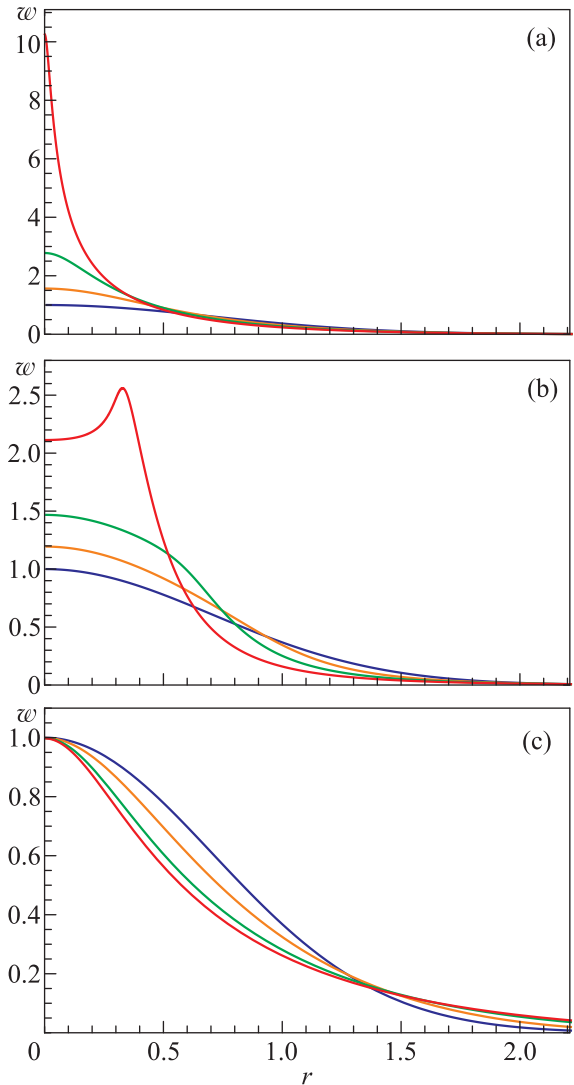


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пространственное распределение квадрата амплитуды электрического поля светового пучка w для трех различных режимов поведения пучка в плазме, отвечающих самофокусировке на ось пучка (режим **3.1**), образованию кольцевой структуры (режим **3.2**), и режиму самозахвата пучка (режим **3.3**). Увеличению z соответствует переход (в окрестности $z \rightarrow 0$) от нижних кривых к верхним для рис. 1а и рис. 1б и от верхних кривых к нижним для рис. 1с

на ось пучка (режим **3.1**) для $i_0 = 0.61$ и $\rho^2 = 150$. Различным кривым соответствует переход от $z = 0$ к $z = 0.6z_{axis}$; $0.8z_{axis}$; $0.95z_{axis}$, где $z_{axis} = 0.211$. Рису-

нок 1b характеризует пространственное распределение пучка, которое соответствует образованию кольцевой структуры (режим **3.2**) для $i_0 = 8$ и $\rho^2 = 20$. Различным кривым соответствует переход от $z = 0$ к $z = 0.5z_{br}$; $0.7z_{br}$; $0.9z_{br}$, где $z_{br} \approx 0.454$. Отметим, что наряду с развитием внеосевой особенности наблюдается также рост w на оси пучка, что формально можно связать с начальной стадией формирования осевой особенности, которая для выбранных параметров пучка могла бы проявиться при $z_{axis} \approx 0.564$, однако она не успевает развиться, поскольку $z_{axis} > z_{br}$. Рис. 1c характеризует пространственное распределение пучка, которое соответствует режиму типа самозахвата волнового пучка и реализуется при $\rho^2 = 5$ и $i_0 = 0.21$. Нелинейность при этом частично компенсирует дифракционное расплывание пучка с ростом координаты z , однако не настолько, чтобы привести к образованию особенности. Различным кривым соответствует переход от $z = 0$ к $z = 0.8$; 1.2 ; 1.6 .

Как следует из рис. 1a и рис. 1b, по мере удаления от границы среды нарастает пространственный градиент интенсивности электрического поля пучка: вблизи его оси для варианта **3.1** и в области формирования кольца для варианта **3.2**, поэтому здесь следует ожидать проявления электронной кавитации. Описание динамики электронной плотности требует учета закона сохранения полного числа электронов и, поэтому, представляет известные трудности в процессе численного моделирования релятивистской стрикции лазерного пучка в плазме [9, 13, 14]. Не претендуя на полное описание процесса электронной кавитации, используемый приближенный аналитический подход дает, однако, возможность качественного описания этого явления с помощью соотношения (4), в которое следует подставить распределение $w(r, z)$ для лазерного пучка, записанное через его характеристики на границе плазмы (8). Эти результаты можно уточнять, используя приближение следующего порядка по параметрам нелинейности при построении ренорм-групповых симметрий. Отметим, что результат типа (8) можно также получить и для случая, когда полная кавитация электронов имеет место уже на границе плазмы, однако такой анализ выходит за рамки данной работы.

4. Подводя итог изложенному выше, подчеркнем, что в настоящей работе в модели НУШ для лазерного пучка в плазме с релятивистско-пандеромоторной нелинейностью получено приближенное аналитическое решение задачи Коши, описывающее каналированное продольно-радиальное распределение интенсивности света от места его входа в плазму в ви-

де гауссовского пучка. Инструментом исследования служило использование теории приближенных групп преобразований. Несмотря на имеющиеся ограничения теории, связанные с применением приближенных групп преобразований, она в явном виде дает зависимость решений от управляющих параметров задачи таких, как безразмерный характерный радиус пучка $\rho = \omega_{pe}d/c$ и отношение максимальной интенсивности пучка к релятивистскому значению, $i_0 = I_0/I_r$. Это выгодно отличает найденные аналитические решения от результатов численного моделирования, позволяя предсказывать свойства самосфокусированных пучков в широком диапазоне лазерно-плазменных параметров и прогнозировать поведение лазерного пучка в заданных экспериментальных условиях. В свою очередь, разнообразие экспериментальных условий, в которых может проявляться релятивистская самофокусировка диктуется широтой применений современных лазерных пучков релятивистской интенсивности. Описание их распространения важно для таких реализаций в протяженной плазме, как быстрый поджиг в лазерном термоядерном синтезе [23], получение высокоэнергетичных электронов в режиме возбуждения кильватерных полей [24], проникновение лазерного излучения сквозь преплазму на фронте облучаемой мишени [25]. В размерных переменных радиус пучка и его интенсивность на границе среды выражаются через параметры ρ и i_0 , отношение (ω/ω_{pe}) и длину волны лазера λ следующим образом:

$$\begin{aligned} d &\approx 0.16 \times (\omega/\omega_{pe})\lambda[\text{мкм}]\rho(\text{мкм}), \\ I_0 &\approx 2.74 \times 10^{18} \left(\frac{1}{\lambda[\text{мкм}]}\right)^2 i_0 (\text{Вт/см}^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Характер пространственного перераспределения энергии пучка зависит от начального радиуса пучка и от отношения максимальной интенсивности пучка к релятивистскому значению. Это продемонстрировано на трех примерах характерных лазерно-плазменных каналов. При небольшой интенсивности пучка i_0 и при радиусе пучка ρ , близком к значению ρ_{axis} , но не превосходящем его, реализуется режим самозахвата пучка (**3.3**). Близкий к подобному режим отмечался в работах [26, 27] для одномерных или почти одномерных решений модели НУШ с постоянной или медленно изменяющейся с координатой z амплитудой A , получаемых в рамках параксиального приближения [27] или при анализе пучка с поперечной конфигурацией электрического поля, близкой к низшей собственной моде стационарного решения НУШ [26]. При умеренной интенсивности пучка, сравнимой с релятивистским значением,

и для большого радиуса $\rho \gg \rho_{\text{axis}}$, реализуется “классический” режим самофокусировки на ось (3.1). Подавляющее число работ по численному моделированию релятивистской самофокусировке, демонстрируют именно этот режим [7, 9–11, 15]. Наконец, значительное превышение релятивистского значения по интенсивности может приводить к образованию кольцевой структуры по мере распространения светового пучка вглубь среды (3.2). Такой режим наблюдался в численном моделировании [7, р. 142], но, в отличие от рассмотренного нами примера, отвечал кольцевому каналу с интенсивностью меньшей, чем в сопутствующем центральном филаменте. Другой вариант кольцевой структуры, которая является более близкой к изображенной на рис. 1b, и в которой интенсивность поля в кольце превосходит интенсивность на оси пучка, наблюдался в работах [17, 18]. Подчеркнем, что найденные решения допускают режим полной кавитации электронов. Отметим, что согласно формулам (17) для различных режимов пучка, представленных на рис. 1, максимальная интенсивность лазерного излучения на входе в среду составляет $I_0 (\lambda[\text{мкм}])^2 = 0.58 \times 10^{18} \text{ Вт/см}^2$ для варианта 1c, $I_0 (\lambda[\text{мкм}])^2 = 1.67 \times 10^{18} \text{ Вт/см}^2$ для варианта 1a, и $I_0 (\lambda[\text{мкм}])^2 = 22 \times 10^{18} \text{ Вт/см}^2$ для варианта 1b. Эти значения являются типичными для экспериментов и численных расчетов по релятивистской самофокусировке [7, 9–11, 15, 17, 18].

Исторически, разрабатываемые теоретические модели релятивистской самофокусировки прежде всего нацеливались на установление так называемой критической мощности, при превышении которой возникает самофокусировка пучка, как результат превалирования нелинейности над дифракцией. При этом, к настоящему времени большинство работ, обращающихся к релятивистской самофокусировке, в качестве критической мощности ссылаются на величину $P_c \approx 17(\omega^2/\omega_{pe}^2) \text{ ГВт}$, получаемую из исследования одномерного решения НУШ, как пороговое значение мощности пучка, при превышении которой возникает эффект кавитации электронов [15]. В предлагаемом исследовании нами анализировались двумерные решения НУШ с особенностями, которые возникают как на оси пучка, так и вне его оси (кольцевая структура), а также решения, характеризующие самозахват пучка. Величина мощности гауссова пучка на входе в среду, которая характеризует подобные решения, может быть как больше, так и меньше P_c . Приведем формулу для величины мощности гауссова пучка на границе плазмы в зависимости от его параметров и параметров плазмы

$$P = \frac{\rho^2 i_0 \omega^2 m^2 c^5}{4 \omega_{pe}^2 e^2} \approx 2.18 \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \rho^2 i_0 \text{ (ГВт)}. \quad (18)$$

Для параметров рис. 1 получаем $\rho^2 i_0 = 91.5$ для варианта рис. 1a, $\rho^2 i_0 = 160$ для варианта рис. 1b и $\rho^2 i_0 = 1.05$ для варианта рис. 1c. Оценка мощности пучка для этих вариантов дает $P_{1a} \approx 200(\omega^2/\omega_{pe}^2) \text{ ГВт}$, $P_{1b} \approx 348(\omega^2/\omega_{pe}^2) \text{ ГВт}$ и $P_{1c} \approx 2.29(\omega^2/\omega_{pe}^2) \text{ ГВт}$, т.е. наименьшей мощности соответствует режим 3.3, а наибольшей – режим 3.2. Режим самозахвата 3.3, который фактически отвечает условию, когда дифракционная расходимость пучка сбалансирована нелинейностью, с физической точки зрения наиболее близко подходит для сравнения с величиной критической мощности. Минимальная величина мощности гауссова пучка на входе для такого режима получается из (18) с учетом (14) при $i_0 = \sqrt{2} - 1$ и равна $P_{3.3 \text{ min}} \approx 0.629(\omega^2/\omega_{pe}^2) \text{ ГВт}$, т.е. существенно меньше, чем обычно используемое значение P_c . Превышение P_{1a} , P_{1b} и P_{1c} над минимальной мощностью $P_{3.3 \text{ min}}$ составляет 3.64 для варианта 1c, 318 для варианта 1a, и 553 для варианта 1b. Эти оценки находятся в качественном согласии с результатами численного эксперимента [17], в котором было зафиксировано образование кольцевой структуры для релятивистского лазерного пучка в плазме только при значительном (более, чем в тридцать раз) превышении мощности пучка над критическим значением. Отметим, что обсуждаемые применительно к рис. 1 величины мощности пучков, распространяющихся в плазме с характерными значениями плотности $n_{e0}/n_{cr} = (\omega_{pe}/\omega)^2$ от 0.005 до 0.1, лежат в диапазоне от 0.1 до 600 ГВт, который в настоящее время интенсивно используется в численном моделировании [7, 9, 10, 17] и экспериментах [7, 28, 29]. В заключение приведем оценку (в размерных переменных) величины расстояния от границы плазмы до точки z_{br} образования особенности решения

$$L_{\text{sing}} \approx 0.16 \times (\omega/\omega_{pe})^2 \rho^2 \lambda[\text{мкм}] z_{br} \text{ (мкм)}. \quad (19)$$

Для параметров рис. 1a и 1b эта величина при $n_{e0}/n_{cr} = 0.036$ и $\lambda = 1 \text{ мкм}$ составляет 140 мкм для рис. 1a (осевая особенность) и 40 мкм для рис. 1b (внеосевая особенность), что по порядку величины близко к результатам численного эксперимента [17].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 17-12-01283).

1. Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ 42(6), 1567 (1962).
2. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохолов, УФН 93(1), 19 (1967).

3. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН **111**(2), 203 (1973).
4. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Изд-во ИПФ РАН, Нижний Новгород (1997), 220 с.
5. L. Bergé, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
6. C. Sulem and P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrodinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Springer Series: Applied Mathematical Sciences, Vol. 139, Springer-Verlag – N.Y. – Berlin – Heidelberg (1999), 339 p. 9 figures, ISBN 0-387-0861M.
7. *Laser Physics at Relativistic Intensities*, ed. by A. V. Borovsky, A. L. Galkin, O. B. Shiryayev, and T. Augustine, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, vol. 34, Springer, N.Y. (2009), 218 p. ISBN: 978-3-642-07787-6.
8. *Self-Focusing: Past and Present*, ed. by R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y. R. Shen, Fundamentals and Prospects, Springer Series: Topics in Applied Physics, vol. 114, Springer, N.Y. (2009), 605 p. 299 illus., ISBN:978-0-387-32147-9.
9. А. Б. Борисов, А. В. Боровский, В. В. Коробкин, А. М. Прохоров, Ч. К. Роудс, О. Б. Ширяев, ЖЭТФ **101**(4), 1132 (1992).
10. А. В. Borisov, A. V. Borovskiy, O. B. Shiryayev, V. V. Korobkin, A. M. Prokhorov, J. C. Solem, T. S. Luk, K. Boyer, and C. K. Rhodes, Phys. Rev. A **45**(8), 5830 (1992).
11. B. Hafizi, F. Ting, P. Sprangle, and R. F. Hubbard, Phys. Rev. E **62**(3), 4120 (2000).
12. А. Комашко, С. Мusher, А. Рубенчик, С. Турицын, М. Фейт, Письма в ЖЭТФ **62**(11), 849 (1995).
13. M. D. Feit, A. M. Komashko, and A. M. Rubenchik, Phys. D **152–153**, 705 (2001).
14. M. D. Feit, A. M. Komashko, S. L. Musher, A. M. Rubenchik, and S. K. Turitsyn, Phys. Rev. E **57**(6), 7122 (1998).
15. G.-Z. Sun, E. Ott, Y. C. Lee, and P. Guzdar, Phys. Fluids **30**(2), 526 (1987).
16. F. Cattani, A. Kim, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **64**, 016412 (2001).
17. N. Naseri, W. Rozmus, and D. Pesme, Phys. Plasmas **23**, 113101 (2016).
18. N. Naseri, S. G. Bochkarev, and W. Rozmus, Phys. Plasmas **17**, 033107 (2010).
19. V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, Phys. Rev. A **61**(3), 033809 (2000).
20. В. Ф. Ковалев, К. И. Попов, В. Ю. Быченков, ЖЭТФ **141**(1), 31 (2012).
21. Д. В. Ширков, В. Ф. Ковалев, УФН **178**(8), 849 (2008).
22. S. D. Patil, M. V. Takale, V. J. Fulari, D. N. Gupta, and H. Suk, Appl. Phys. B, Laser and Optics **111**, 1 (2013).
23. S. C. Wilks, W. L. Kruer, M. Tabak, and A. B. Langdon, Phys. Rev. Lett. **69**, 1383 (1992).
24. T. Tajima and J. M. Dawson, Phys. Rev. Lett. **43** 267 (1979).
25. P. McKenna, D. C. Carroll, O. Lundh et al. (Collaboration), Laser and Particle Beams **26**, 591 (2008).
26. А. В. Borisov, X. Shi, V. B. Karpov, V. V. Korobkin, J. C. Solem, O. B. Shiryayev, A. McPherson, K. Boyer, and C. K. Rhodes, J. Opt. Soc. Am. B **11**(10), 1941 (1994).
27. S. Sen, M. A. Varshney, and D. Varshney, ISRN Optics (2013), Article ID 642617, 8 p. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/642617>.
28. А. В. Borisov, J. W. Longworth, K. Boyer, and C. K. Rhodes, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Physics **95**, 7854 (1998).
29. L. M. Chen, H. Kotaki, K. Nakajima et al. (Collaboration), Phys. Plasma **14** 040703 (2007).