

Электромагнитные взаимодействия мезонов и πa_1 -диагонализация

А. А. Осипов¹⁾

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 8 июня 2018 г.

Показано, что в отличие от общепринятой точки зрения, включение электромагнитных взаимодействий в модель Намбу–Иона-Лазинио с необходимостью выводит за рамки доминантности векторных мезонов. Последнее связано с процедурой устранения πa_1 переходов в эффективном мезонном лагранжиане. На примере радиационного распада $a_1(1260) \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$ демонстрируется существование прямой связи между требованием градиентной инвариантности амплитуды и наличием электромагнитной вершины, описывающей прямое излучение фотона и пиона кварк-антикварковой парой. Ключевую роль в выполнении тождеств Уорда здесь играют поверхностные члены, возникающие в процессе вычисления аномальной треугольной кварковой диаграммы, одной из вершин которой и является нарушающее гипотезу векторной доминантности взаимодействие.

DOI: 10.1134/S0370274X1815002X

Электромагнитные взаимодействия в модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) вводятся на основе исходного кваркового лагранжиана путем стандартной замены производной на ковариантную [1–6]. Считается (и это подтверждается приводимыми вычислениями), что после бозонизации теории электромагнитные взаимодействия мезонов принимают вид соответствующий гипотезе векторной доминантности, согласно которой фотоны взаимодействуют с заряженными адронами только через нейтральные векторные ρ , ω и ϕ мезоны.

В данном письме мы покажем, что во всей этой стройной картине имеется одно существенное обстоятельство, которое игнорируется, так как на первый взгляд (но лишь на первый взгляд), кажется не имеющим отношения к рассматриваемому вопросу. Связано оно с процедурой устранения смешивания нефизического аксиально-векторного поля a'_μ с псевдоскалярными мезонами [7–11]. Обычно переход к физическому состоянию a_μ осуществляется путем линейной замены переменных

$$a'_\mu = a_\mu + \kappa t \partial_\mu \pi, \tag{1}$$

где t – масса составляющего кварка, а размерная константа κ выражается через массу a_1 -мезона $\kappa = 3/m_{a_1}^2$. Эта стандартная процедура содержит производную. Наше замечание состоит в том, что в присутствии электромагнитных взаимодействий данная производная должна быть заменена ковариантной, поскольку в противном случае замена (1) ведет к на-

рушению градиентной инвариантности эффективного мезон-фотонного лагранжиана. Из ковариантной производной появляются новые вершины, не характерные для модели векторной доминантности.

Помимо общих аргументов в пользу такой замены мы приводим конкретный пример радиационного $a_1(1260) \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$ распада, для которого стандартные вычисления дают градиентно-неинвариантное выражение для амплитуды. Затем мы показываем, как электромагнитная вершина, содержащаяся в ковариантной производной, ведет к дополнительной диаграмме, восстанавливающей калибровочную симметрию результата. В заключение мы обсуждаем роль, которую здесь играют поверхностные члены и приходим к выводу, что амплитуда данного процесса содержит произвольный параметр, который не может быть получен путем теоретических расчетов, и поэтому должен быть фиксирован из эксперимента.

Итак, рассмотрим модель НИЛ с четырехкварковыми взаимодействиями, симметричными относительно киральной группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})q + \mathcal{L}_{int}, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{s,p} + \mathcal{L}_{v,a}, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_{s,p} = (G_S/2) [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2], \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_{v,a} = -(G_V/2) [(\bar{q}\gamma^\mu\tau q)^2 + (\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\tau q)^2], \tag{5}$$

где $q = (u, d)$ – цветные кварковые поля, \hat{m} – масса токовых кварков, τ – матрицы Паули, G_S и G_V – константы четырехкварковых взаимодействий.

Для описания электромагнитных взаимодействий кварков сделаем замену $\partial_\mu q \rightarrow \mathcal{D}_\mu q = (\partial_\mu - ieQA_\mu)q$

¹⁾e-mail: aaosipov@jinr.ru

и добавим плотность лагранжиана свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_{em} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. В ковариантной производной $\mathcal{D}_\mu q$ матрица $Q = 1/2(\tau_3 + 1/3)$ ассоциируется с зарядами кварков, выраженных в единицах электрического заряда протона $e > 0$, а A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Легко убедиться, что после такой замены плотность лагранжиана (2) инвариантна относительно $U(1)$ калибровочных преобразований

$$q \rightarrow e^{i\alpha e Q} q, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad (6)$$

с локальным параметром $\alpha(x)$.

Известно, что в рассматриваемой кварковой системе при достаточно больших значениях G_S происходит перестройка вакуума, т.е. осуществляется фазовый переход в состояние со спонтанно нарушенной киральной симметрией. В новом вакууме спектр физических возбуждений представлен $q\bar{q}$ мезонными состояниями. Поэтому удобно явно выделить эти переменные в соответствующем функциональном интеграле, что всегда можно сделать, предварительно преобразовав нелинейные кварковые взаимодействия к билинейным юкавовским взаимодействиям кварков с коллективными бозонными полями

$$S[A_\mu] = \int [dq][d\bar{q}][ds][d\mathbf{p}][dv_\mu][da'_\mu] \times \\ \times \exp i \int d^4x \left(\bar{q} D_m q - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M \right). \quad (7)$$

Здесь плотность лагранжиана \mathcal{L}_M описывает массовую часть мезонного спектра

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4G_S} \text{tr} [(s - m + \hat{m})^2 + p^2] + \\ + \frac{1}{4G_V} \text{tr} [v_\mu^2 + (a'_\mu)^2]. \quad (8)$$

Оператор Дирака во внешних коллективных полях D_m имеет вид

$$D_m = i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m + s + i\gamma_5 p + \gamma^\mu v_\mu + \gamma^\mu \gamma_5 a'_\mu, \quad (9)$$

где $s, p = p_i \tau_i$, $v_\mu = v_{i\mu} \tau_i$, $a'_\mu = a'_{i\mu} \tau_i$ – скалярное, псевдоскалярные, векторные и аксиально-векторные поля, $i = 1, 2, 3$. Величина массы составляющего кварка m следует из уравнения щели.

Функционал (7) содержит нефизическое поле a'_μ . Это следует из того, что в отличие от остальных полей данное аксиал-векторное поле смешивается с псевдоскалярным и должно быть переопределено. Чтобы исключить смешивание, обычно делается замена (1). Однако, такая замена нарушает градиентную инвариантность теории. Действительно, учитывая трансформационные свойства псевдоскалярного

поля относительно действия калибровочной группы (заметим, что оно преобразуется по присоединенному представлению)

$$p \rightarrow p' = e^{i\alpha e Q} p e^{-i\alpha e Q}, \quad (10)$$

находим $\bar{q} \partial_\mu p q \rightarrow \bar{q} \partial_\mu p q + i \partial_\mu \alpha e \bar{q} [Q, p] q$. Отсюда следует, что данная комбинация неинвариантна. Функционал $S[A_\mu]$ будет градиентно-инвариантным, если вместо (1) использовать ковариантную замену

$$a'_\mu = a_\mu + \kappa m \mathcal{D}_\mu p, \quad (11)$$

где $\mathcal{D}_\mu p = \partial_\mu p - ie A_\mu [Q, p]$. В этом случае выражение (11) преобразуется по присоединенному представлению калибровочной группы, что и обеспечивает сохранение градиентной инвариантности функционала $S[A_\mu]$. Этот очевидный факт означает, что в теории присутствуют электромагнитные вершины, в которых кварк-антикварковая пара непосредственно взаимодействует с фотоном и псевдоскалярным мезоном. Это явное отклонение от гипотезы векторной доминантности ставит вопрос о тщательном изучении возможных физических следствий, связанных с присутствием такого взаимодействия в модели НИЛ, чему мы и планируем посвятить наши следующие работы. Здесь же мы хотели бы остановиться на рассмотрении одного поучительного процесса, иллюстрирующего вышеизложенную ситуацию.

Радиационный распад $a_1(1260) \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$ в данной модели осуществляется по трем возможным каналам. Это обмен нейтральным векторным ρ^0 мезоном $a_1 \rightarrow \gamma \rho^0 \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$; обмен заряженными ρ^\pm мезонами $a_1 \rightarrow \pi^\pm \rho^\mp \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$; и прямой распад $a_1 \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$, описываемый кварковыми четырехугольными диаграммами. Рождение фотона в обменных каналах происходит за счет аномальных процессов $a_1 \rightarrow \gamma \rho^0$ и $\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm \gamma$, для которых не возникает сложностей с выполнением тождеств Уорда, т.е. амплитуды данных процессов градиентно инвариантны. Вычисление фейнмановских четырехугольных диаграмм и выделение из них лидирующих в разложении по внешним импульсам членов (длинноволновое разложение фермионного детерминанта) ведет к амплитуде [12]

$$T_{\text{бок}} = i \frac{g_\rho e N_c}{8\pi^2 f_\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\beta(l) \epsilon_\alpha^*(p) [(1 - 2\kappa m^2) p_\mu q_\nu + \\ + (\kappa m^2)^2 p_+^\mu p_-^\nu], \quad (12)$$

где g_ρ – константа связи полей спина 1 с кварками, которая фиксируется в модели из распада $\rho \rightarrow \pi\pi$; $f_\pi = 93$ МэВ – константа слабого распада пиона;

$N_c = 3$ – число цветовых степеней свободы у кварков; l, p, p_+, p_- – 4-импульсы a_1 -мезона, фотона и двух заряженных пионов; $q_\nu = (p_+ - p_-)_\nu$; $\epsilon_\beta(l)$ и $\epsilon_\alpha^*(p)$ – векторы поляризации аксиально-векторного мезона и фотона соответственно.

Из формулы (12) видно, что последнее слагаемое нарушает градиентную инвариантность выражения. Этот неудовлетворительный результат является прямым следствием использования замены (1). Отказ от нее в пользу (11) добавляет к уже изложенной выше картине два новых вклада, изображенных на рис. 1. Обе аномальные треугольные диаграммы ко-

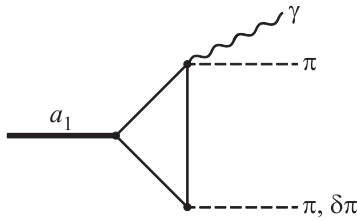


Рис. 1. Дополнительные диаграммы, возникающие от замены (11). Первая отвечает случаю псевдоскалярного взаимодействия пиона с кварками $\bar{q}\gamma_5\pi q$, а вторая – псевдовекторному взаимодействию $\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\pi q$

нечны и отличаются только одиночной пионной вершиной, которая может быть либо псевдоскалярной, либо аксиал-векторной (последняя – результат $\pi - a_1$ диагонализации). Несложно установить, что вклад первой диаграммы равен нулю. Вклад второй диаграммы был бы также нулевым, если бы не сдвиговая неоднозначность, связанная с формальной линейной расходимостью возникающих здесь интегралов.

Остановимся на этом тонком моменте подробнее. Для этого выпишем амплитуду, соответствующую второй диаграмме

$$T = \frac{ie}{f_\pi^2} N_c g_\rho (\kappa m^2)^2 \epsilon_\beta(l) \epsilon_\alpha^*(p) \left[J_1^{\beta\alpha}(l, p_-) - J_2^{\beta\alpha}(l, p_-) + J_1^{\beta\alpha}(l, p_+) - J_2^{\beta\alpha}(l, p_+) \right], \quad (13)$$

где

$$J_1^{\beta\alpha}(l, p_-) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[S(k, 0) \gamma^\beta \gamma_5 S(k, l) \hat{p}_- \gamma_5 \times S(k, l - p_-) \gamma^\alpha \gamma_5 \right], \quad (14)$$

$$J_2^{\beta\alpha}(l, p_-) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[S(k, 0) \gamma^\beta \gamma_5 S(k, l) \gamma^\alpha \gamma_5 \times S(k, p_-) \hat{p}_- \gamma_5 \right], \quad (15)$$

$$S(k, l) = \frac{\hat{k} - \hat{l} + m}{(k - l)^2 - m^2}, \quad (16)$$

и $\hat{k} = k_\mu \gamma^\mu$. Тонкость здесь заключается в том, что если бы было можно сдвигать переменную интегрирования, то первое слагаемое полностью сократило

бы второе, а третье слагаемое сократило бы четвертый член в квадратных скобках (13), и мы получили бы, что $T = 0$ (Подобное сокращение и привело к обращению в нуль вклада первой диаграммы рис. 1.) Однако, как хорошо известно [13], из-за формальной линейной расходимости интегралов, которая присутствует в (14) и (15) даже после вычисления следов, возникают поверхностные члены, что делает результат, отличным от нуля

$$J_1^{\beta\alpha}(l, p_-) - J_2^{\beta\alpha}(l, p_-) = \frac{1}{8\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta} c_\mu(p_-)_\nu, \quad (17)$$

где c_μ – произвольный 4-вектор. Соответственно, для амплитуды имеем

$$T = i \frac{e g_\rho N_c}{8\pi^2 f_\pi^2} (\kappa m^2)^2 \epsilon_\beta(l) \epsilon_\alpha^*(p) e^{\mu\nu\alpha\beta} c_\mu(p_+ + p_-)_\nu. \quad (18)$$

Вектор c^μ можно представить в виде линейной комбинации из трех независимых векторов, имеющих прямое отношение к рассматриваемому процессу $c^\mu = a p^\mu + b(p_+ - p_-)^\mu + c(p_+ + p_-)^\mu$. При этом, только первые два выживают после подстановки этого выражения в (18). В результате, вклад второй диаграммы, изображенной на рис. 1, принимает вид

$$T = i \frac{e g_\rho N_c}{8\pi^2 f_\pi^2} (\kappa m^2)^2 \epsilon_\beta(l) \epsilon_\alpha^*(p) e^{\mu\nu\alpha\beta} \times [a p_\mu (p_+ + p_-)_\nu + 2b(p_+)_\mu (p_-)_\nu]. \quad (19)$$

Отсюда видно, что выбирая $b = -1/2$, мы добиваемся сокращения нарушающих калибровочную инвариантность членов в сумме (12) и (19)

$$T_{\text{box}} + T = i \frac{g_\rho e N_c}{8\pi^2 f_\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\beta(l) \epsilon_\alpha^*(p) p_\mu \times [(1 - 2\kappa m^2) q_\nu + a(\kappa m^2)^2 (p_+ + p_-)_\nu]. \quad (20)$$

Данная амплитуда содержит произвольную константу a , которую векторные тождества Уорда не фиксируют. Таким образом, мы получаем конечный градиентно инвариантный результат, однако теория не позволяет нам вычислить константу a . Ее необходимо фиксировать из эксперимента. Напомним, что похожая картина возникает в двумерной киральной модели Швингера. Этот случай детально анализировался в работах [14–17].

Подводя итог, можно сделать следующие выводы. В модели НИЛ с векторными мезонами процедура πa_1 -диагонализации в присутствии электромагнитных взаимодействий должна осуществляться ковариантным образом по отношению к градиентным преобразованиям, что в литературе необоснованно игнорируется. Поскольку ковариантная производная содержит электромагнитное поле, в теории

появляются прямые взаимодействия фотона с псевдоскалярным мезоном и кварк-антикварковой парой. Это выводит теорию за рамки общепринятой картины векторной доминантности и ставит вопрос о тщательном изучении физических проявлений таких взаимодействий.

В качестве примера мы показали, что амплитуда радиационного распада $a_1(1260) \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$, вычисленная в стандартном подходе, не удовлетворяет требованию градиентной инвариантности, и напротив, учет новых электромагнитных вершин восстанавливает ее симметрию. Данный распад еще интересен и тем, что дает нам один из редких нетривиальных теоретико-полевых примеров того, как при вычислении конечных вкладов от однопетлевых кварковых диаграмм возникает поверхностный член безразмерная константа которого не может быть фиксирована теорией.

-
1. D. Ebert and M. K. Volkov, *Yad. Fiz.* **36**, 1265 (1982).
 2. D. Ebert and M. K. Volkov, *Z. Phys. C* **16**, 205 (1983).
 3. M. K. Volkov, *Ann. of Phys.* **157**, 282 (1984).
 4. М. К. Волков, *ЭЧАЯ* **17**, 433 (1986).
 5. D. Ebert and H. Reinhardt, *Nucl. Phys. B* **271**, 188 (1986).
 6. M. K. Volkov and A. E. Radzhabov, *Phys.-Usp.* **49**, (6) 551 (2006).
 7. S. Gasiorovicz and D. A. Geffen, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 531 (1969).
 8. М. К. Волков, А. А. Осипов, Препринт ОИЯИ Р2-85-390.
 9. М. К. Волков, А. А. Осипов, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 205 (2017).
 10. A. A. Osipov and M. K. Volkov, *Ann. Phys.* **382**, 50 (2017).
 11. J. Morais, B. Hiller, and A. A. Osipov, *Phys. Lett. B* **773**, 277 (2017).
 12. A. A. Osipov, A. A. Pivovarov, and M. K. Volkov, arXiv:1805.10907[hep-ph].
 13. S. B. Treiman, R. Jackiw, and D. J. Gross, *Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton Series in Physics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1972).
 14. R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985).
 15. R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett. E* **54**, 2060 (1985).
 16. R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett. C* **55**, 2224 (1985).
 17. R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 2011 (2000).