

Вязкая регуляризация разрушающихся волн Фарадея

А. В. Базилевский, В. А. Калиниченко¹⁾, А. Н. Рожков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 апреля 2018 г.

После переработки 24 апреля 2018 г.

Приведены результаты экспериментов по изучению влияния вязкости жидкости на параметры стоячих поверхностных гравитационных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде. Впервые показано, что шестидесятикратное по сравнению с водой увеличение вязкости рабочей среды кардинально изменяет параметры нелинейной второй волновой моды – наблюдается регуляризация волн при полном отсутствии их разрушения. Исследовано влияние вязкости на резонансные зависимости и процесс затухания волн. Численный анализ дисперсионного соотношения гравитационных волн показал, что наблюдаемые в эксперименте эффекты связаны с наличием области отсечки мелкомасштабных возмущений, где вязкая диссипация становится доминирующим фактором и происходит подавление коротких волн.

DOI: 10.7868/S0370274X1811005X

Введение. Одной из задач динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью является подавление ее интенсивных колебаний, сопровождаемых разрушением волн и создающих дополнительные динамические нагрузки на стенки сосуда. На практике указанная проблема решается путем использования конструктивных элементов-демпферов в виде устанавливаемых в сосудах с жидкостью горизонтальных или вертикальных пластин [1]. При колебаниях жидкости на кромках пластин периодически образуются и срываются вихри, обеспечивающие более высокое демпфирование по сравнению с вязкой диссипацией [2].

В теоретических моделях [3] влияние вязкости на капиллярно-гравитационные волны учитывается путем разделения движения жидкости на потенциальную и вихревую части, что приводит к комплексному дисперсионному уравнению. Однако экспериментально вязкое подавление интенсивных колебаний жидкости не исследовалось. Обычно в опытах диссипативные потери волн количественно оцениваются лишь их коэффициентом затухания при отсутствии внешнего воздействия [2]. Отметим, что если собственная частота колебаний жидкости значительно превосходит коэффициент затухания, то жидкость предполагается маловязкой.

Целью настоящей работы было экспериментальное исследование влияния вязкости жидкости на разрушающиеся стоячие гравитационные поверхностные волны, возбуждаемые при параметрическом ре-

зонансе. Механизм возбуждения таких волн достаточно хорошо изучен [4], и в настоящее время параметрический резонанс как способ возбуждения стоячих волн широко используется в гидродинамическом эксперименте [5, 6].

Постановка эксперимента. Влияние вязкости на интенсивные колебания жидкости изучалось в режиме параметрического возбуждения второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h = 15$ см в прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см, шириной $W = 4$ см и высотой 50 см. Изготовленный из оргстекла бассейн размещался на платформе электромеханического вибростенда, задающего сосуду гармонические колебания в вертикальном направлении.

Двумерные волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея [7], когда круговая частота колебаний сосуда Ω в два раза превышает частоту ω возбуждаемых волн. При фиксированной амплитуде колебаний сосуда $s = 0.75$ см вариации Ω в диапазоне 18–24 с⁻¹ обеспечивали изменения крутизны $\Gamma = H/\lambda$ в пределах 0.004–0.66 при длине волны $\lambda = 50$ см, где H – высота волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. Диапазон изменения перегрузки $\varepsilon = s\Omega^2/g$ оценивался от 0.24 до 0.44.

В качестве рабочих жидкостей в опытах использовались дегазированная водопроводная вода, растительное масло и водный раствор сахара. Плотность масла и раствора сахара была измерена ареометром, а их динамическая вязкость – с помощью реометра НААКЕ RS-1. Значения поверхностного натяже-

¹⁾e-mail: kalin@ipmnet.ru

Таблица 1. Свойства рабочих жидкостей и безразмерные параметры

Жидкость	ρ (г/см ³)	ν (сСт)	σ (дин/см)	λ_m (см)	Re
Вода	1.0	1	73	1.73	10^4 – 10^6
Масло растительное	0.9	61	40	1.33	10^3 – 10^4
Водный раствор сахара	1.3	86	80	1.57	10^3 – 10^4

ния взяты из справочной литературы. Все измерения и эксперименты проводились при температуре 20–21 °С. Полученные величины плотности ρ , кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения σ приведены в табл. 1.

Число Рейнольдса $Re = U_0\lambda/\nu$, определенное по максимальной скорости $U_0 = \Omega H/4$ и длине волны $\lambda = 50$ см, варьировалось в пределах от 10^3 до 10^6 .

Характерная длина волны $\lambda_m = 2\pi\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ определяет границу между капиллярными и гравитационными волнами. Поскольку для всех используемых жидкостей выполняется условие $\lambda_m \ll \lambda$, то исследуемая волновая мода относится к волнам гравитационным.

Видеосъемка картин течения проводилась фотокамерами DIMAGE Z2 и Canon PowerShot SX50HS в подвижной жестко связанной с сосудом системе координат. Скорость съемки – 30 и 120 кадров/с. Последующая обработка видеозаписей осуществлялась с использованием пакета ImageJ.

Экспериментальное значение коэффициента затухания b оценивалось следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась вторая волновая мода. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений жидкости.

Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по данным видеосъемки производились с точностью 0.1 см. Величина b определялась как $b = T^{-1} \ln(H_m/H_{m+1})$, где $T = 2\pi/\omega$ – период волны, H_m и H_{m+1} – значения высоты волны, взятые через период колебаний. При сравнении диссипативных свойств жидкостей в качестве безразмерной характеристики использовался декремент $\delta = bT$.

При указанных условиях эксперимента частота второй волновой моды равна $\omega_0 = (gk \operatorname{th} kh)^{1/2} = 10.85 \text{ с}^{-1}$, где g – ускорение свободного падения, $k = 2\pi/\lambda$ волновое число. Полученные в опытах коэффициенты затухания $b_{\text{exp}} < 1 \text{ с}^{-1}$ для всех жидко-

стей. Поскольку $\omega_0/b_{\text{exp}} \sim 10$, то исследуемые среды могут быть отнесены к маловязким.

Результаты и обсуждение. Наблюдаемые на поверхности воды волны Фарадея могут быть разделены на три категории: регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны.

К регулярным волнам нами отнесены те волны, профиль которых обладает временной периодичностью и пространственной симметрией относительно вертикали, проведенной через пучности волны (рис. 1а.)

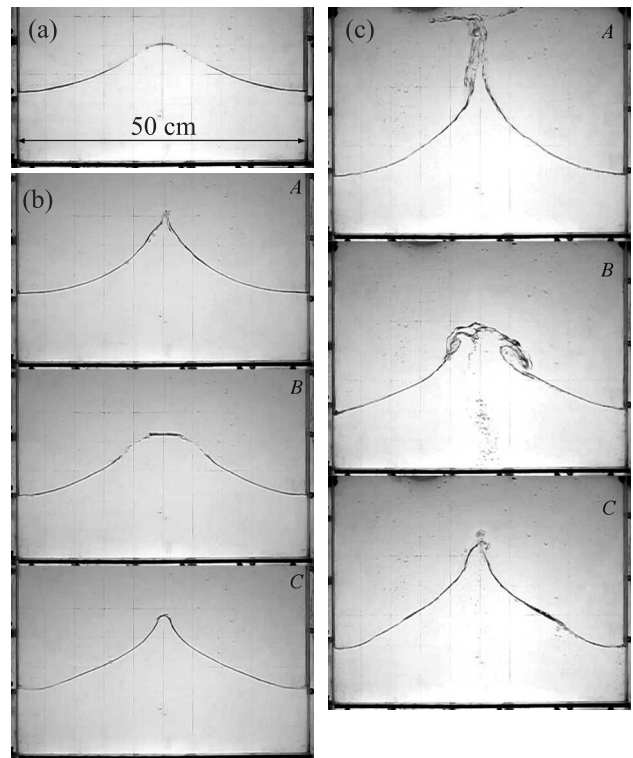


Рис. 1. (а) – Регулярная волна на поверхности воды – результат наложения семи последовательных профилей максимального развития второй моды: $\Omega = 23.19 \text{ с}^{-1}$, $H = 7.9$ см. (б) – Нерегулярные волны – режим периодического триплета: $\Omega = 22.43 \text{ с}^{-1}$. (с) – Режим периодического триплета в случае разрушающихся волн: $\Omega = 20.60 \text{ с}^{-1}$

Волны, у которых нарушается временная и пространственная симметрия, но объем колеблющейся жидкости сохраняет связность, классифицировались как нерегулярные волны Фарадея. Для волн этой категории характерен режим периодического триплета – три периодически повторяющиеся волновые профили *A*, *B* и *C* (рис. 1b). Для профиля *A* характерна наибольшая крутизна и острый угол при гребне. В случае профиля *B* гребень плоский. Профиль *C* имеет скругленный гребень. Волновой профиль *A* с заостренным гребнем вновь появляется после профиля *C* – тем самым формируется повторяющийся цикл, период которого равен трем волновым периодам.

Волны, в которых со свободной поверхности срывались отдельные капли жидкости или струи, отнесены к разрушающимся волнам Фарадея, для которых характерен переход от односвязной к многосвязной свободной поверхности. Этим волнам также свойственен периодический триплет (рис. 1c). Волновой профиль *A* характеризуется наибольшей высотой, крутизной и выбросом струи. Профиль *B* имеет сглаженный гребень, по краям которого также наблюдаются один или два выброса воды; в составляющей *C* триплета признаки разрушения минимальны или отсутствуют.

Наблюдаемые на поверхности масла и раствора сахара стоячие гравитационные волны во всем частотном диапазоне параметрического возбуждения являются регулярными. На рис. 2 показана форма свободной поверхности при наложении десяти профилей максимального развития волновой моды для масла (а) и сахара (б).

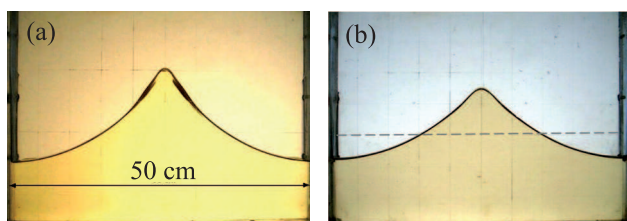


Рис. 2. (Цветной онлайн) Регулярные волны на поверхности растительного масла (а) и водного раствора сахара (б), возбуждаемых на частотах $\Omega = 19.63$ и 20.20 с^{-1} , и имеющих высоты $H = 14.9$ и 11.1 см , соответственно; показаны результаты наложения десяти профилей максимального развития волны. Пунктирная прямая соответствует невозмущенной свободной поверхности жидкости

Асимметричность приведенных на рис. 2 профилей относительно горизонтальной свободной поверхности свидетельствует о нелинейности волн, а по значениям высот они сопоставимы с нерегулярными и

разрушающимися волнами на поверхности воды. Однако никаких признаков отрыва капель или образования струй, как в случае воды, не наблюдалось.

В экспериментах в качестве интегральной волновой характеристики использовались резонансные зависимости установившейся высоты волны от частоты $H(\Omega)$ колебаний сосуда (рис. 3). Для второй моды на поверхности всех исследуемых жидкостей высота H волны при уменьшении Ω монотонно возрастает до некоторого значения частоты, соответствующей срыву колебаний.

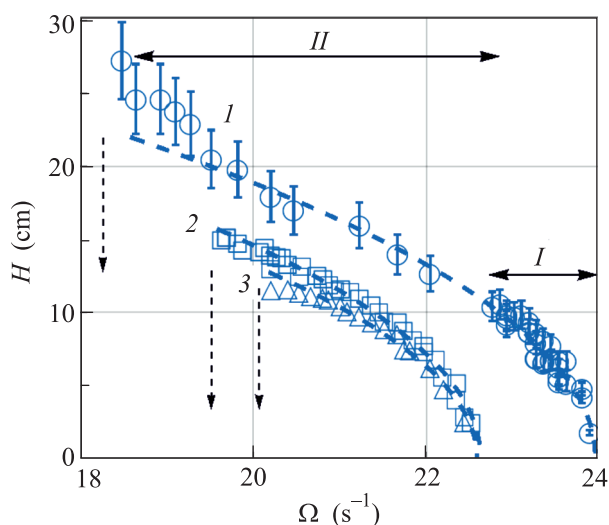


Рис. 3. (Цветной онлайн) Резонансные зависимости $H(\Omega)$: 1 – вода; 2 – масло; 3 – раствор сахара; *I*, *II* – диапазоны возбуждения регулярных, нерегулярных и разрушающихся волн на воде; пунктирные стрелки – срыв колебаний; пунктирные кривые – интерполяция данных эксперимента

Если для воды (*I*) регулярные и нерегулярные/разрушающиеся волны наблюдаются в частотных диапазонах *I* и *II*, то волны на поверхности масла и раствора сахара остаются регулярными во всем частотном диапазоне возбуждения второй волновой моды – данные 3 и 4 на рис. 3.

Отметим сдвиг резонансных зависимостей для масла (2) и раствора сахара (3) в низкочастотную область, что обусловлено уменьшением собственной частоты и сужением резонансных зон за счет увеличения вязкости рабочих жидкостей по сравнению с водой.

Анализ процесса затухания второй волновой моды показал, что в случае растительного масла и раствора сахара декремент возрастает в пять раз по сравнению с водой (рис. 4). При варьировании начальной высоты H_0 волны от 7 до 12 см получены

следующие значения декремента: для воды $\delta = 0.092$ и близкие величины $\delta = 0.495$ и 0.510 для масла и раствора сахара.

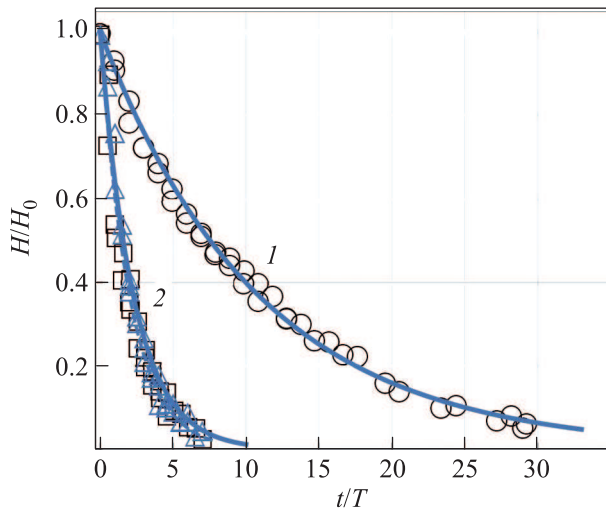


Рис. 4. (Цветной онлайн) Затухание второй волновой моды на свободной поверхности воды (1) и масла/раствора сахара (2). Кривые – интерполяция данных эксперимента

Вязкость рабочей среды в значительной мере влияет на динамику нерегулярных и разрушающихся волн.

В случае воды переход от регулярных к разрушающимся волнам происходит при крутизне $\Gamma > 0.22$. На рис. 5 приведена последовательность кадров, отображающих зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня в центральной части сосуда; соответствующий временной интервал отвечает половине волнового периода. При переходе впадина–гребень центральная часть жидкости перемещается вверх, и в интервале 0.944–0.976 с на нелинейном волновом профиле четко прослеживаются мелкомасштабные возмущения размерами не более 5 см. При $t = 1.016$ с наблюдается сформировавшаяся каверна, схлопывание которой в дальнейшем ($t \geq 1.040$ с) приводит к струйному всплеску с отрывом капель.

Профили волн на поверхности растительного масла и раствора сахара – абсолютно гладкие во всем диапазоне крутизны Γ . На рис. 6 в качестве примера приведена последовательность профилей в случае второй моды ($\Gamma = 0.30$) на поверхности масла в течение одного волнового периода. Видно, что волна нелинейная и регулярная, профиль асимметричный, но каких-либо мелкомасштабных возмущений и признаков разрушения волны не наблюдается.

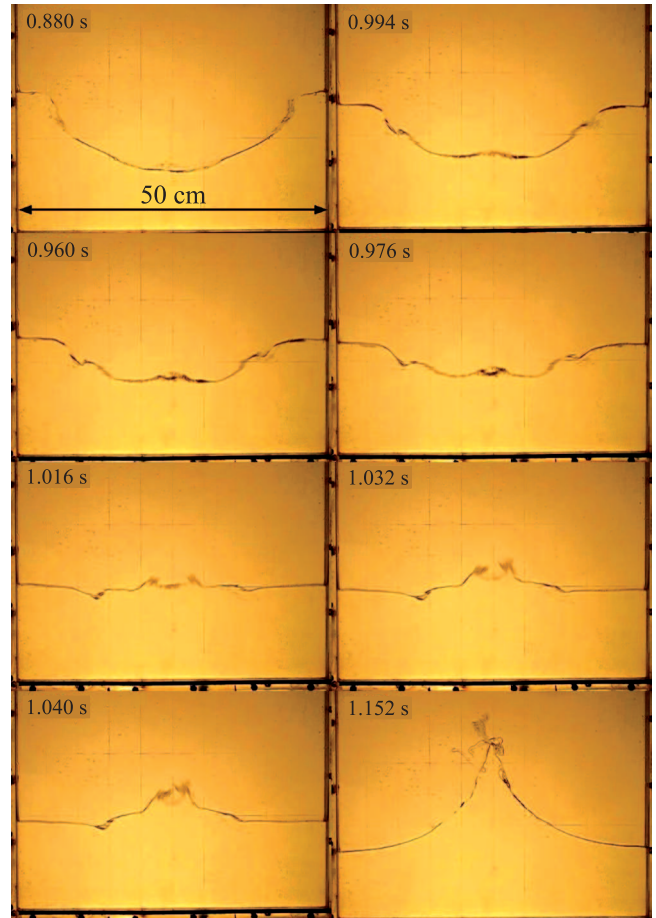


Рис. 5. (Цветной онлайн) Последовательность кадров, отображающих механизм разрушения гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности воды в течение половины периода волны: $\Omega = 21.67 \text{ c}^{-1}$; крутизна волны $\Gamma \sim 0.30$; момент времени указан в верхнем левом углу кадра

Единственное отличие в волновых картинах на рисунках 5 и 6 – вязкость рабочей жидкости. Увеличение вязкости почти на два порядка по сравнению с водой обеспечивает полное подавление процесса разрушения и регуляризацию стоячей волны: исчезают мелкомасштабные возмущения, приводящие к образованию коллапсирующей каверны. Таким образом, вязкость жидкости является своеобразным фильтром короткомасштабных возмущений. Отметим, что все наблюдаемые закономерности определяются только вязкостью и не связаны с влиянием поверхностного натяжения, т.к. изменения σ в ту или другую сторону по отношению к значению для воды (табл. 1) никак не сказываются на полученных результатах.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов мы провели численный анализ дис-

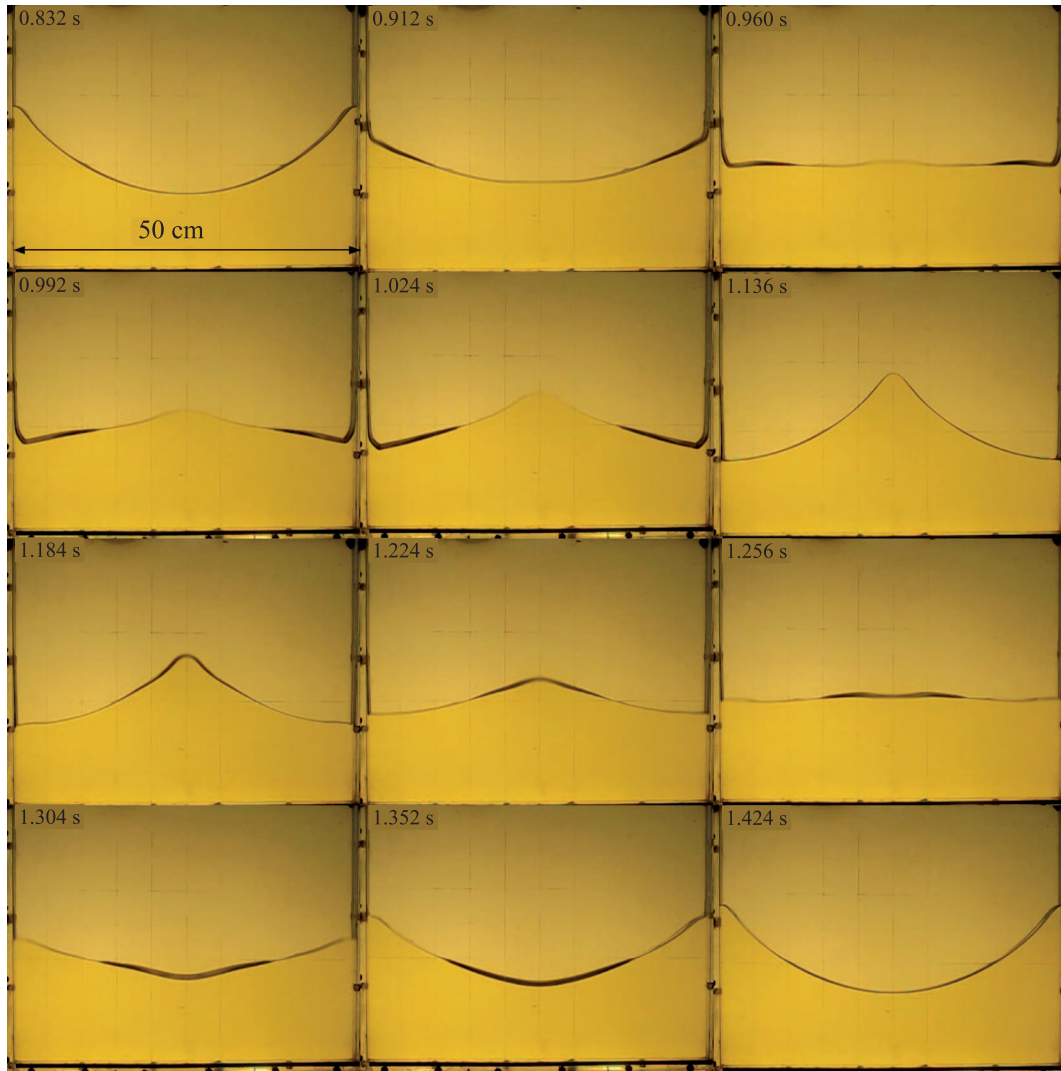


Рис. 6. (Цветной онлайн) Последовательность кадров, отображающих вторую волновую моду на поверхности растительного масла в течение одного волнового периода: $\Omega = 19.88 \text{ c}^{-1}$; крутизна волны $\Gamma = 0.30$

персионного соотношения $\omega = \omega(k)$ для свободных стоячих гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости [8]

$$[1 + \zeta^2]^2 = 16\vartheta^3(\zeta - \vartheta), \quad (1)$$

где $\vartheta = \nu k^2/\omega_0$; $\zeta = -(\omega^* - 2\nu k^2)/\omega_0$; $\omega^* = b + i\omega$; $\omega_0 = (gk)^{1/2}$; $k = \pi n/L$; $n = 2$.

Уравнение (1) связывает величины ζ и ϑ , устанавливая соотношение между длиной λ и частотой ω волны.

Результаты численного решения уравнения (1) для используемых в эксперименте жидкостей приведены на рис. 7. Видно, что для воды, масла и раствора сахара $\omega = 0$ при некоторых $\lambda_{cr} = 0.02, 0.40$ и 0.48 см соответственно. Следовательно, имеются критические значения длины волны λ_{cr} , определяющие

коротковолновый предел возбуждения гравитационных волн: при $\lambda < \lambda_{cr}$ вязкость полностью подавляет всякое волновое движение жидкости. При увеличении вязкости этот предел возрастает.

Полученный результат подтверждает данные эксперимента о вязкой регуляризации разрушающихся стоячих волн, поскольку именно коротковолновой отсечкой можно объяснить отсутствие мелкомащтабных возмущений на профилях волн на поверхности вязкой жидкости. Заниженные расчетные значения λ_{cr} можно объяснить тем, что в дисперсионном соотношении (1) не учтены конечная глубина жидкости, а также вязкие потери на боковых стенках и дне сосуда. В теоретических работах [9, 10] в приближении периодического пограничного слоя показано, что коэффициент затухания b волновой мо-

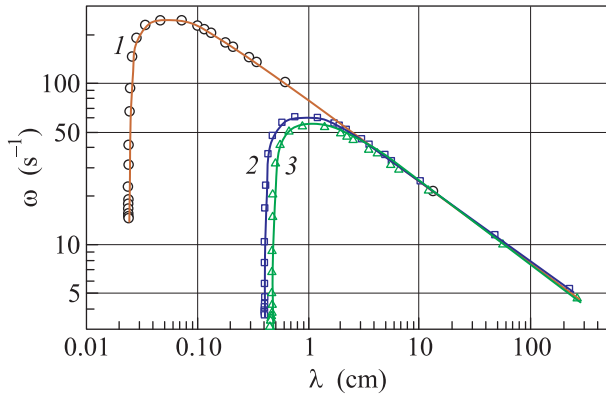


Рис. 7. (Цветной онлайн) Зависимость частоты свободных стоячих гравитационных волн от длины волны: 1 – вода; 2 – растительное масло; 3 – раствор сахара

ды номера n на поверхности жидкости глубины h в сосуде заданной длины L и ширины W определяется как $b = b_1 + b_2 + b_3$, где $b_1 = 2\nu k^2$, $b_2 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} \left(\frac{L+W}{LW} + k \frac{L-2h}{L \operatorname{sh} 2kh} \right)$, $b_3 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh}$.

Здесь ν – кинематическая вязкость жидкости; коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 определяют диссипацию волновой энергии во всем объеме жидкости, на стенках и дне сосуда, соответственно. В таблице 2 приведены измеренные b_{exp} и рассчитанные b_{the} коэффициенты затухания, а также значения b_{1-3} . Несмотря на существенное отличие экспериментальных и теоретических значений коэффициента затухания, видно, что основной вклад в потери волновой энергии вносит диссипация на стенках и дне сосуда при весьма малом значении b_1 , определяющем потери в объеме жидкости.

Таблица 2. Измеренные и рассчитанные коэффициенты затухания

	Вода	Масло	Раствор сахара
$b_{\text{exp}}, \text{c}^{-1}$	0.157	0.863	0.752
$b_{\text{the}}, \text{c}^{-1}$	0.065	0.525	0.632
b_1, c^{-1}	0.0003	0.0193	0.0275
b_2, c^{-1}	0.0634	0.4954	0.5916
b_3, c^{-1}	0.0013	0.0106	0.0126

Оценка коэффициента затухания $\operatorname{Re}[\omega^*] = b$ по дисперсионному уравнению (1) для всех трех жидкостей совпадает по величине с b_1 .

Если учесть поверхностное натяжение жидкостей σ и рассмотреть гравитационно-капиллярные волны, для которых $\omega_0 = (gk + \sigma k^3/\rho)^{1/2}$, то согласно [3], дисперсионное уравнение (1) не изменится, а значения критической длины волны для воды, масла и раствора сахара $\lambda_{\text{cr}} = 4.8 \cdot 10^{-6}$, 0.03 и 0.04 см оказы-

ваются меньше соответствующих величин для гравитационных волн.

Таким образом, хотя дисперсионное уравнение (1) для бесконечно глубокой и неограниченной в горизонтальном направлении вязкой жидкости качественно объясняет наличие критической длины волны, оно не обеспечивает количественного совпадения с данными эксперимента, поскольку теоретическая модель не учитывает влияние конечной глубины жидкости и стенок сосуда. Достижение лучшего соответствия между теорией и экспериментом – предмет наших дальнейших исследований.

Заключение. Впервые экспериментально исследовано влияние вязкости на разрушающиеся стоячие гравитационные волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе.

Показано, что увеличение почти на два порядка (по сравнению с водой) вязкости жидкости существенно изменяет динамику волновой моды – наблюдается вязкая регуляризация волн с полным подавлением процесса их разрушения.

Из численного анализа дисперсионного соотношения для свободных стоячих гравитационных волн на поверхности вязкой жидкости следует наличие коротковолнового предела существования гравитационных волн, что качественно подтверждает вывод о вязкой регуляризации и подавлении разрушения волн Фарадея.

Результаты работы применимы не только для волн Фарадея, но и для любых поверхностных гравитационно-капиллярных волн в режиме разрушения.

Работа выполнена по теме государственного задания # АААА-А17-117021310375-7.

1. R. A. Ibrahim, *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*, Cambridge Univ. Press (2005), 948 p.
2. M. Eswaran and U. K. Saha, *Int. J. Ocean Syst. Eng.* **1**(2), 131 (2011).
3. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ, М., Л. (1947), 929 с. [H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6-th ed. Cambridge Univ. Press (1932), 752 p.]
4. R. A. Ibrahim, *ASME. J. Fluids Eng.* **137**, 090801 (2015).
5. А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, А. А. Пельменев, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 233 (2017).
6. J. Rajchenbach, D. Clamond, and A. Leroux, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 094502 (2013).
7. В. А. Калиниченко, *Изв. РАН, МЖГ* **4**, 112 (2009).
8. Л. Н. Сретенский, *Тр. ЦАГИ* **541**, 1 (1941).
9. G. H. Keulegan, *J. Fluid Mech.* **6**, 33 (1960).
10. J. W. Miles, *Proc. R. Soc. Lond. A* **297**, 459 (1967).