Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 3, с. 175 – 179 © 2018 г. 10 августа

Энергия запирания поля на нелинейной границе раздела нелинейных дефокусирующих сред

С. Е. Савотченко[1)]

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, 308012 Белгород, Россия

Поступила в редакцию 25 июня 2018 г.

После переработки 3 июля 2018 г.

Рассмотрена модель контакта двух сред с дефокусирующей нелинейностью керровского типа, разделенных плоской границей, взаимодействующей с возбуждениями нелинейным образом. Найдены два новых типа стационарных состояний, описывающих трансформацию солитонной решетки в затухающее поле при переходе через такую границу раздела. Данные типы состояний отличаются энергетическим диапазоном существования и характером затухания поля при удалении от границы раздела. Получены энергии длинноволновых состояний и указаны условия их существования в зависимости от характеристик сред и их границы раздела.

DOI: 10.1134/S0370274X18150055

Во многих физических моделях при теоретическом описании нелинейных волн в кристаллических средах активно используется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), содержащее кубическое (относительно искомого поля) слагаемое (так называемая керровская нелинейность, изначально возникшая при моделировании сред с эффектом Керра) [1, 2]. Хорошо разработанными являются вопросы локализации возбуждений различной физической природы вблизи дефектов и границ раздела в нелинейных средах [3, 4], а также локализации состояний на границе нелинейных и линейных сред в различных моделях [5, 6].

В данной работе предлагается описание новых типов состояний, моделирующих трансформацию солитонной решетки в затухающее поле при переходе через границу раздела двух нелинейных сред. В [5] показано, что такое явление возможно при переходе пространственного распределения возбуждений из нелинейной среды в линейную.

Следуя предложенной в [7–9] модели тонкого дефектного слоя, разделяющего нелинейные среды, будем считать, что внутри он также характеризуется керровской нелинейностью. Основной целью работы является нахождение зависимости энергии от параметров сред и границы их раздела, при которой возникают состояния, соответствующие указанному явлению запирания поля.

В [9] рассматривались локализованные состояния в нелинейных средах с фокусировкой и дефокусировкой с нелинейным дефектом и проанализирована их устойчивость. В [10] были получены состояния, описываемые периодическими решениями НУШ по обе стороны от нелинейной границы раздела нелинейных самофокусирующих сред.

Следует подчеркнуть, что в данной работе будут получены состояния принципиально иного типа, в которых с одной стороны от границы раздела сред происходит затухание поля, а в другой – поле распределено периодическим образом, формируя солитонную решетку. Такое поведение распределения поля при переходе через границу раздела сред можно назвать эффектом запирания, поскольку после пересечения границы солитонная решетка трансформируется в убывающее поле, характерные размеры локализации которого, как будет показано ниже, определяются параметрами границы раздела.

Рассмотрим модель двух контактирующих сред, обладающих керровской нелинейностью с дефокусировкой. Предполагается, что граница раздела сред является гладкой и плоской. Ее толщину будем считать много меньше характерного масштаба локализации возмущений параметров среды, создаваемых границей. Систему координат выберем так, чтобы плоскость дефекта проходила через начало координат в плоскости yz перпендикулярно оси x.

Для описания интересующего нас эффекта и условий его реализации будем использовать одномерную модель, основанную на стационарном НУШ, которому подчиняется поле ψ, однородным образом распределенное вдоль плоскости дефекта и неоднородным в перпендикулярном к ней направлении:

[1)]e-mail: savotchenkose@mail.ru

$$E\psi = -\psi''_{xx}/2m + \Omega(x)\psi - \gamma(x)|\psi|^2\psi + \\ + \{U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x)\psi, \quad (1)$$

где E – энергия стационарного состояния, m – эффективная масса возбуждения, $\Omega(x) = \Omega_1$, $x < 0$, $\Omega(x) = \Omega_2$, $x > 0$, $\Omega_{1,2}$ – постоянные величины.

Параметр керровской нелинейности в НУШ (1) выбрем в виде: $\gamma(x) = -g_1$, $x < 0$, $\gamma(x) = -g_2$, $x > 0$, где $g_{1,2}$ – постоянные величины. Для среды с самофокусировкой (с притяжением) нелинейность $\gamma(x)$ является положительной, а для дефокусирующих (с отталкиванием) сред – отрицательной. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением сред только с дефокусировкой, что соответствует отрицательной всюду функции нелинейности $\gamma(x)$ (при этом параметры $g_{1,2} > 0$).

Нелинейные свойства границы раздела сред описываются последним слагаемым в (1), фактически представляющим собой короткодействующий нелинейный потенциал $U(x) = \{U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x)$ [7–11]. В (1) $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, U_0 – интенсивность взаимодействия возбуждения с границей раздела в линейном приближении (“мощность” дефекта), расположенной в начале координат. При $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ – притягивается. Параметр нелинейности границы раздела сред W_0 характеризует нелинейный отклик ее взаимодействия с возбуждением, положительное значение которого соответствует дефокусировке, а отрицательное – самофокусировке в границе.

Физическая применимость предложенной модели неоднократно обсуждалась ранее [7, 8, 10]. К примеру, в рамках теории Гинзбурга–Ландау минимизация функционала свободной энергии в приближении среднего поля приводит к нелинейному уравнению, совпадающему по своей структуре со стационарным НУШ, коэффициенты которого зависят от температуры и параметров зонной структуры [12, 13].

В частности, в [13] НУШ с кубической нелинейностью применялось для описания структуры ближнего антиферромагнитного порядка, индуцированного перераспределением зарядовой плотности вблизи границы радела слоев Fe/Cr в композитной многослойной структуре. В данной интерпретации волновая функция ψ представляет собой параметр антиферромагнитного порядка, равный произведению амплитуды линейно поляризованной волны спиновой плотности на ее эффективный потенциал, зависящий от выбора микроскопической модели.

Считается, что поскольку температура Кюри слоя Fe намного выше всех характерных температур формирования волн спиновой плотности в антиферромагнитном слое, магнитный момент в слое Fe должен быть однородным и не зависящим от температуры. Если считать границу раздела слоев такой, что в силу своих внутренних свойств, в том числе и нелинейных, она способна влиять на процессы формирования волн спиновой плотности, то уравнение для параметра порядка дополняется слагаемыми, соответствующими эффективному потенциалу, моделирующему нелинейным отклик, в соответствии с видом (1).

В данной работе мы будем использовать физическую интерпретацию, основанную на нелинейном уравнении, которое было получено в [12] для описания электронных фазовых переходов в неоднородные состояния, приводящих к возникновению локализованных состояний типа волн спиновой плотности. В [12] рассматривалось существование локализованных состояний в модели зонного антиферромагнетика с конгруэнтными сечениями поверхности Ферми. Конкретными примерами таких систем могут быть разбавленные сплавы хрома [13, 14]. В этих системах обобщенный параметр порядка ψ описывает распределение линейно поляризованных волн спиновой плотности, поэтому источником перераспределения ψ может быть локальное намагничивание в направлении поляризации волны спиновой плотности, которое трактуется как плоский дефект магнитной структуры.

Теорию Гинзбурга–Ландау можно использовать вблизи точки Лифшица для случая малого параметра порядка $|\psi| \ll T, \mu$ и медленно меняющейся величины $|\psi'/\psi| \ll 1/\zeta_0$, где T – температура, μ – параметр неконгруэнтности (он описывает раздвижку поверхности Ферми электронов и дырок, а в сверхпроводниках – спиновое расщепление электронных состояний в обменном поле) и ζ_0 – корреляционная длинна при нулевой температуре.

В [12] вводились безразмерные параметр порядка φ и координата x: $\psi \to \varphi\psi_0$ и $x \to x\psi_0/v_{\mathrm{F}}$, где ψ_0 – параметр порядка при нулевой температуре и идеальной конгруетности $\mu = 0$, v_{F} – скорость на поверхности Ферми. Координатная ось x перпендикулярна плоскости спин-поляризованного дефекта. Дефект в такой модели представляет собой локальную намагниченность в направлении поляризации волны спиновой плотности.

В слоистых структурах из зонных антиферромагнетиков с конгруэнтными участками поверхности Ферми на основе разбавленных сплавов хрома вблизи поверхности контакта одного сплава хрома с другим, ориентированной перпендикулярно направлению (100), ниже точки Кюри устанавливается ферромагнитный порядок [13, 14]. При существенно более низких температурах порядка температуры Нееля возникает замороженный на поверхности магнитный момент, играющий роль локального поля для волны спиновой плотности [14]. Такое возмущение моделируется функцией источника дефекта, индуцирующего образование пространственно неоднородных (или локальных) состояний. Поле, создаваемое таким плоским дефектом, считается спадающим на расстояниях, существенно меньших корреляционной длины. Поэтому его потенциал может рассматриваться как короткодействующий (в локальном приближении) и моделироваться дельта-функцией Дирака.

Функционал Гинзбурга–Ландау вблизи точки Лифшица может быть записан в форме:

$$F[\varphi] = \int \{C_1\varphi^2 + C_2(g\varphi^4 + \varphi'^2) - \Gamma[\varphi]\delta(x)\}dx,$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определены в [12]. Они зависят от структурных параметров и температуры, в частности, от относительной температуры перехода в неоднородное состояние $\tau = (T - T_0)/T_0$, где T_0 – температура перехода в однородное состояние. Величина $g > 0$ описывает различие температур переходов в неоднородное состояние в слоях по разные стороны от дефекта. Функция источника Γ, моделирующая дефект, может быть представлена в форме: $\Gamma \sim \varphi$ для модели дефекта типа "локальное поле" и $\Gamma \sim \varphi^2$ для модели локального фазового перехода. Коэффициенты пропорциональности в моделях функций источника приведены в [12], где показано, что они определяются температурой и такими структурными характеристиками как локальная замороженная намагниченность и эффективный обменный интеграл.

Минимизация функционала Гинзбурга–Ландау F в [12] приводит к нелинейному уравнению вида стационарного НУШ, коэффициенты которого связаны с НУШ (1) следующим образом: $2m(\Omega - E) = C_1/C_2$, $2mU(x)\varphi = -\delta(x)D(\varphi)/2C_2$ и $\gamma = -g/m$, где $D(\varphi) = \partial\Gamma[\varphi]/\partial\varphi$.

В данной работе мы предлагаем учесть нелинейный характер влияния на параметр порядка внутри узкой границы раздела слоев посредством определения нелинейного потенциала дефекта в виде $D(\varphi) = 4mC_2\varphi\{U_0 + W_0|\varphi|^2\}$. Таким образом, в предлагаемом обобщении модели образования неоднородных состояний функция источника нелинейного дефекта будет $\Gamma \sim \varphi^2 + \varphi^4$.

В связи с этим, ограничимся рассмотрением НУШ (1) с отрицательной нелинейностью, нахождение решения которого эквивалентно решению контактной краевой задачи для НУШ:

$$\psi''_{xx} + 2m(E - \Omega(x) + \gamma(x)|\psi|^2)\psi = 0, \tag{2}$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi_0, \tag{3}$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2m\psi_0\{U_0 + W_0|\psi_0|^2\}, \tag{4}$$

где ψ_0 – амплитуда колебаний границы раздела сред как плоского дефекта.

Решение НУШ (2) представим в виде: $\psi(x) = \psi_1$, $x < 0$, $\psi(x) = \psi_2$, $x > 0$. В данной работе рассматриваются только такие состояния, для которых выполняются требование ограниченности поля на бесконечности, а также требование того, чтобы поле монотонно затухало при удалении от границы раздела сред только в одном из полупространств. Связанные решения НУШ (2) иных видов распределений рассматривались в других работах (см. например, [10, 11, 15]).

В дефокусирующей среде в диапазоне $\Omega_1 < E < \Omega_2$ НУШ (2) имеет пространственно-неоднородное решение вида:

$$\psi_1(x) = q_{s1}(mg_1)^{-1/2}\mathrm{sn}(q_{s1}(x - x_1), k), \tag{5}$$

$$\psi_2(x) = q_2(mg_2)^{-1/2}/\mathrm{sh}(q_2(x - x_2)), \tag{6}$$

где $q_{s1}^2 = 2m(E - \Omega_1)/(1 + k^2)$, $q_2^2 = 2m(\Omega_2 - E)$, k – модуль эллиптической функции sn $(0 < k < 1)$. Здесь и далее значение нижнего индекса "1" соответствует величинам, относящимся к характеристикам среды слева от плоскости дефекта при < 0, а значение нижнего индекса "2" – справа от плоскости дефекта при $x > 0$. Для ограниченности решения (6) должно выполняться условие $x_2 < 0$.

Подстановка функций (5) и (6) в граничные условия (3), (4) приводит к соотношениям:

$$\eta q_{s1}\mathrm{sn}(q_{s1}x_1, k) = q_2/\mathrm{sh}(q_2x_2), \tag{7}$$

$$q_2\mathrm{cth}(q_2x_2) - D_{s1} = 2\{mU_0 + V_0q_2^2/\mathrm{sh}^2(q_2x_2)\}, \tag{8}$$

где $\eta = (g_2/g_1)^{1/2}$, $D_{s1} = k_1q_{s1}\mathrm{cn}(q_{s1}x_1, k)/\mathrm{cn}(q_{s1}x_1 + K(k), k)$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $k_1 = (1 - k^2)^{1/2}$ – дополнительный модуль эллиптической функции. В (8) введено обозначение отношения параметра нелинейности дефекта к параметру нелинейности среды справа от границы раздела в области, где реализуется пространственно-периодическое распределение поля: $V_0 = W_0/g_2$.

Соотношения (7) и (8) будем называть дисперсионными. Из (7) можно выразить, например x_2, и подставить в (8), тем самым исключив его. Тогда из (8) можно найти энергию соответствующего состояния как функцию параметров системы: $E = E(m, U_0, V_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$. После нахождения E из (7) можно получить x_2 в виде функции параметров системы: $x_2 = x_2(m, U_0, V_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$. Тогда (5) и (6) будут определять связанное на дефекте двухпараметрическое решение контактной краевой задачи для НУШ (2)–(4) с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1. Данные параметры могут быть полностью или частично определены из дополнительных требований в зависимости от физической интерпретации модели, например, из условия нормировки.

Из дисперсионных соотношений (7) и (8) можно определить энергию состояния в "длинноволновом" приближении при $q_{s1}x_1 \ll 1$ и $q_2x_2 \ll 1$:

$$E = \Omega_1 + (2mU_0x_1 - 1)(1+k^2)/\{2m\eta x_1^2(1-2V_0)\}. \quad (9)$$

С помощью (9) из (7) находится величина

$$x_2 = x_1(1-2V_0)/(2mU_0x_1 - 1). \quad (10)$$

Из (9) следует, что длинноволновое состояние данного типа существует при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > 1/2mx_1$ и $W_0 < g_2/2$ или 2) $U_0 < 1/2mx_1$ и $W_0 > g_2/2$. Из (10) тогда вытекает, что параметр x_1 следует выбирать отрицательным, так как для ограниченности решения (6) параметр x_2 изначально определялся отрицательным. Получается, что состояния рассматриваемого типа могут возникать как вблизи притягивающей, так и отталкивающей границы. Но если нелинейность границы является дефокусирующей, то "мощность" дефекта должна быть притягивающей.

Для случая границы раздела сред без нелинейного отклика, когда $U_0 \neq 0$ и $W_0 = 0$, получается, что длинноволновое состояние рассматриваемого типа возможно при выполнении условий: $U_0 > 1/2mx_1$ и $x_1 < 0$.

Для случая границы раздела с преобладающим нелинейным откликом, когда $U_0 = 0$ и $W_0 \neq 0$, получается, что длинноволновое состояние рассматриваемого типа возможно только для дефокусирующей границы при $W_0 > g_2/2$.

В дефокусирующей среде в диапазоне $E > \max\{\Omega_{1,2}\}$ НУШ (2) имеет завязанное на границе раздела состояние другого вида, определяемое слева от нее пространственно-периодическим решением (5), а справа от нее решением типа кинк:

$$\psi_2(x) = q_{t2}(mg_2)^{-1/2}\mathrm{th}(q_{t2}(x - x_2)), \quad (11)$$

где $q_{t2}^2 = m(E - \Omega_2)$.

Подстановка функций (5) и (11) в граничные условия (3), (4) приводит к соотношениям:

$$\eta q_{s1}\mathrm{sn}(q_{s1}x_1, k) = q_{t2}\mathrm{th}(q_{t2}x_2), \quad (12)$$

$$2q_{t2}/\mathrm{sh}(2q_{t2}x_2) + D_{s1} = -2\{mU_0 + V_0q_{t2}^2\mathrm{th}^2(q_{t2}x_2)\}. \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) также будем называть дисперсионными. Из (12) можно выразить, например x_2, и подставить в (13), тем самым исключив его. Тогда из этих дисперсионных соотношений можно найти энергию и параметр x_2 соответствующего состояния как функции параметров системы. Следовательно (5) и (11) будут определять новое связанное на дефекте двухпараметрическое решение контактной краевой задачи для НУШ (2)–(4) с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

Для удобства дальнейшего анализа состояний, описываемых (5) и (11), можно положить $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Тогда $q_{t2}^2 = q_{s1}^2(1+k^2)/2$.

Из дисперсионных соотношений (12) и (13) можно определить энергию состояния в "длинноволновом" приближении при $q_{s1}x_1 \ll 1$ и $q_{t2}x_2 \ll 1$:

$$E = \Omega + \frac{(1+k^2)}{4m\eta x_1\sqrt{2V_0}}\left\{\frac{1}{x_1}\left(1 - \frac{1+k^2}{2\eta}\right) - 2mU_0\right\}^{1/2}. \quad (14)$$

С помощью (14) из (12) находится величина

$$x_2 = 2\eta x_1/(1+k^2). \quad (15)$$

Из (14) следует, что длинноволновое состояние данного типа существует только для дефокусирующей границы раздела и при условии для "мощности" дефекта: $U_0 < \{1 - (1+k^2)/2\eta\}/2mx_1$. Также можно утверждать, что длинноволновые колебательные состояния с энергией (14) существуют только при наличии нелинейного отклика границы раздела сред, так как при $W_0 = 0$ они не реализуются. Характерное расстояние локализации поля определяется параметром нелинейности границы раздела: $l = 1/q_{t2} \sim (W_0)^{1/4}$.

В рассматриваемой системе в случае предельного перехода $k \to 1$ можно получить локализованные состояния. Периодическое решение, описываемое (5), при $k \to 1$ переходит в решение НУШ типа кинк:

$$\psi_1(x) = q_{t1}(mg_1)^{-1/2}\mathrm{th}(q_{t1}(x - x_1)), \quad (16)$$

где $q_{s1}^2 \to q_{t1}^2 = m(\Omega_1 - E)$. Для связанного на границе раздела сред состояния первого типа, описываемого (6) и (16), из дисперсионных соотношений (7) и (8) в этом пределе получаются соотношения, приведенные в [11] при $U_0 = 0$.

Для связанного на границе раздела сред состояния второго типа, описываемого (11) и (16), из дисперсионных соотношений (12) и (13) в этом пределе получаются соотношения, приведенные в [15], из которых определяется энергия локализации поля по обе стороны от границы раздела сред.

Возвращаясь к физической интерпретации рассматриваемой модели, можно сказать, что в слоистом зонном антиферромагнетике с различными характеристиками слоев возможно формирование неоднородного состояния, индуцированного волной спиновой плотности, распространяющейся вдоль границы раздела. Возникающие два типа неоднородных состояний соответствуют запиранию распределения спиновой плотности. Дисперсионные уравнения, фактически, представляют собой условия зарождения неоднородных состояний. Широкий диапазон условий существования полученных состояний позволяет подобрать такие значения параметров, при которых будет возможно описанное запирание распределения спиновой плотности на границе. Значения в точке $x = 0$ параметров порядка, определяемые полученными выражениями для волновых функций, могут использоваться для оценки величины нескомпенсированного магнитного момента вблизи плоскости дефекта [12].

Таким образом, установлено, что граница раздела с нелинейными свойствами между нелинейными дефокусирующими кристаллами может порождать два типа стационарных состояний, описывающих запирание поля при переходе через границу их раздела. Существование длинноволновых колебательных состояний второго типа, описываемых решениями (5) и (11), обусловлено исключительно тем, что дефект обладает нелинейными свойствами, так как при $W_0 = 0$ они не возникают.

Следует отметить, что для существования состояний, локализованных по одну строну от границы раздела нелинейных дефокусирующих сред не является принципиальным требование того, чтобы данные среды характеризовались различными по величине (но не по знаку) параметрами нелинейности ($\gamma_1 \neq \gamma_2$) в отличии от пространственно-неоднородных периодических состояний, описанных в [15]. Нами показано, что для сред с одинаковой по обе стороны от границы раздела нелинейностью возможен эффект запирания поля, проявляющийся в формировании по одну сторону солитонной решетки, а по другую – в затухании поля.

1. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989), 304 с.
2. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego (2003), 540 p.
3. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, ФНТ **23**, 197 (1997).
4. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 1. *Квазиодномерные магнитные солитоны*, УрО РАН, Екатеринбург (2009), 512 с.
5. С. Е. Савотченко, ЖТФ **62**, 1776 (2017).
6. С. Е. Савотченко, Вестник ВГУ. Сер.: Физика. Математика **1**, 44 (2018).
7. A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **87**, 083901 (2001).
8. I. V. Gerasimchuk, P. K. Gorbach, and P. P. Dovhopolyi, Ukr. J. Phys. **57**, 678 (2012).
9. И. В. Герасимчук, ЖЭТФ **121**, 596 (2015).
10. С. Е. Савотченко, Письма в ЖЭТФ **107**, 481 (2018).
11. S. E. Savotchenko, Mod. Phys. Lett. B **32**, 1850120 (2018).
12. А. И. Буздин, В. Н. Меньшов, В. В. Тугушев, ЖЭТФ **91**, 2204 (1986).
13. В. Н. Меньшов, В. В. Тугушев, ЖЭТФ **120**, 899 (2001).
14. Н. И. Куликов, В. В. Тугушев, УФН **144**, 643 (1984).
15. С. Е. Савотченко, ЖЭТФ **153**, 9 (2018).