

## Самовоздействие непараксиальных оптических волн из малого числа колебаний в диэлектрических средах

Д. А. Кислин<sup>1)</sup>, М. А. Князев<sup>1)</sup>, Ю. А. Шполянский<sup>1)</sup>, С. А. Козлов<sup>1)</sup>

Университет информационных технологий, механики и оптики, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.

После переработки 15 мая 2018 г.

Обсуждена математическая модель эволюции пространственно-временных спектров непараксиальных оптических волн из малого числа колебаний в изотропных диэлектрических средах с произвольной дисперсией показателя преломления и безынерционной кубической нелинейностью. Показано, что при самофокусировке однопериодной на входе в нелинейную среду волны в оптическую нить с поперечными размерами, соизмеримыми с центральной длиной волны излучения, напряженность возросшей продольной компоненты его электрического поля может по сравнению с исходной продольной компонентой увеличиваться в 7 раз и составлять 18 % от величины поперечной компоненты поля входной волны. Оценены погрешности расчетов самовоздействия излучения со сверхширокими и временными и пространственными спектрами при использовании упрощенных математических моделей.

DOI: 10.7868/S0370274X18120044

Анализ самовоздействия света в оптических средах – это классическая задача нелинейной оптики. По-видимому, самым известным и изученным эффектом самовоздействия оптического излучения является его самофокусировка. Закономерности самофокусировки параксиальных пучков квазимонохроматического лазерного излучения, критическая мощность и длина их самофокусировки приводятся сегодня практически в каждом учебнике по лазерной физике и нелинейной оптике [1–3].

Хорошо изучены на настоящий момент и особенности непараксиальной самофокусировки квазимонохроматического излучения. Например, показано, что сжатие ТЕ-поляризованного (“*Transverse electric*”) двумерного лазерного пучка в поперечные размеры, соизмеримые с длиной волны излучения, носит квазипериодический характер [4]. В фокусах может происходить явление самоотражения излучения назад [5]. Особый интерес при анализе непараксиальной самофокусировки ТМ-поляризованных (“*Transverse magnetic*”) квазимонохроматических пучков привлекает динамика продольной компоненты поля, энергия которой в сильно сфокусированных пучках может становится заметной по сравнению с энергией поперечной компоненты поля. Поперечная структура продоль-

ной компоненты поля радикально отличается от аналогичной структуры его поперечной компоненты и, например, для гауссова пучка имеет нулевую напряженность поля на оси его распространения [6]. В работе [7] показано, что нелинейная проницаемость среды, возникающая при самофокусировке благодаря продольной компоненте поля, имеет расфокусирующий характер. Говоря о продольной компоненте электрического поля непараксиального излучения, дополнительно отметим, что в настоящее время активно обсуждаются возможности ее практического применения, например, при оптическом манипулировании микрообъектами или трехмерно-ориентированном возбуждении флуоресцирующих молекул в избирательно чувствительных материалах [8–11].

В последние годы значительное внимание исследователей было привлечено к изучению закономерностей самофокусировки волн, содержащих малое число колебаний электромагнитного поля. Это связано с созданием источников такого излучения высокой интенсивности в различных спектральных диапазонах [12, 13]. Были модифицированы известные и разработаны новые полевые методы решения задачи о параксиальной самофокусировке волн, содержащих малое число колебаний светового поля, и спектр которых по этой причине очень широк, а также дополнительно уширяется в нелинейной среде (анализ этих работ см., например, в обзорах [14–16] и монографии [17]). Показано, что с уменьшением исход-

<sup>1)</sup>e-mail: kislin.dmitriy@gmail.com;  
knyazev.michael@gmail.com; yuri.shpolyanskiy@gmail.com;  
kozlov@mail.ifmo.ru

ного числа колебаний в таких волнах может возрастать критическая мощность их самофокусировки [18]. Важную роль начинает играть процесс генерации в нелинейной среде излучения на высоких частотах [19, 20].

Единичны пока работы по изучению самовоздействия волн из малого числа колебаний, которые сжимаются в поперечные размеры, соизмеримые с центральной длиной волны излучения. В работе [21] показано, что при теоретическом анализе самовоздействия в нелинейных средах таких волн со сверхшироким как временным, так и пространственным спектром удобно использовать спектральный подход. В работах [19, 20] рассмотрена непараксиальная эволюция ТЕ-поляризованных волн из малого числа колебаний. Показано, что при распространении таких предельно сжатых продольно и предельно сжатых поперечно волн происходит значительное уширение их временного спектра, причем на всех пространственных частотах более эффективно в синюю область. Сильным эффектом становится и генерация спектральных компонент, утроенных по отношению к входному спектру.

В настоящей работе, по-видимому, впервые дан анализ самовоздействия непараксиальных ТМ-поляризованных волн из малого числа колебаний. Особое внимание уделено динамике при самовоздействии их продольных компонент поля. Основные закономерности этой динамики иллюстрированы для волны, содержащей на входе в нелинейную среду всего одно полное колебание поля.

В работе [21] получена система спектральных уравнений, описывающих динамику непараксиальных волновых пакетов в прозрачных диэлектриках с безынерционной кубической нелинейностью:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)g_x = \\ = -\frac{\varepsilon_{nl}}{n^2(\omega)} \left( (k^2 - k_x^2)\Phi_x - k_x k_y \Phi_y + ik_x \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)g_y = \\ = -\frac{\varepsilon_{nl}}{n^2(\omega)} \left( (k^2 - k_y^2)\Phi_y - k_x k_y \Phi_x + ik_y \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial g_z}{\partial z} + ik_x g_x + ik_y g_y = \\ = -\frac{\varepsilon_{nl}}{n^2(\omega)} \left( ik_x \Phi_x + ik_y \Phi_y + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $g_{x,y,z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{x,y,z} e^{-i(\omega t + k_x x + k_y y)} dt dx dy$  – декартовы компоненты пространственно-временного спек-

тра излучения,  $\omega, k_x, k_y$  – временная и пространственные частоты,  $t$  – время,  $x, y, z$  – пространственные координаты,  $n(\omega)$  – дисперсионная зависимость показателя преломления среды,  $\varepsilon_{nl}$  – коэффициент нелинейной диэлектрической проницаемости,  $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$  – волновое число,  $c$  – скорость света в вакууме, ось  $z$  является направлением, вдоль которого на любом конечном расстоянии при  $x, y \rightarrow \pm\infty$  поле волны  $\mathbf{E}(x, y, z, t) \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{x,y,z}(\omega, k_x, k_y, z) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) E_{x,y,z} e^{-i(\omega t + k_x x + k_y y)} dt dx dy = \\ = \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=x,y,z} [g_i(\omega', k'_x, k'_y, z) \times \\ \times g_i(\omega'', k''_x, k''_y, z)] \times \\ \times g_{x,y,z}(\omega - \omega' - \omega'', k_x - k'_x - k''_x, k_y - k'_y - k''_y, z) \times \\ \times d\omega' dk'_x dk'_y d\omega'' dk''_x dk''_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что выведенную в [21] систему возможно упростить, записывая в выражении для  $\frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$  производную  $\frac{\partial g_z}{\partial z}$  в линеаризованном виде

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = -ik_x g_x - ik_y g_y, \quad (3)$$

что позволяет решать систему дифференциальных уравнений (1), как задачу Коши. Использование приближенного соотношения (3) приводит к погрешности порядка  $(\varepsilon_{nl} E_0^2)^2$ , с точностью до которой и выписано исходное уравнение динамики спектра волны в среде с кубической нелинейностью.

Система (1) по сути есть спектральный аналог уравнения динамики поля

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \varepsilon(t') \mathbf{E}(t-t') dt' = -\frac{\varepsilon_{nl}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^3}{\partial t^2}, \quad (4)$$

при этом дисперсионные характеристики среды в (1) и (4) связаны соотношением  $n^2(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt$ .

Поле импульсов из малого числа колебаний на входе в среду будем задавать в виде линейно поляризованных волновых пакетов с осесимметричным гауссовым профилем:

$$E_x(t, x, y, z = 0) = -E_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (5)$$

где  $E_0$  – максимальная амплитуда поля волны на входе в среду,  $\rho$  – поперечный размер волнового пакета,  $\tau$  – длительность импульса,  $\omega_0$  – центральная частота излучения. При этом будем полагать количество полных длин волн  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ , укладывающихся

в поперечный размер пучка по уровню  $e^{-1}$ ,  $L = \frac{2\rho}{\lambda_0}$  и число полных колебаний в импульсе  $N = \frac{\omega_0 \tau}{\pi}$  малы.

Пространственно-временной спектр поля излучения (5) имеет вид:

$$g_x(\omega, k_x, k_y, z=0) = i g_0 \left( e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta\omega^2}} - e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\Delta\omega^2}} \right) e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{\Delta k^2}}, \quad (6)$$

где  $g_0 = \frac{(2\sqrt{\pi})^3 E_0}{\Delta k^2 \Delta\omega}$  – максимум спектральной плотности исходного импульса,  $\Delta k = \frac{2}{\rho}$  и  $\Delta\omega = \frac{2}{\tau}$  – ширины пространственного и временного спектров излучения на входе в среду.  $y$ -компоненты поля и спектра волны, рассматриваемой на входе в среду линейно поляризованной, полагаем на границе нелинейной среды (при  $z=0$ ) нулевыми

$$g_y(\omega, k_x, k_y, z=0) = 0. \quad (7)$$

Поскольку световой пучок на входе в нелинейную среду рассматриваем узким ( $L$  мало, а  $\Delta k$  велико), то следует учесть наличие у излучения продольной компоненты его поля. Пространственно-временной спектр продольной компоненты связан со спектром поперечной компоненты поля соотношением [17]:

$$g_z(\omega, k_x, k_y, z=0) = \frac{k_x g_x(\omega, k_x, k_y, z=0)}{\sqrt{k(\omega)^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (8)$$

Второй порядок дифференциальных уравнений в системе (1) требует для ее однозначного решения граничные условия на первые производные  $x$ - и  $y$ -компонент спектральной плотности, которые мы зададим в линеаризованном виде:

$$\frac{\partial g_{x,y}(\omega, k_x, k_y, z=0)}{\partial z} = -i \sqrt{k(\omega)^2 - k_x^2 - k_y^2} g_{x,y}(\omega, k_x, k_y, z=0). \quad (9)$$

Такой вид первых производных компонент спектральной плотности предполагает излучение на границе нелинейной среды сохраняющим линейную поляризацию и распространяющимся в положительном направлении оси  $z$ .

Для проведения теоретического анализа и дальнейшего численного моделирования нормируем систему уравнений (1) и граничные условия (6)–(9), введя безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{x,y,z} &= \frac{g_{x,y,z}}{g_0}, \quad \tilde{z} = z k(\omega_0), \\ \tilde{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{k}_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\Delta k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда в переменных (10) система (1) принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{g}_x}{\partial \tilde{z}^2} + \left( \tilde{\omega}^2 (1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)) - q_{\text{diff}} (\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2) \right) \tilde{g}_x &= \\ &= -q_{\text{nl}} \tilde{\omega}^2 \tilde{\Phi}_x - q_{\text{nl}} \left[ -\frac{q_{\text{diff}} \tilde{k}_x^2}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \tilde{\Phi}_x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_{\text{diff}} \tilde{k}_x \tilde{k}_y}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \tilde{\Phi}_y \right] - i \frac{q_{\text{nl}} \sqrt{q_{\text{diff}} \tilde{k}_x}}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \frac{\partial \tilde{\Phi}_x}{\partial \tilde{z}}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}_y}{\partial \tilde{z}^2} + \left( \tilde{\omega}^2 (1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)) - q_{\text{diff}} (\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2) \right) \tilde{g}_y &= \\ &= -q_{\text{nl}} \tilde{\omega}^2 \tilde{\Phi}_y - q_{\text{nl}} \left[ -\frac{q_{\text{diff}} \tilde{k}_y^2}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \tilde{\Phi}_y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_{\text{diff}} \tilde{k}_x \tilde{k}_y}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \tilde{\Phi}_x \right] - i \frac{q_{\text{nl}} \sqrt{q_{\text{diff}} \tilde{k}_y}}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \frac{\partial \tilde{\Phi}_y}{\partial \tilde{z}}, \\ \frac{\partial \tilde{g}_z}{\partial \tilde{z}} + i \sqrt{q_{\text{diff}}} (\tilde{k}_x \tilde{g}_x + \tilde{k}_y \tilde{g}_y) &= \\ &= -\frac{q_{\text{nl}}}{1 + q_{\text{disp}} \Delta \tilde{n}(\omega)} \left( i \sqrt{q_{\text{diff}}} (\tilde{k}_x \tilde{\Phi}_x + \tilde{k}_y \tilde{\Phi}_y) + \frac{\partial \tilde{\Phi}_z}{\partial \tilde{z}} \right), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где  $\Delta \tilde{n}(\omega) = \frac{n(\omega) - n(\omega_0)}{\Delta n_{\text{disp}}}$ ,  $\Delta n_{\text{disp}} = n(\omega_0 + 0.5\Delta\omega) - n(\omega_0 - 0.5\Delta\omega)$  – характеризует изменение показателя преломления среды на ширине спектра излучения,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{x,y,z} &= \frac{(2\pi)^6 \Phi_{x,y,z}}{\Delta\omega^2 \Delta k^4} = \\ &= \iiint \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=x,y,z} \left[ \tilde{g}_i(\tilde{\omega}', \tilde{k}'_x, \tilde{k}'_y, \tilde{z}) \tilde{g}_i(\tilde{\omega}'', \tilde{k}''_x, \tilde{k}''_y, \tilde{z}) \right] \\ &\quad \tilde{g}_{x,y,z}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'', \tilde{k}_x - \tilde{k}'_x - \tilde{k}''_x, \tilde{k}_y - \tilde{k}'_y - \tilde{k}''_y, \tilde{z}) \\ &\quad d\tilde{\omega}' d\tilde{k}'_x d\tilde{k}'_y d\tilde{\omega}'' d\tilde{k}''_x d\tilde{k}''_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия (6)–(9) в новых переменных (10) примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{g}_x(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0) &= \\ &= i \left( e^{-\frac{(\tilde{\omega}-1)^2}{\Delta\tilde{\omega}^2}} - e^{-\frac{(\tilde{\omega}+1)^2}{\Delta\tilde{\omega}^2}} \right) e^{-(\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{g}_y(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_z(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0) &= \\ &= \frac{\tilde{k}_x \tilde{g}_x(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0)}{\sqrt{\tilde{k}^2 - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_{x,y}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0) &= \\ &= -i \sqrt{\tilde{k}^2 - \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2} \tilde{g}_{x,y}(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{z}=0), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tilde{\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ ,  $\tilde{k} = \frac{k(\omega)}{\Delta k}$ .

Значения в системе (11) безразмерных малых параметров  $q_{\text{disp}} = \frac{2\Delta n_{\text{disp}}}{n(\omega_0)}$ ,  $q_{\text{diff}} = \left(\frac{\Delta k}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{2}{\pi n(\omega_0)L}\right)^2$  и  $q_{\text{nl}} = \frac{\varepsilon_{\text{nl}}E_0^2}{\pi^3 n(\omega_0)^2} = \frac{8}{3} \frac{\Delta n_{\text{nl}}}{\pi^3 n(\omega_0)}$  позволяют оценить относительное влияние на характер распространения излучения в среде явлений дисперсии, дифракции и нелинейного отклика среды соответственно. Здесь  $\Delta n_{\text{nl}} = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon_{\text{nl}}E_0^2}{n(\omega_0)} = n_2 I_0$ ,  $n_2$  – коэффициент нелинейного показателя преломления среды,  $I_0$  – интенсивность волны на входе в среду.

Как видно из правой части первого уравнения системы (11), нелинейный отклик среды в поле непараксиального излучения носит сложный характер и зависит не только от  $q_{\text{nl}}$ , но и от  $q_{\text{diff}}$  и  $q_{\text{disp}}$ , т.е. помимо интенсивности, существенно определяется шириной пространственного спектра и разницей показателя преломления среды на разных краях спектра излучения. Можно выделить три слагаемых в правой части уравнения. Первое слагаемое,  $-q_{\text{nl}}\tilde{\omega}^2\tilde{\Phi}_x$ , которое для параксиального излучения было бы единственным, отвечает за самофокусировку поперечных компонент поля излучения и генерацию высших гармоник. Второе слагаемое,  $\frac{q_{\text{nl}}q_{\text{diff}}\tilde{k}_x^2\tilde{\Phi}_x}{1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)}$ , определяет дополнительное дифракционное уширение импульса при уменьшении его поперечного размера. Таким образом, совместный вклад первого и второго слагаемого препятствует бесконечному сжатию поля волны при ее самофокусировке. Последнее слагаемое, содержащее производную  $\frac{\partial\tilde{\Phi}_z}{\partial\tilde{z}}$ , отвечает за перекачку энергии из поперечной в продольную компонент спектра. Эта перекачка зависит от произведения  $q_{\text{nl}}\sqrt{q_{\text{diff}}}$ , т.е. прямо пропорциональна как интенсивности, так и ширине пространственного спектра  $\Delta k$ .

Из третьего уравнения системы (11) видно, что изменение спектральной плотности продольной компоненты электрического поля непараксиального волнового пакета в нелинейной среде пропорционально величине  $\frac{q_{\text{nl}}\sqrt{q_{\text{diff}}}}{1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)}$ , т.е. прямо пропорционально интенсивности и центральной длине волны излучения, и обратно пропорционально поперечной ширине пучка и изменению показателя преломления среды из-за дисперсии в пределах ширины спектра излучения.

Сравним коэффициенты  $q_{\text{diff}}$ ,  $q_{\text{disp}}$  и  $q_{\text{nl}}$  для различных параметров излучения с центральной длиной волны  $\lambda_0 = 800$  нм в кварцевом стекле, дисперсия которого характеризуется зависимостью  $n(\omega) = N_0 + a\omega^2 - b\omega^{-2}$ , где  $N_0 = 1.4508$ ,  $a = 2.7401 \cdot 10^{-42}$  с<sup>3</sup>/м,  $b = 3.9437 \cdot 10^{19}$  с<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>, а коэффициент нелинейного показателя преломления  $n_2 = 2.9 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт [22]. При интенсивности излучения  $I_0 =$

$= 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>, которая еще не приводит к образованию плазмы в случае импульсов из малого числа колебаний [23], коэффициент  $q_{\text{nl}} = 1.7 \cdot 10^{-4}$ . Простыми расчетами несложно показать, что влияние на динамику спектральной плотности излучения явления дифракции соизмеримо ( $q_{\text{diff}}$  больше или меньше указанного выше значения  $q_{\text{nl}}$  в 5 раз) со влиянием такой нелинейности среды в диапазоне поперечных размеров светового пучка  $L$  от 15 до 75, т.е. при значениях  $\rho$  от 6 до 30 мкм, а влияние дисперсии соизмеримо с нелинейностью в диапазоне длительностей импульса  $N$  от 14 до 350, т.е. при значениях  $\tau$  от 19 до 467 фс. Отметим, что равенство выведенных в данной работе параметров, характеризующих дифракцию и нелинейность,  $q_{\text{diff}} = q_{\text{nl}}$ , реализуется при мощности излучения  $P_{cr} = \frac{1}{2}\pi\rho^2 I_0 = \frac{R_{cr}\lambda_0^2}{16n(\omega_0)n_2}$ , где  $R_{cr} = 3\pi^2$ . Эта величина функционально абсолютно точно описывает зависимость критической мощности самофокусировки от параметров излучения и характеристик вещества ( $\lambda_0, n(\omega_0), n_2$ ) [24], отличающаяся лишь постоянным коэффициентом  $R_{cr}$ , который различен для разных распределений поля волны на входе в нелинейную среду [25].

Для иллюстрации сформулированных выше качественных выводов далее ограничимся численным моделированием динамики в нелинейной среде двумерных ТМ-поляризованных непараксиальных волн. В таком случае система нормированных уравнений (11) упрощается и принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\tilde{g}_x^2}{\partial\tilde{z}^2} + \left(\tilde{\omega}^2(1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)) - \tilde{k}_x^2 q_{\text{diff}}\right)\tilde{g}_x = \\ & = -q'_{\text{nl}} \left[ \left( \tilde{\omega}^2 - \frac{q_{\text{diff}}\tilde{k}_x^2}{1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)} \right) \tilde{\Phi}_x + \right. \\ & \quad \left. + i \frac{\tilde{k}_x\sqrt{q_{\text{diff}}}}{1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)} \frac{\partial\tilde{\Phi}_z}{\partial\tilde{z}} \right] \\ & \frac{\partial\tilde{g}_z}{\partial\tilde{z}} + i\tilde{k}_x\sqrt{q_{\text{diff}}}\tilde{g}_x = \\ & = -\frac{q'_{\text{nl}}}{1+q_{\text{disp}}\Delta\tilde{n}(\omega)} \left( i\tilde{k}_x\sqrt{q_{\text{diff}}}\tilde{\Phi}_x + \frac{\partial\tilde{\Phi}_z}{\partial\tilde{z}} \right), \end{aligned} \right. \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{x,z}(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{z}) &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=x,z} \left[ \tilde{g}_i(\tilde{\omega}', \tilde{k}'_x, \tilde{z}) \right. \\ & \left. \tilde{g}_i(\tilde{\omega}'', \tilde{k}''_x, \tilde{z}) \right] \tilde{g}_{x,z}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'', \tilde{k}_x - \tilde{k}'_x - \tilde{k}''_x, \tilde{z}) \\ & \quad d\tilde{\omega}' d\tilde{k}'_x d\tilde{\omega}'' d\tilde{k}''_x, \end{aligned} \quad (18)$$

$$q'_{\text{nl}} = \frac{\varepsilon_{\text{nl}}E_0^2}{\pi^2 n(\omega_0)^2}.$$

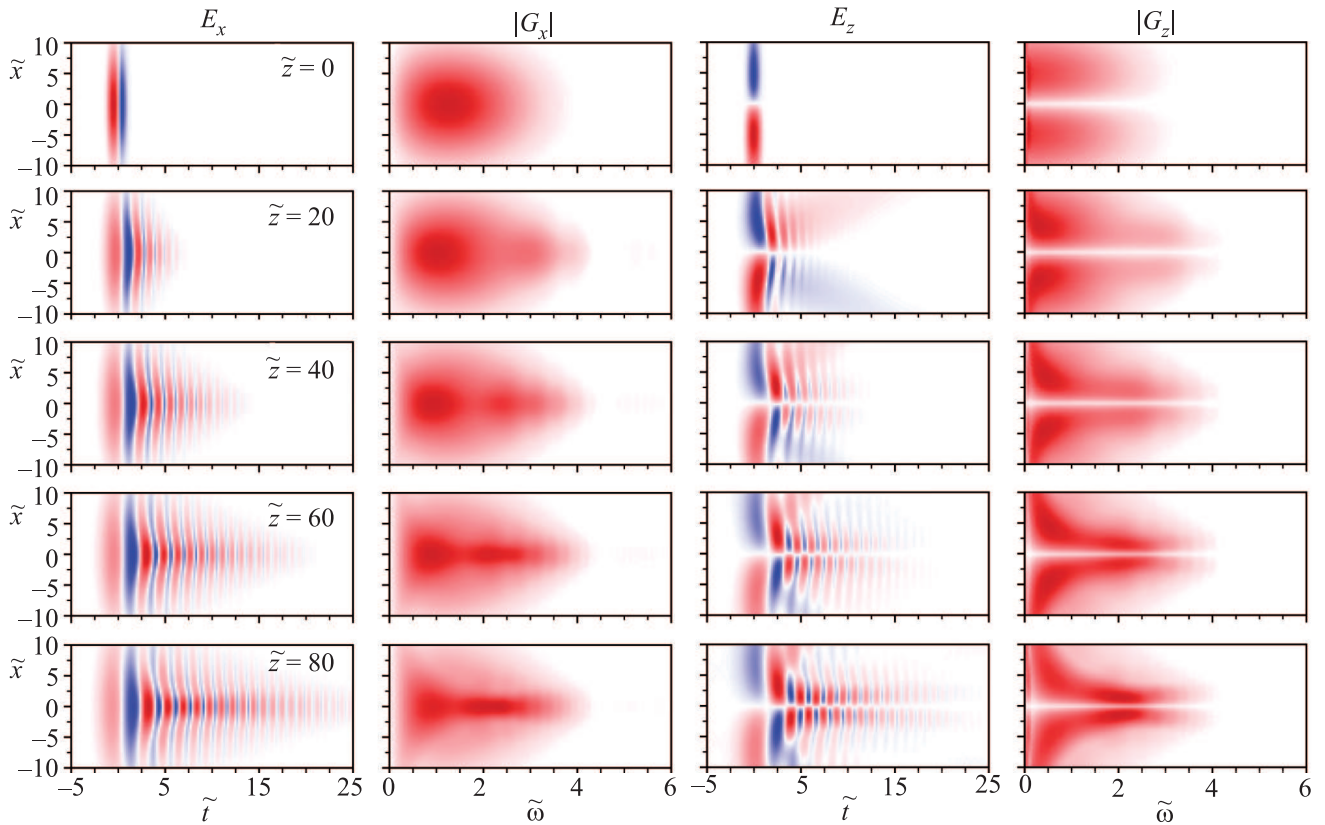


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пространственно-временные распределения поперечной и продольной компонент электрического поля  $E_x$ ,  $E_z$  и модули их временных спектров  $|G_x|$ ,  $|G_z|$  на различных расстояниях  $\tilde{z}$  в среде при  $q_{\text{diff}} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $q_{\text{disp}} = 9 \cdot 10^{-3}$  и  $q_{\text{nl}} = 5 \cdot 10^{-4}$

Граничные условия для ТМ-поляризованных импульсов будем задавать в том же виде (6)–(9), но полагая  $g_y = 0$ ,  $k_y = 0$  и, учитывая понижение размерности задачи,  $g_0 = \frac{4\pi E_0}{\Delta k \Delta \omega}$ .

Для численного решения полученной системы уравнений (17) использовали метод Кранка–Николсона с внутренними итерациями для достижения заданной точности на шаге. Спектр  $g_{x,z}(k_x, \omega, z)$  электрического поля  $E_{x,z}(x, t, z)$  рассчитывали на сетке дискретных значений. По пространственным и временной частотам вводили равноотстоящие отсчеты. Неравномерная сетка с адаптивным шагом вводилась по пространственной координате  $z$ .

В численных расчетах рассмотрим непараксиальную динамику волнового пакета, содержащего на входе в нелинейную среду всего одно полное колебание оптического поля. Такие предельно короткие по числу колебаний волны высокой интенсивности сегодня получают во многих лабораториях в терагерцовом диапазоне спектра [26].

На рисунках 1 и 2 приведены результаты расчета эволюции в оптической среде поперечной и продоль-

ной компонент поля и модулей их временных спектров  $G_{x,z}(\omega, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{x,z}(t, x, z) e^{-i\omega t} dt$  при разных

входных интенсивностях волны с гауссовым профилем (5) при  $N = 0.6$ . При таком значении  $N$ , как видно из рис. 1 и 2, на входе в среду при  $z = 0$  импульс имеет вид однопериодной волны [27]. Рисунки 1 и 2 даны в нормированных пространственных и временных координатах  $\tilde{t} = t/T_0$ ,  $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\tilde{x} = xk(\omega_0)$ ,  $\tilde{z} = zk(\omega_0)$ , здесь  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Светло-серым (в цвете – темно-красным) частям соответствуют максимальные положительные значения поля, темно-серым (в цвете – темно-синим) – максимальные отрицательные значения. В расчетах для входного волнового пакета полагали  $L = 14$  и  $q_{\text{diff}} = 2 \cdot 10^{-3}$ . Дисперсию показателя преломления рассматривали в виде формулы Коши [17], а дисперсионный параметр задачи для столь коротких импульсов считали большим дифракционного и равным  $q_{\text{disp}} = 9 \cdot 10^{-3}$  (дисперсия разных диэлектрических сред в терагерцовом спектральном диапазоне часто описывается формулой Коши и дисперсионным параметром, различаю-

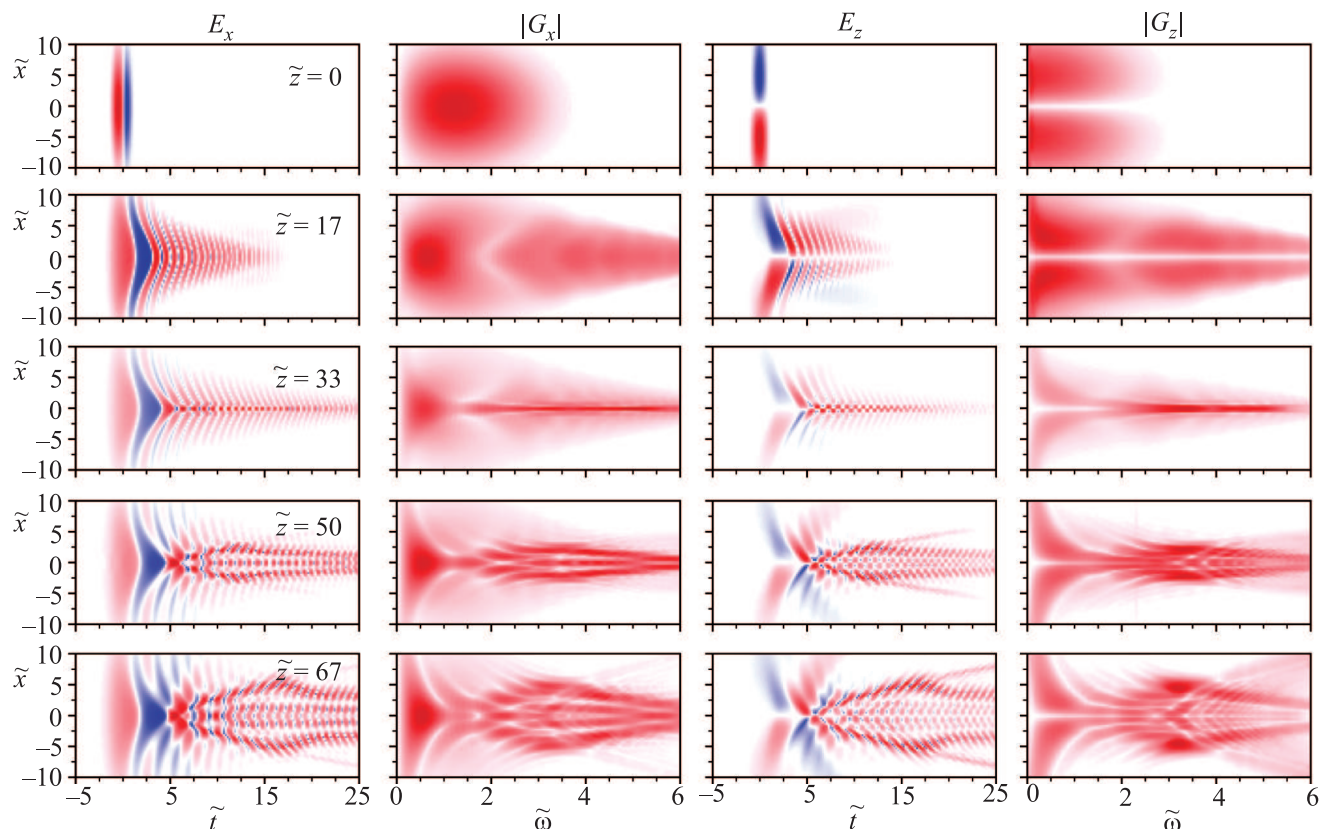


Рис. 2. (Цветной онлайн) Пространственно-временные распределения поперечной и продольной компонент электрического поля  $E_x$ ,  $E_z$  и модули их временных спектров  $|G_x|$ ,  $|G_z|$  на различных расстояниях  $\tilde{z}$  в среде при  $q_{\text{diff}} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $q_{\text{disp}} = 9 \cdot 10^{-3}$  и  $q_{\text{nl}} = 5 \cdot 10^{-3}$

щимся в широких пределах [28]). Нелинейный параметр задачи полагаали для расчетов, результаты которых даны на рис. 1, равным  $q_{\text{nl}} = 5 \cdot 10^{-4}$ , а на рис. 2 – равным  $q_{\text{nl}} = 5 \cdot 10^{-3}$ . Эти величины в терагерцовом диапазоне реализуемы, учитывая сильную нелинейность некоторых материалов в этом диапазоне [29] и уже достигнутые очень высокие интенсивности в системах генерации таких однопериодных волн [26].

Из рисунка 1 видно, что при указанных выше параметрах расчетной задачи доминирующим эффектом динамики основной поперечной компоненты электрического поля исходно однопериодной волны является ее дисперсионное расплывание. Так, уже на расстоянии  $\tilde{z} = 40$  длительность импульса (по уровню  $e^{-1}$ ) увеличивается в 4.5 раза. На этом расстоянии нелинейные эффекты проявляются в уширении спектра излучения в 1.2 раза. При дальнейшем распространении при уже существенно уменьшившейся из-за расплывания пиковой интенсивности волновой пакет увеличивается в размерах из-за дифракции и дисперсии практически в режиме линейной оптики.

Из-за нормальной дисперсии показателя преломления, которая задавалась, как было сказано выше, зависимостью Коши, высокочастотные компоненты поля отстают. Как видно из рис. 1, передний фронт становится низкочастотным и широким, задний – высокочастотным и узким. В отличие от симметричной относительно оси  $z$  поперечной компоненты поля излучения, его продольная компонента антисимметрична относительно оси  $z$ . Такой характер распределения поля с его нулевым на оси значением сохраняется и при дисперсионном увеличении длительности импульса. За счет нелинейности среды спектр продольной компоненты тоже уширяется, максимум спектральной плотности смещается в область высоких частот.

На рисунке 2 приведены результаты самовоздействия такой же, как на рис. 1, по исходным размерам однопериодной волны, но в среде с более высокой нелинейностью. Из рисунка 2 видно, что возросшая нелинейность отклика среды убыстряет дисперсионное расплывание волнового пакета. Увеличение его длительности в 7 раз происходит уже на существен-

но меньшем расстоянии  $\tilde{z} = 17$ . На этой дистанции значительно, примерно в 2 раза, уширяется и исходный спектр волны. На расстоянии  $\tilde{z} = 33$  после низкочастотного широкого пучка наблюдается ярко выраженная узкая нить самофокусировки излучения. Ее спектр высокочастотный и простирается от удвоенных до ушестиренных частот по сравнению с центральной частотой исходного спектра волны. Сильная дифракция сжатого в нить пучка приводит в дальнейшем к его уширению с формированием пуста внутри высокочастотного волнового пакета. В целом сходная эволюция продольной компоненты поля волны в процессе ее непараксиальной самофокусировки отличается отсутствием поля на оси пучка. Соответственно, например, на расстоянии  $\tilde{z} = 50$  на утроенных частотах максимумы спектральной плотности поперечной компоненты поля наблюдаются на трех поперечных расстояниях  $\tilde{x}$  (+2.5; 0; -2.5), а для спектральной плотности продольной компоненты – на двух расстояниях  $\tilde{x}$  (+2.5; -2.5). Основным эффектом, который обусловлен непараксиальностью излучения, как видно из рис. 2, при самофокусировке однопериодной на входе в нелинейную среду волны заключается в том, что в среде напряженность продольной компоненты ее электрического поля может возрастать значительно. Так в области формирования нити самофокусировки (при  $\tilde{z} = 33$ ) напряженность продольной компоненты поля излучения по сравнению с исходной продольной компонентой в рассмотренном случае увеличивается в 7 раз и составляет почти 18% от величины поперечной компоненты поля волны на входе в нелинейную среду.

Из рисунка 3 видно, что при самовоздействии волнового пакета, проиллюстрированного на рис. 2, наблюдается увеличение доли энергии продольной компоненты поля излучения  $\tilde{W}(\tilde{z}) = W_{\text{long}}(\tilde{z})/W_{\text{init}}$ , где  $W_{\text{long}}(\tilde{z}) = \iint_{-\infty}^{\infty} |g_z(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{z})| d\tilde{\omega} d\tilde{k}_x$  и  $W_{\text{init}} = \iint_{-\infty}^{\infty} (|g_x(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{z} = 0)| + |g_z(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, \tilde{z} = 0)|) d\tilde{\omega} d\tilde{k}_x$ . Эта доля стремительно нарастает в процессе формирования узкой нити самофокусировки при  $\tilde{z}$ , большем 28. Максимальная доля энергии продольной компоненты поля в общей энергии пучка достигалась на  $\tilde{z} = 42$  и составила 1.2%. Дальнейшее некоторое снижение этой доли в процессе дифракционного расплывания волнового пакета обусловлено появлением в спектре излучения эванесцентных мод, связанных с возвращением энергии продольной компоненты поля в энергию поперечной компоненты, в том числе, по видимому, в спектральные компоненты, отражаемые

назад [5]. Этот процесс в данной статье не анализировался.

Таким образом, в настоящей работе проанализированы некоторые особенности самовоздействия непараксиальных волн из малого числа колебаний. Причем иллюстрирован этот анализ рассмотрением самофокусировки предельно короткой по числу колебаний на входе в среду волны в узкую оптическую нить с поперечными размерами, соизмеримыми с центральной длиной волны излучения. Возникает вопрос, а как значительно будут отличаться результаты расчетов такого сильного сверхуширения пространственных спектров излучения, временной спектр которого также сверхуширяется, если мы будем использовать более простые модели распространения света в оптических средах? Тем более, что, хотя величина продольной компоненты поля излучения возрастает при самофокусировке значительно и может оказаться сопоставимой с поперечной компонентой поля волны на входе в среду, общая энергия волны в ее продольной компоненте, как видно из рис. 3, все-таки невелика. Расчет ди-

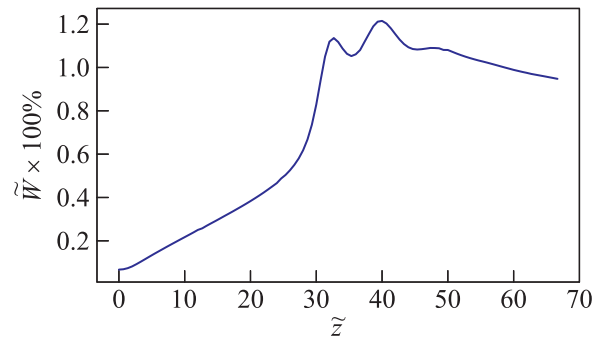


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость доли энергии в продольной компоненте поля излучения по отношению к полной исходной энергии волны от пройденного ею расстояния в среде при  $q_{\text{diff}} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $q_{\text{disp}} = 9 \cdot 10^{-3}$  и  $q_{\text{nl}} = 5 \cdot 10^{-3}$

намики спектра поперечной компоненты поля волны по первому уравнению системы (17) в пренебрежении слагаемыми со спектральной плотностью продольной компоненты поля и последующий расчет динамики спектра продольной компоненты поля по линеаризованному второму уравнению системы (17), в котором динамика поперечной компоненты считается известной, дает близкий к полученному выше строго результат. Так, разница модулей спектров продольной компоненты поля в нити самофокусировки (при  $\tilde{z} = 33$ , рис. 2), рассчитанного по уравнениям системы (17) и полученного сначала для поперечной структуры поля волны в пренебре-

жении в (17) его продольной компонентой, с последующим ее расчетом по известной поперечной структуре поля, составляет порядка 5% в области удвоенных и утроенных частот и ниже одного процента в области исходной центральной частоты и более низких частот излучения. Столь не высокое отличие результатов расчета объясняется тем, что линеаризованные уравнения (17) описывают как параксиальную, так и непараксиальную эволюцию спектров излучения. Отличие в описании параксиальной и непараксиальной динамики спектров излучения в линейной среде возникает при переходе к приближению однонаправленного распространения волны и использовании укороченных (с первой производной по  $z$ ) спектральных уравнений [17, 19]. Следовательно, при изучении других особенностей самовоздействия непараксиального излучения, используя полные спектральные уравнения, с хорошей точностью можно рассчитывать динамику спектра поперечной компоненты поля в пренебрежении его продольной компонентой, а затем в приближении заданной динамики поперечной компоненты поля рассчитывать ее продольную часть. Дополнительно отметим, что модель (17) в пренебрежении продольной компонентой поля описывает также непараксиальную динамику спектров ТЕ-волны [30]. И рис. 2 (его левая часть, поскольку для такой волны продольной компоненты поля не возникает) с хорошей точностью описывает особенности самофокусировки в нить и последующее дифракционное расплывание высокочастотной части излучения в оптическую структуру с пустотами внутри для исходно линейно поляризованной по  $y$ -координате однопериодной волны.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08).

1. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М. (1990), с. 279.
2. С. А. Ахманов, В. А. Выслух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1988), с. 67.
3. R. W. Boyd, *Nonlinear optics*, Academic Press, Springfield, VA, USA (2008), p. 69.
4. С. А. Изъюров, С. А. Козлов, Письма в ЖЭТФ **71**, 666 (2000).
5. M. D. Feit and J. A. Fleck, *JOSA B* **5**, 633 (1988).
6. Л. Новотный, Б. Хехт, *Основы нанооптики*, Физматлит, М. (2009), с. 60.
7. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Изд-во ИПФ РАН, Н. Новгород (1997), с. 161.

8. R. Martinez-Herrero, P. M. Mejias, and A. Manjavacas, *Eur. J. Phys.* **33**, 579 (2012).
9. Д. А. Савельев, С. Н. Хонина, *Компьютерная оптика* **36**, 511 (2012).
10. T. Grosjean and D. Courjon, *Opt. Express* **14**, 2203 (2006).
11. X. S. Xie and R. C. Dunn, *Science* **265**, 361 (1994).
12. С. В. Гарнов, И. А. Щербаков, *Успехи физических наук* **181**, 97 (2011).
13. V. G. Bespalov, A. A. Gorodetskiy, I. Yu. Denisyuk, S. A. Kozlov, V. N. Krylov, G. V. Lukomskii, N. V. Petrov, and S. E. Putilin, *J. Optical Technology* **75**, 636 (2008).
14. А. И. Маймистов, *Квантовая электроника* **30**, 287 (2000).
15. С. В. Сазонов, *Известия РАН, сер. физ.* **75**, 172 (2011).
16. Н. В. Высотина, Н. Н. Розанов, В. Е. Семенов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 337 (2006).
17. С. А. Козлов, В. В. Самарцев, *Основы фемтосекундной оптики*, Физматлит, М. (2009).
18. А. Н. Берковский, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, *Оптический журнал* **75**, 28 (2008).
19. С. А. Козлов, П. А. Петрошенко, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 241 (2002).
20. В. Н. Васильев, С. А. Козлов, П. А. Петрошенко, Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **96**, 217 (2004).
21. A. A. Ezerskaya, D. V. Ivanov, S. A. Kozlov, and Yu. S. Kivshar, *J. Infrared Milli Terahz Waves* **33**, 926 (2012).
22. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, Yu. A. Shpolyanskiy, and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **66**, 013811 (2002).
23. A. A. Drozdov, Yu. S. Kivshar, S. A. Kozlov, and A. A. Sukhorukov, *Phys. Rev. A* **86**, 053822 (2012).
24. R. W. Boyd, S. G. Lukishova, and Y. Shen, *Self-focusing: Past and Present*, Springer, N.Y. (2009), p. 399.
25. В. П. Кандидов, С. А. Шленов, О. Г. Косарева, *Квантовая электроника* **39**, 205 (2009).
26. M. Shalaby and C. P. Hauri, *Nat. Commun.* **6**, 5976 (2015).
27. Yu. A. Kapoyko, A. A. Drozdov, S. A. Kozlov, and X. Ch. Zhang, *Phys. Rev. A* **94**, 033803 (2016).
28. E. A. Strepitov, E. P. Liakhov, N. S. Balbekin, M. K. Khodzitsky, O. A. Smolyanskaya, A. S. Trulyov, and M. K. Serebryakova, *Proc. SPIE 9542, Medical Laser Applications and Laser-Tissue Interactions VII*, 95420M (2015).
29. K. Dolgaleva, D. V. Materikina, R. W. Boyd, and S. A. Kozlov, *Phys. Rev. A* **92**, 023809 (2015).
30. М. А. Князев, С. А. Козлов, *Квантовая электроника* **48**, 119 (2018).