

Линейный оптический отклик неколлинеарной магнитной системы: гидродинамическая теория

Е. А. Караштин¹⁾

Институт физики микроструктур РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Rikagaku Kenkyūsho Center for Emergent Matter Science, Wako, 351-0198 Saitama, Japan

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 3 мая 2018 г.

После переработки 4 июня 2018 г.

Построена гидродинамическая теория линейного отклика неколлинеарно намагниченной среды при взаимодействии ее с электромагнитным излучением. Проанализированы линейные и квадратичные по намагниченности эффекты, которые возникают в результате пространственной неоднородности магнитного момента. Линейные по намагниченности эффекты включают в себя эффект, аналогичный невзаимному двулучепреломлению, а также взаимный и невзаимный поворот плоскости поляризации, возникающие из-за неоднородности магнитного момента. Показано, что в рассматриваемой среде возможно возникновение эффекта, связанного с наличием в ней равновесного спинового тока. Этот эффект определяется либо неоднородностью спинового тока, либо пространственной дисперсией волны. Эффект, связанный с пространственной дисперсией волны, линейен по ее волновому вектору и аналогичен невзаимному двулучепреломлению. Эффект, связанный с неоднородностью спинового тока, описывает поворот плоскости поляризации, который, однако, может существовать в системе с нулевой средней намагниченностью.

DOI: 10.1134/S0370274X18140035

Известно, что в системах с неколлинеарным распределением намагниченности возможно наличие равновесного спинового тока [1–8]. Под спиновым током здесь понимается “чистый” поток спина, который не сопровождается переносом заряда. Наличие такого потока в среде (неравновесной) приводит к обратному спиновому эффекту Холла [9, 10], в результате чего появляется электрическая разность потенциалов. Равновесный спиновый ток в рамках теоретических предсказаний должен привести к флексомагнитоэлектрическому эффекту [11–13], заключающемуся в возникновении электрической поляризации в неоднородном ферромагнетике. Было показано, что в многослойной магнитной системе в результате связи неоднородной намагниченности и электрической поляризации можно возбудить оптическую моду ферромагнитного резонанса электрическим микроволновым полем [14]. Интерес к данным явлениям обусловлен возможными новыми способами управления магнитной системой с помощью электрического поля или тока.

Недавно на основе симметричных соображений было предсказано возникновение в средах со спино-

вым током дополнительного отклика на удвоенной частоте при взаимодействии света с такими средами [15]. Этот эффект наблюдался в полупроводниках, в которых спиновые токи были индуцированы внешним воздействием [16]. Также была построена теория данного явления в неколлинеарных магнитных средах с равновесным спиновым током [17, 18]. В работах [17, 18] используется гидродинамическое приближение, в рамках которого рассчитываются усредненные характеристики электронов проводимости, включая средний спин, а равновесный обменный спиновый ток и необходимые для возникновения исследуемого явления спин-орбитальные эффекты вводятся феноменологически. В данной работе на основе аналогичного подхода рассчитан линейный оптический отклик неколлинеарной магнитной среды с равновесным спиновым током.

В рамках обменного приближения тензор равновесного спинового тока J_{ij}^e имеет в младших порядках по намагниченности и ее производным вид [18, 19]:

$$J_{ij}^e = F [\mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \nabla_j \mathbf{M}(\mathbf{r})]_i, \quad (1)$$

где F – константа и предполагается, что вектор намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ нормирован на единицу. Видно,

¹⁾e-mail: eugenk@ipmras.ru

что такой спиновый ток может возникать только в нецентросимметричных магнитных системах. Можно также записать индуцированную волной линейную по ее электрическому полю \mathbf{E} поляризацию \mathbf{P} из симметричных соображений, учитывая, что вектор \mathbf{P} меняет знак при операции инверсии. Поскольку в данной работе внимание сосредоточено на явлениях, возникающих из-за пространственно-неоднородного распределения магнитного момента, мы будем предполагать, что кристаллическая структура является центросимметричной, а распределение намагниченности центром инверсии не обладает. В силу указанной симметрии вкладов, содержащих только производные первого порядка по намагниченности, а также линейных по волновому вектору волны \mathbf{k} , нет. Если ограничиться слагаемыми второго порядка по пространственным производным (либо первого порядка по производным и линейными по \mathbf{k}) и, кроме того, первого и второго порядка по намагниченности, вектор поляризации принимает вид:

$$P_i = A_{ijlpq}^{(1)} \nabla_j k_l M_p E_q + A_{ijlpq}^{(2)} \nabla_j \nabla_l M_p E_q + B_{ijlpnq}^{(1)} \nabla_j k_l M_p M_n E_q + B_{ijlpnq}^{(2)} \nabla_j \nabla_l M_p M_n E_q, \quad (2)$$

где оператор ∇ действует лишь на вектор \mathbf{M} (в случае, когда входит два вектора \mathbf{M} , возможны разные способы симметризации; мы будем предполагать, что операторы ∇ действуют в этом случае лишь на один из этих векторов), $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ – тензоры, которые в изотропном случае могут состоять лишь из символов кронекера δ_{jl} и антисимметричных тензоров Леви-Чивита ϵ_{jlp} во всевозможных сочетаниях. Очевидно, что слагаемые, пропорциональные обменно-спиновому току вида (1), содержатся в слагаемых с $B^{(i)}$. Дополнительные ограничения на вид тензоров $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ накладываются соотношения Онзагера [20]. В рассматриваемой среде присутствуют, кроме намагниченности, диссипативные процессы. Поэтому соотношения Онзагера связывают коэффициенты в исходной и обращенной во времени системах:

$$A_{ijlpq}^{(1,2)}(\{t\}) = \pm A_{qjlpni}^{(1,2)}(\{-t\}), \quad (3)$$

$$B_{ijlpnq}^{(1,2)}(\{t\}) = \mp B_{qjlpni}^{(1,2)}(\{-t\}), \quad (4)$$

где знаки \pm (\mp) соответствуют первым и вторым коэффициентам. Симметричные соображения (2) (с учетом (3), (4)) дают большое количество комбинаций, с трудом поддающихся анализу. Однако, как будет видно из дальнейших расчетов, при учете конкретных механизмов возникает незначительное число слагаемых, которые, несомненно, должны удовлетворять (2)–(4).

Гидродинамические уравнения, описывающие усредненные характеристики движения электронов проводимости под действием поля волны, во многом аналогичны использованным в [17, 18]. Однако, поскольку в данной работе требуется учет более высокого порядка по производным от намагниченности либо пространственной дисперсии, уравнения имеют ряд отличий. Одним из них является необходимость учета диффузии заряда и спина (как будет показано ниже, диффузия заряда не играет роли). Другим важным отличием является необходимость учета градиента тензора спиновых токов. Уравнения имеют вид:

$$\mathbf{q} = n\mathbf{V} + D \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \equiv n\mathbf{v} + \alpha_{SH} \epsilon_{ijk} J_{ij} \mathbf{e}_k + D \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5)$$

$$J_{ij} = s_i v_j + D' \frac{\partial s_i}{\partial r_j} + J_{ij}^e, \quad (6)$$

$$\dot{n} + \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ind}} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) + \eta_H \mathbf{V} \times \mathbf{M} + \eta'_H \mathbf{V} \times \mathbf{s} - \frac{\mathbf{V}}{\tau_p} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_i \mathbf{V}_0) \mathbf{e}_i, \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{s}} + \nabla_j J_{ij} \mathbf{e}_i + \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{M}}{\tau_{ex}} + \frac{\mathbf{s} - \mathbf{s}_0}{\tau_s} = 0, \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{ind}} = -4\pi (n - n_0). \quad (10)$$

Здесь n , \mathbf{q} и J_{ij} – концентрация, поток электронов и тензор потока их спина, D и D' – коэффициенты диффузии электронов и их спина, \mathbf{v} и \mathbf{V} – нормальная и полная (с учетом аномальной) скорость электронов, α_{SH} , η_H и η'_H – коэффициенты спинового, аномального эффектов Холла и эффекта Холла на собственном спине электронов, τ_e и τ_s – время релаксации импульса и спина, $\tau_{ex} = \frac{1}{2J}$ – обменное время (J – обменная константа), $\mathbf{E} \sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ и $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ – электрическое и магнитное поле волны (ω – частота волны), \mathbf{E}_{ind} – наведенное волной поле, n_0 и $s_0 = \beta \mathbf{M} \equiv n_0 \frac{J}{\epsilon_f} \mathbf{M}$ – равновесные концентрация электронов и адиабатический спин (ϵ_f – энергия Ферми), равновесный спиновый ток J_{ij}^e определяется формулой (1), e и m – абсолютное значение заряда и масса электрона, c – скорость света в вакууме, \mathbf{e}_i – орты декартовой системы координат, \mathbf{V}_0 – полная скорость электронов в отсутствии поля волны.

Важно отметить, что уравнение Эйлера содержит дополнительный вклад, связанный с градиентом полной равновесной скорости электронов. Рассмотрены два типа систем: ограниченная и бесконечная (периодическая) среда [17]. В случае ограниченной системы необходимо наложить ограничение на равновесный поток: $\mathbf{q}_0 = 0$. Это означает, что

в результате разделения зарядов возникает электрическое поле, уравнивающее эффективное поле, связанное с обратным спиновым эффектом Холла (а здесь, в отличие от [17], и диффузией спина); в результате полная скорость электронов в равновесии равна нулю: $\mathbf{V}_0 = 0$. В случае же периодической системы разделения зарядов не происходит и возникает отличная от нуля скорость электронов $\mathbf{V}_0(\mathbf{r})$, которая в общем случае зависит от координат из-за пространственно-неоднородной намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Поскольку здесь важна производная от этой скорости, для корректного учета ее необходимо перейти в систему координат, движущуюся с \mathbf{V}_0 , что приводит к появлению дополнительного слагаемого в правой части (8) вида $(\mathbf{V} \cdot \nabla_i \mathbf{V}_0) \mathbf{e}_i$.

В отсутствии поля волны равновесная концентрация электронов $n_e = n_0$ и индуцированное поле \mathbf{E}_{ind} равно нулю. Равновесный же спин в результате диффузии и наличия введенного феноменологически спинового тока в неоднородной среде отклоняется от локального направления намагниченности и имеет вид:

$$\mathbf{s}_e = \beta \mathbf{M} + D' \beta \tau_s \Delta \mathbf{M} + \left(\frac{D'}{F} \beta \frac{\tau_s^2}{\tau_{ex}} - \tau_s \right) \nabla_j J_{ij}^e \mathbf{e}_i \quad (11)$$

с точностью до второго порядка по \mathbf{M} и ее производным вплоть до второй; $\nabla_j J_{ij}^e \mathbf{e}_i = F \mathbf{M} \times \Delta \mathbf{M}$. Наличие среднего спина, не параллельного локальной намагниченности, объясняется переносом спина в неоднородном ферромагнетике. В случае периодических граничных условий, как следует из (5), (6), равновесная скорость равна

$$\mathbf{V}_0 = \frac{\alpha SH}{n_0} (-\beta D' \text{rot } \mathbf{M} + J_{ij}^e e_{ijl} \mathbf{e}_l). \quad (12)$$

Для того, чтобы рассматриваемая система находилась в равновесии, из (7) возникает требование: $\text{div } \mathbf{V}^0 = 0$, которое в предположении постоянства модуля намагниченности сводится к условию:

$$\text{div} (\mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{M} + \mathbf{M} \text{div } \mathbf{M}) = 0. \quad (13)$$

Если ввести вектор эффективной электрической поляризации среды с равновесным спиновым током $\mathbf{P}_0 = e_{ijl} J_{ij}^e \mathbf{e}_l \equiv F (\mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{M} + \mathbf{M} \text{div } \mathbf{M})$ (с точностью до константы), соответствующий магнитоэлектрическому эффекту [19], данное условие принимает вид $\text{div } \mathbf{P}_0 = 0$, что соответствует отсутствию аккумуляции заряда.

Для определения отклика среды необходимо вычислить линейный по полю поток электронов \mathbf{q} , тогда электрическая поляризация будет определяться

выражением $\mathbf{P} = \frac{i\epsilon}{\omega} \mathbf{q}$. Решая уравнение в линейном порядке по полю распространяющейся в среде волны, получаем в общем случае следующую поляризацию:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & U_1 \mathbf{E} + U_2 \mathbf{E} \times \mathbf{M} + V_1 \mathbf{E} (\mathbf{k} \cdot \text{rot } \mathbf{M}) + \\ & + \mathbf{E} \times (V_2 \mathbf{k} \times \text{rot } \mathbf{M} + V_3 \text{rot } \text{rot } \mathbf{M} + V_4 \Delta \mathbf{M}) + \\ & + W_1 \mathbf{E} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_0) + \mathbf{E} \times (W_2 \text{rot } \mathbf{P}_0 + W_3 \mathbf{M} \times \Delta \mathbf{M}), \quad (14) \end{aligned}$$

где $U_i(\omega)$, $V_i(\omega)$, $W_i(\omega)$ – константы, определяемые параметрами системы. В (14) слагаемые с U_1 и U_2 определяют немагнитный отклик и отклик, пропорциональный локальной намагниченности (линейный эффект Керра [21]). В ограниченной системе, кроме этих двух слагаемых, присутствуют только вклады, определяемые V_4 и W_3 . Эти вклады возникают из-за эффекта Холла на собственном магнитном моменте электронов вида (11) (сила, определяемая константой η'_H , в (8)). В периодической системе отличны от нуля все выписанные в (14) слагаемые. Вклады с $V_{1,2}$ возникают в результате силы Лоренца, действующей на движущиеся в магнитном поле волны электроны (первое слагаемое в (12)). Наконец, перенос и силы инерции $((\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla_i \mathbf{V}_0) \mathbf{e}_i$ в (8)) должны в пространственно-неоднородном случае учитываться вместе; они дают слагаемые с $W_{1,2}$, V_3 и вклад в V_1 .

В (14) вклады V_1 и V_2 соответствуют невязимной поправке к диагональной и недиагональной части восприимчивости. Аналогичный эффект наблюдался в экспериментах [22, 23], где он связывался с тороидным моментом системы. Такой эффект может возникать как интерференционное явление [24]. Здесь показано, что к данному эффекту может привести также поправка, указанная в (14). Слагаемые с V_3 и V_4 взаимны и описывают поправку к эффекту Керра (поворот плоскости поляризации), связанную с неоднородностью намагниченности. Спиновый ток дает эффект, который в (14) определяется коэффициентами $W_{1,2,3}$. Первые два из них связаны только с равновесным спиновым током. Третий содержит вклад как от равновесного спинового тока, так и от спиновой диффузии. В то время, как слагаемые, определяемые $W_{2,3}$, описывают квадратичную по намагниченности поправку к эффекту Керра, которая может существовать лишь в диссипативной системе, вклад с W_1 описывает невязимное двулучепреломление (разные показатели преломления для различных направлений распространения волны) [25].

Поскольку слагаемые, связанные со спиновым током, представляют наибольший интерес в рамках данной работы, приведем выражение для соответствующих коэффициентов:

$$W_1 = iW_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha_{SH} n_e^{-1} \omega_p^2}{\omega (i\omega + \tau_p^{-1} - i\omega_p^2 \omega^{-1})^2}, \quad (15)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi} \frac{i(F\tau_s - D'\beta \frac{\tau_s}{\tau_{ex}}) \omega_p^2}{\omega (i\omega + \tau_p^{-1} - i\omega_p^2 \omega^{-1})^2}. \quad (16)$$

Отметим, что слагаемые в (14), обусловленные спиновым током, соответствуют симметричным соотношениям (2), константы $B^{(1)} \sim \delta_{iq} (\delta_{jp} \delta_{nl} - \delta_{lp} \delta_{jn})$ – для W_1 , $B^{(2)} \sim \delta_{ln} (\delta_{ij} \delta_{pq} - \delta_{ip} \delta_{jq}) + \delta_{lp} (\delta_{in} \delta_{jq} - \delta_{ij} \delta_{nq})$ – для W_2 и $B^{(2)} \sim \delta_{jl} (\delta_{ip} \delta_{nq} - \delta_{in} \delta_{pq})$ – для W_3 . Поскольку α_{SH} и τ_s в обращенной по времени системе имеют противоположный знак, эти константы удовлетворяют соотношениям Онзагера (4). Не приводя здесь коэффициенты U_i и V_i , заметим, что соотношения Онзагера выполняются аналогичным образом и для вкладов, которые определяются ими.

Примером среды, в которой отличен от нуля вектор (эффективной) электрической поляризации \mathbf{P}_0 , может служить магнитная циклоида (см. рис. 1):

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_x \cos qz + \mathbf{e}_z \sin qz, \quad (17)$$

\mathbf{e}_i – орты в декартовой системе координат, $q = 2\pi/\lambda$, где λ – период циклоиды. В такой магнитной си-

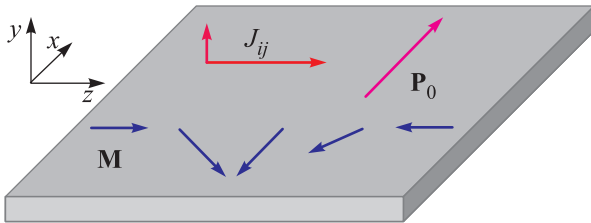


Рис. 1. (Цветной онлайн) Спиновый ток и вектор эффективной поляризации в магнитной циклоиде (показана половина периода намагниченности)

стеме средние по периоду значения от всех линейных по намагниченности слагаемых в (14), а также от производной спинового тока равны нулю. Поэтому единственным вкладом от магнитной текстуры, который имеет отличное от нуля среднее значение, будет вклад, определяемый формулой $W_1 \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_0)$. Такой вклад приведет к тому, что в системе с намагниченностью вида (17) возникнет ориентационный эффект: волны, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном оси циклоиды, вдоль направления, в котором магнитный момент имеет осциллирующую компоненту (ox), будут иметь разные показатели преломления для разного направления распространения. Два этих направления различаются, очевидно, в силу того, что циклоида имеет один

из двух вариантов закрученности, связанных операцией инверсии координат (рис. 2). В одном случае

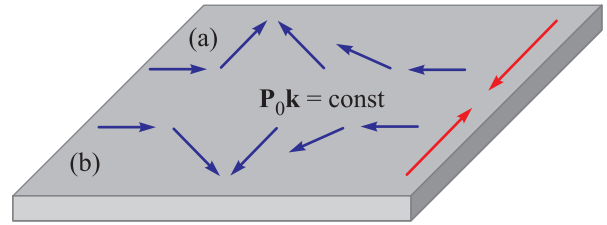


Рис. 2. (Цветной онлайн) Магнитная циклоида с разным направлением закрученности (a) и (b). Стрелки справа показывают эквивалентные направления распространения волны

при движении в положительном направлении вдоль оси циклоиды намагниченность вращается в плоскости xz против часовой стрелки, в другом – по часовой стрелке. Противоположные направления распространения волны (по ox и против ox) эквивалентны для двух противоположных закрученностей циклоиды. Инвариантом здесь является, как нетрудно видеть из (1), (14), величина

$$[[\mathbf{M} \times \nabla_j \mathbf{M}] \times \mathbf{k}]_j \equiv \mathbf{k} \cdot (\mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{M} + \mathbf{M} \text{ div } \mathbf{M}). \quad (18)$$

Описанный здесь эффект является новым ориентационным эффектом, который возникает в системах с нулевой средней намагниченностью. Эффект может быть экспериментально обнаружен, например, по невзаимному отражению света, распространяющегося в плоскости xy , от поверхности материала, параллельной xz .

Слагаемые в поляризации, связанные с неоднородностью спинового тока, взаимны и могут быть отличны от нуля, например, в случае, если к намагниченности вида (17) добавить зависимость от второй координаты. Экспериментально такую систему можно реализовать путем периодического наноструктурирования среды с указанной намагниченностью.

Таким образом, в данной работе продемонстрировано наличие в линейном отклике неколлинеарно намагниченной среды вклада, который может быть описан равновесным спиновым током. Показано наличие нового ориентационного магнитооптического эффекта, линейного по волновому вектору волны. Этот эффект аналогичен невзаимному двулучепреломлению, однако возникает в системе с нулевой средней намагниченностью. Также показано наличие поворота плоскости поляризации (эффект Керра), возникающего из-за пространственной неоднородности спинового тока. Механизмами возникновения данных эффектов являются как протекание рав-

новесного спинового тока, так и неравновесные процессы, связанные с диффузией спина, которые дают электрическую поляризацию за счет эффектов Холла. Кроме того, исследован линейный по намагниченности вклад в наведенную волной поляризацию среды, связанный с неоднородностью магнитного момента и возникающий в результате диффузии спина. К возможным проявлениям последнего следует отнести наблюдавшийся в эксперименте невзаимный оптический эффект, связанный с тороидным моментом системы, который ранее объяснялся чисто интерференционными явлениями.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 16-32-10340).

1. E. Sonin, *Adv. Phys.* **59**, 181 (2010).
2. J. Wang and K. S. Chan, *Phys. Rev. B* **74**, 035342 (2006).
3. J. König, M. C. Bönsager, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 187202 (2001).
4. B. Wang, J. Peng, D. Y. Xing, and J. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 086608 (2005).
5. M. Chshiev, A. Manchon, A. Kalitsov, N. Ryzhanova, A. Vedyayev, N. Strelkov, W. H. Butler, and B. Dieny, *Phys. Rev. B* **92**, 104422 (2015).
6. W. Chen, P. Horsch, and D. Manske, *Phys. Rev. B* **89**, 064427 (2014).
7. Y. G. Shen and Z. H. Yang, *Europhys. Lett.* **78**, 17003 (2007).
8. J. Wang and K. S. Chan, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 236215 (2007).
9. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, *Письма в ЖЭТФ* **13**, 657 (1971).
10. J. Sinova, S. O. Valenzuela, J. Wunderlich, C. H. Back, and T. Jungwirth, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 1213 (2015).
11. В. Г. Барьяхтар, В. А. Львов, Д. А. Яблонский, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 565 (1983).
12. H. Katsura, N. Nagaosa, and A. V. Balatsky, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 057205 (2005).
13. А. П. Пятаков, А. К. Звездин, *УФН* **182**, 593 (2012).
14. Е. А. Караштин, А. А. Фраерман, *ФТТ* **58**, 11, 2149 (2016).
15. J. Wang, B. F. Zhu, and R. B. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 256601 (2010).
16. L. K. Werake and H. Zhao, *Nat. Phys.* **6**, 875 (2010).
17. Е. А. Караштин, *ФТТ* **59**, 11, 2169 (2017).
18. Е. А. Karashtin and A. A. Fraerman, *J. Phys.: Condens. Matter* **30**, 165801 (2018).
19. P. Bruno and V. K. Dugaev, *Phys. Rev. B* **72**, 241302 (2005).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
21. Г. С. Кринчик, *Физика магнитных явлений*, Издательство Московского университета, М. (1976).
22. O. G. Udalov, M. V. Sapozhnikov, E. A. Karashtin, B. A. Gribkov, S. A. Gusev, E. V. Skorohodov, V. V. Rogov, A. Yu. Klimov, and A. A. Fraerman, *Phys. Rev. B* **86**, 094416 (2012).
23. I. A. Kolmychek, V. L. Krutyanskiy, T. V. Murzina, M. V. Sapozhnikov, E. A. Karashtin, V. V. Rogov, and A. A. Fraerman, *J. Opt. Soc. Am. B* **32**, 331 (2015).
24. Е. А. Karashtin, *Phys. Rev. B* **87**, 094418 (2013).
25. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов*, Наука, М. (1979).