Спиновая поляризация ансамбля щелочных атомов с нулевой средней намагниченностью

В. А. Бобрикова¹⁾, Е. Н. Попов¹⁾, К. А. Баранцев, С. П. Воскобойников, А. Н. Литвинов

С.-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Факторы Ланде сверхтонких подуровней, принадлежащих одному и тому же спектральному терму, отличаются между собой. Это приводит к появлению эффективного гиромагнитного отношения для атомного ансамбля, которое можно определить как отношение среднего магнитного момента к среднему механическому моменту. Характерно, что эта величина не является константой, а зависит от населенностей сверхтонких подуровней. Большой интерес вызывают состояния ансамбля невозбужденных атомов, в которых эффективное гиромагнитное отношение равно нулю. В статье рассмотрено одно из таких состояний на примере щелочного металла ⁸⁷Rb. Основная идея работы – предложить принцип подготовки состояний с нулевым эффективным гиромагнитным отношением с помощью двухчастотной накачки насыщенного пара щелочного металла в ячейке с буферным газом. Причем, как показал расчет, корреляция между полями не является необходимым условием для решения поставленной фундаментальной задачи.

DOI: 10.7868/S0370274X18110061

Оптическая накачка атомов является одной из самых популярных тем исследований с момента создания источников когерентного электромагнитного излучения. Значительный вклад в теорию оптической накачки внес Уильям Хаппер, фундаментальный труд [1] которого послужил основой большинства прикладных работ в дальнейшем. Несмотря на продолжительную историю исследований, возможности полуклассической теории оптической накачки до сих пор не исчерпаны. В частности, существует несколько неизученных проблем в двухчастотной накачке щелочных металлов с разрешенной сверхтонкой структурой. В данной статье речь пойдет о накачке спиновой поляризации ансамбля щелочных атомов ⁸⁷Rb с помощью двух полей, находящихся в резонансе с разными переходами между сверхтонкими подуровнями в D1 линии [2].

Мотивом к проведенному исследованию послужила проблема сдвига частоты ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в квантовых датчиках вращения и магнитометрах на смеси благородных газов [3–8]. Известно пять стабильных изотопов с отличным от нуля ядерным спином, в которых может наблюдаться ЯМР: ³He, ²¹Ne, ⁸³Kr, ¹²⁹Xe и ¹³¹Xe. Их особенностью являются большие по сравнению с другими веществами времена жизни поляризованного состояния: на практике достигается значение в несколько минут [9].

Существует сложный механизм спин-обменного взаимодействия между ядрами благородного газа и атомами щелочного металла, который описан во множестве источников [10–18]. Благодаря ему оказывается возможным накачивать спиновую поляризацию благородного газа оптическим излучением через пар щелочного металла и наблюдать в нем ЯМР. Необходимым условием протекания процесса спинобменного взаимодействия является отличие от нуля среднего значения проекции углового момента щелочных атомов на ось распространения накачивающего излучения. Однако возникающий при этом условии магнитный момент щелочных атомов вносит аддитивный вклад в индукцию внешнего магнитного поля. В результате появляется дополнительный набег фазы прецессии ядерного спина благородного газа и наблюдается сдвиг частотной линии ЯМР [5]. Поскольку намагниченность насыщенного пара щелочного металла линейно зависит от его концентрации, то сдвиг частоты ЯМР благородного газа определяется температурой в ячейке и называется "температурным сдвигом" [8].

Описанная проблема наводит на мысль о подготовке таких состояний ансамбля щелочных атомов, в которых эффективное гиромагнитное отношение ξ_a , определенное как отношение среднего значения проекции магнитного момента к среднему значению про-

¹⁾e-mail: victoria.bobrikova@gmail.com; enp-tion@yandex.ru

екции механического момента на ось распространения накачки, равно нулю. Именно об этих состояниях пойдет речь в статье, поэтому далее в целях сокращения записи будем обозначать их символом $g_{(0)}$.

Отметим, что спин-обменное взаимодействие между благородным газом и щелочными атомами происходит в локальном поле внутри молекул Вандер-Ваальса, время жизни которых на три порядка превосходит характерное время столкновения между атомами в ячейке [11]. Это означает, что накачка спиновой поляризации благородного газа должна происходить даже при нулевом среднем значении магнитного момента за счет локальной динамики взаимодействующих пар неполяризованного атома благородного газа и поляризованного атома щелочного металла. Поэтому получение $g_{(0)}$ -состояний и исследование спин-обменного взаимодействия с их участием может решить описанную выше проблему температурного сдвига. Также большой интерес вызывают возможные коллективные эффекты [19, 20], которые могут наблюдаться в $g_{(0)}$ -состояниях из-за взаимодействия щелочных атомов друг с другом.

Все выкладки далее приведены для D1 линии щелочного металла ⁸⁷Rb [1, 2]. Ось *z* направлена вдоль оси квантования и вдоль оси распространения накачивающего поля. Базис (h) сверхтонких подуровней представлен набором состояний $|F, M\rangle$, где *F* и *M* характеризуют полный угловой момент сверхтонкого подуровня и его проекцию на ось квантования. Базис (a) ядра и электронной оболочки щелочного металла представлен набором состояний $|J, m, \kappa\rangle$, где *J* и *m* характеризуют угловой момент электронной оболочки целочного металла представлен набором состояний $|J, m, \kappa\rangle$, где *J* и *m* характеризуют угловой момент электронной оболочки и его проекцию на ось квантования, а κ – проекцию ядерного спина на ось квантования. При этом $F_{-} = 1$, $F_{+} = 2$ и J = 1/2 соответствуют электронному уровню ${}^{2}S_{1/2}$, а $F'_{-} = 1$, $F'_{+} = 2$ и J' = 1/2 – электронному уровню ${}^{2}P_{1/2}$.

Принцип получения $g_{(0)}$ -состояний. Идея использовать двухчастотное поле для подготовки $g_{(0)}$ состояния появилась после исследования накачки щелочных атомов в (а) базисе электронной оболочки и ядра, который не является типичным для решения похожих задач. В результате была обнаружена необычная динамика спиновой поляризации электронной оболочки и был рассмотрен вопрос об управлении ею [21].

Приведем пример матрицы плотности одного из $g_{(0)}$ -состояний в парах ⁸⁷Rb, записанной в (a) базисе:

$$\hat{\sigma}_{(0)} = \frac{1}{2} |J, m_1, \kappa_1\rangle \langle J, m_1, \kappa_1| + \frac{1}{2} |J, m_2, \kappa_2\rangle \langle J, m_2, \kappa_2|.$$
(1)

$$m_1 = -\frac{1}{2}, \quad \kappa_1 = \frac{3}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}.$$
 (2)

Далее для состояния (1) посчитаем средние значения проекций вектора момента электронной оболочки и вектора момента ядра на ось z:

$$\langle \hat{m} \rangle = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 = 0,$$
 (3)

$$\langle \hat{\kappa} \rangle = \frac{1}{2}\kappa_1 + \frac{1}{2}\kappa_2 = 1.$$
(4)

Из (3), (4) можно сделать вывод, что полный угловой момент атома (8) сосредоточен в ядре. В то же время отсутствие намагниченности атомного ансамбля в состоянии (1) можно доказать, посчитав среднее значение проекции магнитного момента μ на ось z:

$$\langle \hat{\mu} \rangle / \mu_B = g_j \cdot \langle \hat{m} \rangle + g_i \cdot \langle \hat{\kappa} \rangle \ll 1,$$
 (5)

где g_j и g_i – множители Ланде электронной оболочки и ядра, для которых справедливо неравенство $g_i \ll g_j$, а μ_B – это магнетон Бора.

Запишем теперь $g_{(0)}$ -состояние (1) в базисе сверхтонких подуровней (h):

$$\hat{\sigma}_{(0)} = \frac{1}{2} |F_{-}, M_1\rangle \langle F_{-}, M_1| + \frac{1}{2} |F_{+}, M_2\rangle \langle F_{+}, M_2|, \quad (6)$$

$$M_1 = M_2 = 1. (7)$$

Далее найдем среднее значение проекции полного момента атома и среднее значение магнитного момента атома на ось z, но только в базисе (h):

$$\langle \hat{M} \rangle = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2 = 1,$$
 (8)

$$\langle \hat{\mu} \rangle / \mu_B = \frac{1}{2} \left(g_- M_1 \right) + \frac{1}{2} \left(g_+ M_2 \right) \ll 1,$$
 (9)

$$g_+ \approx -g_- \approx \frac{1}{2},\tag{10}$$

где g_- и g_+ – это множители Ланде уровней F_- и F_+ . Заметим, что результаты (8), (9) совпадают с формулами (3)–(5), как и ожидалось. Эффективное гиромагнитное отношение ансамбля атомов щелочного металла в состоянии (6) действительно близко к нулю:

$$\xi_a = \frac{\langle \hat{\mu} \rangle}{\langle \hat{M} \rangle \cdot \hbar} \ll \frac{\mu_B}{\hbar}.$$
 (11)

В теории можно привести много простых примеров $g_{(0)}$ -состояний, но на практике выборочно заселять отдельные зеемановские подуровни не представляется возможным. Авторы в статье предлагают способ получения $g_{(0)}$ -состояний с помощью оптической накачки двухчастотным полем, при котором

Письма в ЖЭТФ том 107 вып. 11-12 2018

конфигурация населенностей зеемановских подуровней имеет более сложный вид, чем приведенный в формуле (6), однако условие (11) по прежнему выполняется.

Итак, исходя из (3), (4), задача о получении $g_{(0)}$ состояний ансамбля щелочных атомов сводится к накачке спиновой поляризации ядер щелочного металла при сохранении нулевого среднего значения проекции момента электронной оболочки.

В нашей модели учтены три процесса релаксации, которые происходят в газовой ячейке: релаксация системы к термодинамическому равновесию, безызлучательный переход атомов из возбужденного состояния ${}^2P_{1/2}$ в основное ${}^2S_{1/2}$ при столкновениях с буферными молекулами азота и релаксация когерентности на оптических переходах D1 линии. Скорости процессов обозначены $\gamma^{(0)}$, $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ соответственно.

$$\gamma^{(0)} \ll \gamma^{(1)} < \gamma^{(2)}.$$
 (12)

В модели предполагалось, что безызлучательные переходы из возбужденного состояния в основное доминируют над спонтанным распадом, а уширение оптических линий поглощения, обусловленное столкновениями, сильнее неоднородного доплеровского уширения.

Благодаря особенностям безызлучательного перехода щелочных атомов из возбужденного состояния в основное оказалось возможным приготавливать атомные ансамбли в $g_{(0)}$ -состояниях. Рассмотрим подробнее этот механизм релаксации. Неупругое столкновение щелочного атома с молекулой азота длится около $\tau_{\rm coll} \approx 10^{-12}$ с [11]. Переход происходит за этот короткий промежуток времени. Сделаем простую оценку:

$$\tau_{\rm coll} \cdot \nu_e \approx 10^{-3},\tag{13}$$

где $\nu_e \approx 812 \, ({\rm M}\Gamma {\rm q})$ – это частота сверхтонкого расщепления энергетического уровня ${}^2P_{1/2}$, в котором находится щелочной атом до столкновения. Из (13) следует, что во время столкновения молекулы азота со щелочным атомом разрывается IJ-связь и безызлучательный переход электронной оболочки на нижний ${}^2S_{1/2}$ уровень происходит без изменения спинового состояния ядра. Математически этот процесс можно описать с помощью супероператора $\hat{\Gamma}$, который имеет наглядный вид в базисе (a):

$$\hat{\sigma}^{gg} = \hat{\Gamma} \{ \hat{\sigma}^{ee} \} = \hat{\sigma}^{jj}_{(0)} \otimes \hat{\sigma}^{ii}, \qquad (14)$$

где $\hat{\sigma}^{ee}$ и $\hat{\sigma}^{gg}$ – это матрицы плотности щелочного атома до и после безызлучательного перехода в основное состояние. $\hat{\sigma}_{(0)}^{jj}$ и $\hat{\sigma}^{ii}$ обозначают редуцирован-

Письма в ЖЭТФ том 107 вып. 11-12 2018

ные матрицы плотности электронной оболочки в основном состоянии и ядра щелочного металла, которые определены выражениями:

$$\hat{\sigma}_{(0)}^{jj} = \sum_{m=-1/2}^{+1/2} \frac{1}{2} \cdot |J,m\rangle \langle J,m|, \qquad (15)$$

$$\hat{\sigma}^{ii} = \operatorname{Tr} \left[\hat{\sigma}^{ee} \right]_{J',m}.$$
(16)

Индексы J', m в уравнении (16) обозначают усреднение по состояниям электронной оболочки в возбужденном состоянии. Нижний индекс (0) в уравнении (15) введен, чтобы подчеркнуть, что после безызлучательного перехода щелочного атома на основной уровень ${}^{2}S_{1/2}$ матрица плотности электронной оболочки соответствует $g_{(0)}$ -состоянию.

Далее в соответствии со свойствами $g_{(0)}$ состояний необходимо подобрать параметры излучения, при которых будет происходить накачка только ядерной спиновой поляризации ансамбля щелочных атомов. На практике частоты Раби накачивающих полей Ω редко превосходят 10 МГц. Сделаем оценку, аналогичную (13):

$$\Omega^{-1} \cdot \nu_q \approx 10^3, \tag{17}$$

где $\nu_q \approx 6.8 \Gamma \Gamma$ ц – это частота сверхтонкого расщепления энергетического уровня ${}^{2}S_{1/2}$, в котором находится щелочной атом до возбуждения под действием накачки. Это означает, что разрыва IJ-связи не происходит и электромагнитное излучение накачивает электронную и ядерную спиновую поляризацию одновременно. Напомним, что спин ядра и полный момент электронной оболочки противонаправлены, когда щелочной атом находится на подуровне F_{-} и, наоборот, сонаправлены, когда атом находится на подуровне F_+ . Комбинируя оптическую накачку с подуровней F_{-} и F_{+} , можно добиться взаимного вычитания проекций электронной оболочки на ось z. Накачиваемая проекция спина ядра на ось z будет при этом складываться, а не вычитаться. Отметим, что при использовании двухчастотной накачки может реализоваться когерентное пленение населенности, которое значительно усложнит ситуацию [22, 23], однако эту проблему можно решить, задав двухфотонную отстройку бо́льшую, чем скорость релаксации низкочастотной когерентности в D1 линии ⁸⁷Rb.

Поиск параметров накачки, при которых реализуются $g_{(0)}$ -состояния. Итак, в нашей модели среда представляет собой ансамбль щелочных атомов, находящихся в ячейке с молекулярным азотом, концентрации которого достаточно для тушения флоуресценции. Сквозь ячейку вдоль оси *z* распространяется поле накачки. Мы считаем среду оптически тонкой, различием в поглощении каждой компоненты электрического поля можно пренебречь [24]. Динамика ансамбля щелочных атомов описывается уравнением Лиувилля для матрицы плотности, которое обобщено на случай релаксации с помощью дополнительных феноменологических слагаемых:

$$\dot{\hat{\sigma}}^{gg} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\sigma}, \hat{H} \right]^{gg} - \gamma^{(0)} \left(\hat{\sigma}^{gg} - \hat{G} \right) + \gamma^{(1)} \hat{\Gamma} \left\{ \hat{\sigma}^{ee} \right\},$$
(18)

$$\dot{\hat{\sigma}}^{ge} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\sigma}, \hat{H} \right]^{ge} - \gamma^{(2)} \hat{\sigma}^{ge}, \qquad (19)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}^{ee} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\sigma}, \hat{H} \right]^{ee} - \left(\gamma^{(0)} + \gamma^{(1)} \right) \hat{\sigma}^{ee}, \qquad (20)$$

где $\hat{\sigma}^{ge}$ – недиагональные элементы матрицы плотности, описывающие оптическую когерентность на переходах между нижними и верхними сверхтонкими подуровнями, \hat{G} – это матрица плотности в состоянии термодинамического равновесия. Стационарное решение этого уравнения обозначалось нами нижним индексом s. Оператор Гамильтона \hat{H} без учета релаксации задается суммой невозмущенного оператора \hat{H}_0 и оператора взаимодействия щелочного атома с полем накачки:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - d_{D1} \left(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{E} \right), \qquad (21)$$

где $\hat{\mathbf{g}}$ – безразмерный оператор дипольного момента щелочного атома, нормированный на величину приведенного дипольного момента d_{D1} перехода ${}^{2}S_{1/2} - {}^{2}P_{1/2}$. Его аналитический вид можно посмотреть в [25].

Для достижения поставленной цели будем использовать двухчастотную накачку, как показано на рис. 1. Оба поля распространяются вдоль оси *z*. Вектор напряженности имеет вид:

$$\mathbf{E} = \sum_{n} \frac{\mathcal{E}_{n}}{2} \mathbf{l}_{\mathbf{n}} e^{-i(\omega_{n}t + \varphi_{n})} + \text{k.c.}, \quad n = 1, 2, \qquad (22)$$

где \mathcal{E}_n – амплитуда, $\mathbf{l_n}$ – вектор поляризации, ω_n и φ_n – частота и фаза n-го поля.

Критерием того, что система приготовлена в $g_{(0)}$ состояние являлось выполнение условия (11), в котором средние значения $\langle \hat{\mu} \rangle$ и $\langle \hat{M} \rangle$ определены формулами ниже:

$$\langle \hat{\mu} \rangle / \mu_B = \sum_{M=-F_-}^{F_-} g_- M \cdot \langle F_-, M | \hat{\sigma}_s^{gg} | F_-, M \rangle + + \sum_{M=-F_+}^{F_+} g_+ M \cdot \langle F_+, M | \hat{\sigma}_s^{gg} | F_+, M \rangle,$$
 (23)



Рис. 1. Поля накачки ω_1 и ω_2 в схеме D1 линии ${}^{87}\text{Rb}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{M=-F_{-}}^{F_{-}} M \cdot \langle F_{-}, M | \hat{\sigma}_{s}^{gg} | F_{-}, M \rangle + \\ + \sum_{M=-F_{+}}^{F_{+}} M \cdot \langle F_{+}, M | \hat{\sigma}_{s}^{gg} | F_{+}, M \rangle.$$
 (24)

Авторы пренебрегли вкладом в намагниченность возбужденных атомов, оценив населенность верхних сверхтонких уровней и убедившись, что она много меньше единицы.

Можно рассмотреть два случая поляризации накачки:

$$\mathbf{l_1} = \mathbf{l_2} = \mathbf{l_-} \tag{25}$$

$$\mathbf{l_1} = \mathbf{l_+} \qquad \mathbf{l_2} = \mathbf{l_-},\tag{26}$$

где \mathbf{l}_{-} и \mathbf{l}_{+} – это ортогональные круговые векторы поляризации. Проверено, что $g_{(0)}$ -состояния реализуются только в случае (26). Поиск параметров накачки, при которых система после установления равновесия оказывалась в $g_{(0)}$ -состоянии, осуществлялся перебором Ω_1 и Ω_2 до выполнения условия (11).

$$\Omega_n = \frac{d_{D1}\mathcal{E}_n}{\hbar}, \qquad n = 1, 2.$$
(27)

Результат поиска приведен на рис. 2. Для каждой найденной пары Ω_1 и Ω_2 выведено среднее значение проекции углового момента щелочных атомов на ось z (24), которая говорит о целесообразности подготовки $g_{(0)}$ -состояний: если модуль вектора среднего по объему углового момента так же мал, как и намагниченность среды, то задача создать диспропорцию между этими двумя величинами окажется не имеющей практического смысла.

Выкладки и результат в статье приведены только для скоррелированных частотных компонент накачки. Однако расчет показал, что сходный результат, правда, с меньшими значениями $\langle \hat{M} \rangle$, достигается при использовании независимых пучков накачки с частотами ω_1 и ω_2 .



Рис. 2. Кривая зависимости среднего значения проекции углового момента на ось z (ось квантования) от частот Раби для ансамбля щелочных атомов в $g_{(0)}$ -состоянии. Расчет выполнен при $\gamma^{(0)} = 1000 (c^{-1}), \gamma^{(2)} = 10^8 (c^{-1})$ и $\gamma^{(2)} = 5 \cdot 10^8 (c^{-1})$

Заключение. В работе продемонстрирована возможность получения необычных состояний ансамбля щелочных атомов в ячейке с молекулярным азотом, в которых эффективное гиромагнитное отношение обращается в нуль. В невозбужденном состоянии орбитальный момент щелочного атома равен нулю, поэтому мы можем рассматривать появление среднего по объему вектора полного момента как спиновую поляризацию среды при нулевой средней намагниченности.

Авторы выражают благодарность профессору кафедры теоретической физики СПбПУ И.М. Соколову, а также ведущему научному сотруднику А.К. Вершовскому и старшему научному сотруднику А.С. Пазгалёву из ФТИ им. А.Ф. Иоффе за помощь и полезные дискуссии при получении результатов статьи.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы" (соглашение # 14.578.21.0211, уникальный идентификатор соглашения RFMEFI57816X0211).

- 1. W. Happer, Rev. Mod. Phys. 44, 170 (1972).
- 2. D. A. Steck, http://steck.us/alkalidata (2001).
- M. Larsen, Materials of conference Frequency control symposium (FCS), in Baltimore, POD publishing – IEEE, MD. 1 (2012).

- D. Meyer and M. Larsen, Gyroscopy and Navigation 5(2), 75 (2014)
- T. Walker and M. Larsen, Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics 65, 373 (2016).
- 6. T. Walker, Phys. Rev. A 40(9), 4959 (1989).
- А.К. Вершовский, А.К. Дмитриев, Письма в ЖТФ 41(8), 78 (2015).
- L. Chen, B. Zhoua, G. Lei, W. Wu, Y. Zhai, Z. Wang, and J. Fang, AIP Advances 7, 115101 (2017).
- D. Raftery, H. W. Long, D. Shykind, P. J. Grandinetti, and A. Pines, Phys. Rev. A 50, 567 (1994).
- M. A. Bouchiat, J. Brossel, and L. Pottier, Phys. Rev. Lett. 19, 817 (1967).
- W. Happer, E. Miron, S. Schaefer, D. Schreiber, W. A. van Wijngaarden, and X. Zeng, Phys. Rev. A 22, 3092 (1984).
- X. Zeng, Z. Wu, T. Call, E. Miron, D. Schreiber, and W. Happer, Phys. Rev. A **31**, 260 (1985).
- T. G. Walker and W. Happer, Rev. Mod. Phys. 69, 629 (1997).
- S. Appelt, A. Ben-Amar Baranga, C. J. Erickson, M. V. Romalis, A. R. Young, and W. Happer, Phys. Rev. A 58, 1412 (1998).
- Y.-Y. Jau, N. N. Kuzma, and W. Happer, Phys. Rev. A. 69, 061401 (2004).
- 16. T. Walker, J. Phys. Conf. Ser. 294, 012001 (2011).
- C. C. Bouchiat and M. A. Bouchiat, Phys. Rev. Lett. 2, 1274 (1970).
- R. J. Fitzgerald, M. Gatzke, D. C. Fox, G. D. Cates, and W. Happer, Phys. Rev. B. 59, 8795 (1998).
- S. E. Skipetrov, I. M. Sokolov, and M. D. Havey, Phys. Rev. A 94(013825), 1 (2016).
- A. S. Kuraptsev and I. M. Sokolov, Phys. Rev. A 94, 022511 (2016).
- Е.Н. Попов, С.П. Воскобойников, С.М. Устинов, К.А. Баранцев, А.Н. Литвинов, ЖЭТФ 152 (6), 1179 (2017).
- G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cim. B 36, 5 (1976).
- Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, УФН 163, 1 (1993).
- К. А. Баранцев, Е. Н. Попов, А. Н. Литвинов, ЖЭТФ 148, 869 (2015).
- 25. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, Квантовая теория углового момента, Наука, Ленингр. отд., Л. (1975), гл. 8, 202 с.