

# Топологический сценарий высокотемпературной сверхпроводимости купратов

В. А. Ходель<sup>+\*1)</sup>, Дж. В. Кларк<sup>\*×2)</sup>, М. В. Зверев<sup>+°</sup>

<sup>+</sup> Национальный исследовательский центр “Курчатовский Институт”, 123182 Москва, Россия

<sup>\*</sup>McDonnell Center for the Space Sciences & Department of Physics, Washington University, St. Louis, MO 63130, USA

<sup>×</sup>Centro de Ciências Matemáticas University of Madeira, Funchal, 9020-105 Madeira, Portugal

<sup>°</sup>Московский физико-технический институт, 147000 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 2 июля 2018 г.

Структура объединенной фазовой диаграммы высокотемпературных сверхпроводников, принадлежащих семейству купратов, изучается на основе теории фермионной конденсации. Выяснены предпосылки топологической перестройки ландауского состояния с образованием плоской зоны, примыкающей к номинальной ферми-поверхности. Исследовано обусловленное этой перестройкой неферми-жидкостное поведение купратов в нормальной фазе. Основное внимание уделено неферми-жидкостному поведению сопротивления  $\rho(T)$ , включая экспериментально наблюдаемый кроссовер от линейного по температуре сопротивления  $\rho(T, x) = A_1(x)T$  при значениях допинга  $x$  ниже критического значения  $x_c^h$ , отвечающего границе области сверхпроводимости, к квадратичной зависимости от  $T$  при  $x > x_c^h$ , что не совместимо с предсказаниями традиционного сценария квантовой критической точки. Продемонстрировано, что наклон коэффициента  $A_1(x)$  универсален и принимает одинаковое значение на обеих границах объединенной фазовой диаграммы купратов в согласии с имеющимися экспериментальными данными. Показано также, что в купратах именно фермионный конденсат ответственен за спаривание в  $D$ -состоянии. При этом эффективное кулоновское отталкивание в куперовском канале, препятствующее существованию сверхпроводимости обычных металлов в  $S$ -канале, делает его высокотемпературным в  $D$ -канале.

DOI: 10.1134/S0370274X18160087

**Введение.** Явление высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) двумерных электронных систем купратов было открыто в 1986 году [1]. На рисунке 1 приведена объединенная фазовая диаграмма [2] дырочно- и электронно-допированных соединений в переменных температура-допинг ( $T$ - $x$ ), которая демонстрирует два сверхпроводящих купола, внешние границы которых находятся в точках  $x_c^h \simeq 0.3$  на стороне дырочного допинга и  $x_c^e \simeq 0.2$  на стороне электронного допинга. Расщепление куполов при  $x = 0$  вызвано внедрением антиферромагнитной изоляторной моттовской фазы. Природа ВТСП до сих пор остается центральным вопросом физики конденсированных сред, не раскрытым спустя тридцать лет после ее открытия. Помимо загадочного устройства фазовой диаграммы и свойств сверхпроводящей фазы, большой интерес вызывает необычное неферми-жидкостное (НФЖ) поведение купратов в нормальном состоянии, получившее за послед-

нее десятилетие надежное экспериментальное подтверждение. Первые попытки понять это вызывающее поведение (например, [3–7]), предпринятые еще в 1990-е гг., постулировали, что его источником являются критические антиферромагнитные флуктуации, порождающие сильное взаимодействие между квазичастицами на ферми-поверхности. С течением времени эта картина была упакована в более изощренные теоретические рамки – сценарий квантовой критической точки (ККТ), которая обычно ассоциируется с точкой окончания при  $T = 0$  линии фазового перехода второго рода (как правило, перехода Нееля). В сценарии ККТ неферми-жидкостное поведение связывается с расходимостью плотности состояний  $N(T = 0)$  в силу обращения в нуль квазичастичного веса одночастичных состояний  $z = (1 - (\partial\Sigma(p_F, \varepsilon)/\partial\varepsilon)_0)^{-1}$ , обусловленного, в свою очередь, расходящимся вкладом критических флуктуаций в производную  $(\partial\Sigma(p_F, \varepsilon)/\partial\varepsilon)_0 < 0$  [8]. Из этого делается вывод о том, что квазичастичная картина Ландау становится неприменимой: “квазичастицы становятся тяжелыми и умирают” [9].

<sup>1)</sup>e-mail: vak@wuphys.wustl.edu

<sup>2)</sup>J. W. Clark

Однако, спиновые флуктуации с антиферромагнитным вектором  $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ , связанные с переходом Нееля, не имеют отношения к расходимости эффективной массы  $M^*$  [10]. Кроме того, существуют общие теоретические аргументы против обращения в нуль  $z$ -фактора в точках фазового перехода второго рода [11]. Эти аргументы, поддержанные экспериментальными результатами, оказываются особенно сильными на внешних границах  $x_c^h$  и  $x_c^e$  сверхпроводящего купола, где можно с уверенностью утверждать, что квазичастичная картина остается применимой [2, 12–15]. Более того, квантовая критичность вызывает фазовый переход при  $T = 0$  в состояние с нарушенной симметрией [16]. С учетом наблюдения, что на обеих сторонах объединенной фазовой диаграммы сверхпроводящие куполы граничат с обычными ферми-жидкостными фазами, этот факт полностью исключает применимость сценария ККТ в тех частях фазовой диаграммы, которые примыкают к обсуждаемым в статье критическим значениям допинга  $x_c^e$  и  $x_c^h$ .

С другой стороны, есть разные возможности перестройки системы, затрагивающие не коллективные, а одночастичные степени свободы, в которых меняется только топология ферми-поверхности без нарушения симметрии исходного основного состояния. Первый такой топологический сценарий перестройки ферми-поверхности за топологической критической точкой (ТКТ), в которой состояние Ландау теряет свою устойчивость, рассматривался в пионерской работе И.М. Лифшица [17]. В этом сценарии меняется число листов ферми-поверхности, а ландауские числа заполнения квазичастичных состояний остаются 0 и 1. Сохранение таких чисел заполнения означает, что в переходах Лифшица минимум энергии основного состояния  $E(n)$  по-прежнему достигается на границе области  $\mathcal{D}$  всех возможных функций распределения  $n(\mathbf{p})$ , удовлетворяющих, как и в теории Ландау [18], условию  $0 \leq n(\mathbf{p}) \leq 1$ .

Существует и более изощренная топологическая перестройка ландауского состояния, в которой минимум энергии системы  $E(n)$  достигается во внутренней точке области  $\mathcal{D}$ . Хотя традиционная теория Ландау для таких систем неприменима, естественным шагом, сделанным в [19], служит ее замена продвинутой версией той же самой ландауской стратегии, основанной на постулате [18], что энергия основного состояния ферми-жидкости  $E$  является функционалом импульсного распределения квазичастиц  $n(\mathbf{p})$  (доказательство можно найти в [20]). В этом случае равновесное квазичастичное импульсное распределение (мы будем обо-

значать его  $n_*(\mathbf{p})$ ) выводится из вариационного условия

$$\frac{\delta E}{\delta n(\mathbf{p})} - \mu = 0, \quad \mathbf{p} \in \Omega. \quad (1)$$

Поскольку левая сторона соотношения (1) есть не что иное как квазичастичная энергия  $\epsilon(\mathbf{p})$ , это условие означает возникновение в импульсной области  $\Omega$  бездисперсионной части спектра  $\epsilon(\mathbf{p})$ , названной в оригинальной работе [19] фермионным конденсатом (ФК) по аналогии с кварковым конденсатом, служащим составной частью правила сумм квантовой хромодинамики (КХД) Шифмана, Вайнштейна и Захарова [21]. Другие названия, обычно связанные с бездисперсионной частью спектра  $\epsilon(\mathbf{p})$ , – плоская зона (“flat band”) [22] и мода нулевой энергии (“zero energy mode”) [23].

Полезно сделать небольшой комментарий к физическому объяснению термина фермионная конденсация, поскольку позже он был введен в физику в ином контексте. В частности, экспериментальная демонстрация фермионной конденсации в ультрахолодных атомных газах [24] имеет отношение к конденсации фермионных пар, а не отдельных фермионов. Напомним, в качестве предпосылки, что количественное описание конденсации пара частиц в квантовую жидкость служит неотъемлемой частью теории Хоэнберга–Кона [25], утверждающей, что энергия основного состояния системы  $E$  является функционалом ее плотности  $\rho(\mathbf{r})$ , причем равновесное распределение выводится из уравнения

$$\frac{\delta E(\rho)}{\delta \rho(\mathbf{r})} = \mu, \quad (2)$$

аналогичного уравнению (1). Заметим, далее, что фермионная конденсация имеет общее свойство с конденсацией Бозе–Эйнштейна, а именно, в плотности состояний  $N(\epsilon)$  есть сингулярный член  $\propto \delta(\epsilon)$ , хотя фазовая когерентность имеет место только в бозевском случае. Это означает, что в обеих ситуациях одночастичные состояния с нулевой по отношению к химическому потенциалу энергией имеют макроскопическое заполнение, причем в случае фермионной конденсации принцип Паули не нарушен, поскольку ФК частицы имеют внутри ФК области  $\mathbf{p} \in \Omega$  разные импульсы.

Главное возражение против оригинальной модели фермионной конденсации (подробнее см. [22, 26–29]) было выдвинуто Ф. Нозьером [30], который в рамках теории возмущений анализировал затухание одночастичных возбуждений в системах с ФК. Это затухание играет главную роль во многих загадочных явлениях, связанных с ВТСП, в частности, в существо-

вании второй щели в электронном спектре, имеющей не БКШ природу. Несомненно, Нозьер внес фундаментальный вклад в теорию фермионной конденсации. Достаточно сказать, что он первым предложил подход к изучению нетривиального случая конечных температур [30]. Однако, его пертурбативный метод вычисления эффектов затухания в системах с ФК, предсказывающий катастрофическое затухание одночастичных возбуждений, ошибочен. Более сложный нептурбативный анализ этой проблемы дает ее решение, свидетельствующее в пользу концепции фермионной конденсации [20], что, таким образом, снимает табу на использование ФК сценария для объяснения свойств сильно коррелированных электронных систем.

В связи с этим обстоятельством стоит отметить успех ФК сценария в объяснении интригующего поведения низкотемпературной энтропии  $S(T \rightarrow 0)$  сильно коррелированных ферми-систем – от металлов с тяжелыми фермионами, таких как  $\text{CeCoIn}_5$  [31], до двумерных пленок  $^3\text{He}$  [32], не имеющее пока никакого другого объяснения, кроме как в рамках этого сценария [27, 28, 33, 34]. Этот сценарий также дает возможность понять общую природу различного критического поведения сильно коррелированных электронных систем в твердых телах (см., например, [29, 35–37]).

Существует убедительное экспериментальное подтверждение [38] справедливости ФК сценария, следующее из наблюдения его дискретного аналога – слияния соседних одночастичных уровней в конечных и неоднородных ферми-системах, предсказанное в [39]. Наконец, надвигается поток экспериментальных и теоретических исследований в повернутом (“*twisted*”) двухслойном графене, вызванных недавним открытием в нем не БКШ сверхпроводимости и демонстрирующих существование “ультраплоской зоны” [40] – ключевой идеи концепции фермионной конденсации [19].

В этой статье будет исследована только часть объединенной фазовой диаграммы рис. 1 около внешних границ, где нет эффектов псевдощели. Сначала мы обсудим предпосылки нарушения топологической устойчивости состояния Ландау. Потом исследуем предвестники топологической перестройки за ТКТ в двумерном электронном газе и 2D электронной жидкости в купратах. Далее будет показано, что в купратах именно фермионный конденсат ответственен за спаривание в  $D$ -состоянии, причем эффективное кулоновское отталкивание в куперовском канале, препятствующее существованию сверхпроводимости обычных металлов в  $S$ -канале, дела-

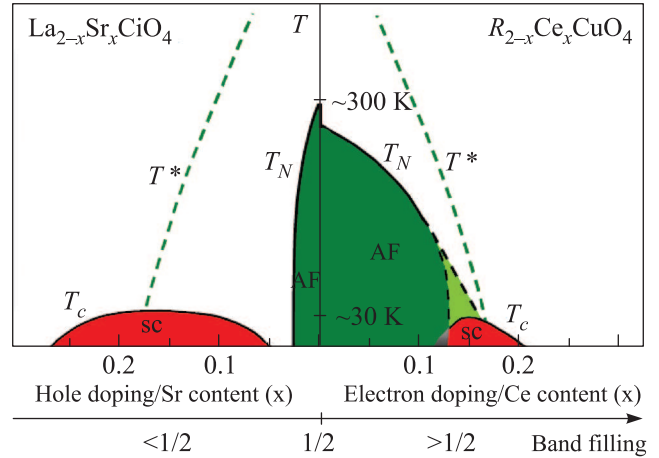


Рис. 1. (Цветной онлайн) Объединенная фазовая диаграмма купратов (из работы [2]). Сплошные кривые, обозначенные  $T_c$  и  $T_N$  показывают, соответственно, критическую температуру и температуру Нееля; штриховые кривые  $T^*$  указывают на примерные границы фаз псевдощели, примыкающих к антиферромагнитным (АФ) областям

ет его высокотемпературным в  $D$ -канале. Наконец, мы решим проблему дихотомии сопротивления нормального состояния ВТСП купратов, необъяснимую в сценарии ККТ.

**Общие предпосылки топологической перестройки состояния Ландау.** Как хорошо известно [17, 26], сигналом нарушения топологической устойчивости состояния Ландау служит изменение числа корней уравнения

$$\epsilon(\mathbf{p}, x_c) = 0, \quad (3)$$

определяющего структуру ферми-поверхности. Отсюда понятно, что топологическая перестройка вступает в игру в *отдельной точке*  $\mathbf{p}_c$  импульсного пространства, а не повсеместно, как в сценарии ККТ.

Тогда принимая, что мы имеем дело с номинальной поверхностью Ферми, уравнение (3) можно переписать в более удобной форме на основе фермижидкостной формулы  $\epsilon(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_c) = v_F(\mathbf{p}_c)\Delta p$ , где  $\Delta p$  – расстояние между точками с импульсом  $\mathbf{p}$  и критическим импульсом  $\mathbf{p}_c$ . После подстановки этого соотношения в (3) последнее принимает вид

$$v_F(\mathbf{p}_c, x_c) = 0. \quad (4)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим однородную электронную жидкость в двумерных кремниевых полевых структурах с  $p_c = p_F$  и  $v_F = p_F/M^*$ . В соответствии с уравнением (4), ТКТ возникает при критической плотности  $n = n_c$ , где расходится

эффективная масса  $M^*(n)$ , которая дается ферми-жидкостным (ФЖ) соотношением

$$M/M^*(n) = 1 - f_1(n)M/2\pi. \quad (5)$$

Надо заметить, что вблизи ТКТ плотности  $n_c = 7.9 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$  [41] первая гармоника  $f_1$  функции взаимодействия Ландау  $f$  меняется плавно с  $n$ , что дает

$$M/M^*(n) \propto n - n_c. \quad (6)$$

Такое ТКТ поведение находится в противоречии с ККТ расходимостью  $M^*$ , обусловленной обращением в нуль квазичастичного веса  $z$  из-за расходящегося вклада флуктуаций, что неизбежно приводит к разрушению квазичастичной картины, в то время как на эксперименте в рассматриваемой области фазовой диаграммы ничего подобного не происходит. Стоит отметить, что в микроскопических расчетах электронного спектра однородной 3D электронной жидкости [42] условие появления дополнительного корня (3) впервые выполняется не на номинальной поверхности Ферми, а довольно далеко от нее: при  $p_c = 0.6p_F$ , причем в области плотностей, где электронный газ сильно разрежен:  $r_s \simeq 20$ . Тем не менее, уже при относительно небольшом изменении электронной плотности критический импульс  $p_c$  достигает поверхности Ферми. Поскольку топологическая перестройка однозначно приводит к аномальному увеличению плотности одночастичных состояний, то в такого рода электронных системах возможно возникновение “высокотемпературной” сверхпроводимости, где в районе критической плотности  $n_c$  критическая температура  $T_c(n)$  меняется пропорционально  $n - n_c$ , а не экспоненциально, как в стандартной теории Бардина–Купера–Шриффера, где  $T_c(n) \propto e^{-2/\lambda(n)}$ . Именно такое поведение  $T_c(n)$  обнаружено недавно при анализе сверхпроводимости допированного титаната стронция, системы с самой низкой плотностью электронов, в которой существует сверхпроводимость (подробно эта тема освещена в [43, 44]). Отметим только, что сверхпроводящий купол в этом соединении располагается при плотности носителей  $n < 3.5 \times 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Этой плотности отвечает значение  $r_s \simeq 17$ , с которым приведенная выше теоретическая оценка начала топологической перестройки в 3D электронном газе находится в разумном согласии.

**3. Предвестники топологической перестройки состояния Ландау в однородной электронной жидкости.** Если иметь дело с транспортными свойствами сильно коррелированных электронных систем купратов, то предсказания двух сценариев – ККТ и ТКТ – расходятся друг с

другом даже на ферми-жидкостной стороне сверхпроводящего перехода. Чтобы продемонстрировать этот факт, рассмотрим сопротивление в чистом пределе

$$\rho(T) = \rho_0 + A_1 T + A_2 T^2, \quad (7)$$

ненулевое значение которого в металлах обеспечивается процессами переброса. В этой ситуации применимо общее выражение для электрической проводимости

$$\sigma \propto (e^2 n \tau) / m^* \quad (8)$$

где  $m^*$  – эффективная масса легких носителей, а время между столкновениями выражается через обычный больцмановский интеграл [45]:

$$\tau^{-1} \propto \{W[n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - (1 - n_1)(1 - n_2)n'_1 n'_2]\}, \quad (9)$$

в котором  $n(\epsilon) = (1 + e^{\epsilon/T})^{-1}$ . Блок  $W \propto |\Gamma|^2$  в интеграле столкновений обозначает вероятность перехода,  $\Gamma$  – амплитуду рассеяния. Скобки в соотношении (9) означают интегрирование/суммирование по всем промежуточным импульсным и спиновым переменным.

В этом разделе рассмотрим простейший случай, когда ферми-поверхность пересекает только одна зона, так что  $m^* = M^*$ . Стандартная, хотя и долгая алгебра приводит тогда к результату [45]

$$\tau^{-1} \propto (M^*)^3 T^2 |\Gamma|^2. \quad (10)$$

Важно, что около ТКТ скалярная часть  $\Gamma_0$  амплитуды рассеяния  $\Gamma$ , связанная, главным образом, с нулевой гармоникой  $F_0^0 = f_0 N_0 > 1$ , в силу расходимости отношения  $M^*/M$  принимает универсальное значение [46]

$$\Gamma_0 \simeq \frac{f_0}{1 + f_0 N(0)} \propto M/M^*. \quad (11)$$

Такая же оценка получается для зависящей от спинов части амплитуды рассеяния с помощью правила сумм Мермина [47]. Подставляя эти результаты в (10), приходим к соотношению  $\tau^{-1} \propto M^*$  и, таким образом, находим

$$\rho(T, n) \propto 1/\sigma(T) \propto (M^*(n))^2 T^2 \propto C^2(T, n), \quad (12)$$

где  $C(T, n) \propto M^*(n)T$  – теплоемкость, в согласии с эмпирическим соотношением Кадоваки–Вуудса  $\rho(T)/C^2(T) = \text{const}$  [48].

**Предвестники топологической перестройки состояния Ландау в 2D электронной жидкости в купратах.** Галилеева инвариантность, используемая Ландау при выводе соотношений теории ферми-жидкости, неприменима к электронной жидкости в твердом теле. Введенный

в теорию Л.П. Питаевским обобщенный подход, использующий калибровочную инвариантность, позволяет переписать основное соотношение теории ферми-жидкости в виде [49]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \nabla n(\mathbf{p}_1) \frac{2d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}, \quad (13)$$

где импульсное распределение квазичастиц  $n(\mathbf{p})$  при  $T = 0$  дается стандартной ферми-жидкостной формулой  $n(\mathbf{p}) = \theta(-\epsilon(\mathbf{p}))$ . Величина  $\mathbf{v}_0(\mathbf{p})$ , играющая роль групповой скорости, определяется как  $\mathbf{v}_0(\mathbf{p}) = z\mathcal{T}^\omega(\mathbf{p})/M$ , где  $\mathcal{T}^\omega(\mathbf{p}) = \lim_{k \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0; kv_F/\omega \ll 1} \mathcal{T}(\mathbf{p}; k \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0)$  [49]. Это значит, что в однородной системе, где  $z\mathcal{T}^\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  [49], уравнение (13) совпадает со стандартным уравнением Ландау [18, 50]. Двумерный аналог (13) имеет вид

$$v(\mathbf{p}) = v_0(\mathbf{p}) - \int_C f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \cos \theta \frac{2p_1(l_1)dl_1}{(2\pi)^2}, \quad (14)$$

где  $\cos \theta \propto (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p}_1))$ .

Путь интегрирования  $C$ , совпадающий с ферми-линией, не известен, за исключением тех нескольких 2D соединений, для которых имеются подробные данные по фотоэмиссионным спектрам с угловым разрешением (ARPES). Среди них соединение  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  (LSCO) (см., например, [12–14]), в котором ферми-линия имеет вид квадрата с закругленными углами, как показано на левой панели рис. 2.

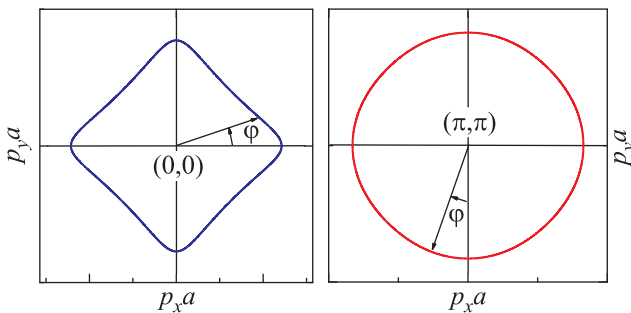


Рис. 2. (Цветной онлайн) Схематическая иллюстрация ферми-линии в ТКТ. Левая панель: LSCO с дырочным сверхдопингом. Ферми-линия имеет форму квадрата с закругленными углами и центром в точке  $(0, 0)$  [13]. Правая панель: LSCO с электронным сверхдопингом. В этом случае ферми-линия – окружность с центром в точке  $(\pi, \pi)$

Почтительно сравнить результаты вычислений, основанных на уравнении (14), в двух случаях: а)  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_a$  (импульс  $\mathbf{p}$  лежит на одной из осей) и б)  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_d$  (он находится на одной из диагоналей). Для

простоты затравочные скорости Ферми  $v_{0a}$  и  $v_{0d}$  вычислим с помощью спектра модели сильной связи  $\epsilon^0(\mathbf{p}) = \epsilon_0 - 2t(\cos p_x a + \cos p_y a) - 4t' \cos p_x a \cos p_y a - 2t''(\cos 2p_x a + \cos 2p_y a)$ , для которой  $v_{0a} < v_{0d}$ . После некоторой алгебры находим

$$v_{Fa} = v_{0a} - F_a \sqrt{2}, \quad v_{Fd} = v_{0d} - F_d, \quad (15)$$

где  $F_{a,d} > 0$  обозначает соответствующий интеграл в правой части (14), содержащий функцию отталкивательного взаимодействия  $f$ .

Если бы взаимодействие  $f$  было слабым, то условие Лифшица–Воловика (3) выполнялось бы при том значении допинга  $x_B \simeq 0.2$ , когда ферми-линия LSCO достигает границ зоны Бриллюэна [13], и, следовательно, групповая скорость  $v_{0a}(x \rightarrow x_B)$  зануляется и дает логарифмическую расходимость плотности состояний

$$N(0, x) \propto \int \frac{d\varphi}{v_F(\varphi, x)} \propto \ln |x - x_B|. \quad (16)$$

Такая расходимость поддается анализу в рамках ренормгруппового формализма [51]. Результаты этого анализа демонстрируют выплаживание одночастичного спектра  $\epsilon(\mathbf{p}, x \simeq x_B)$  в соответствии с поведением, которое диктуется уравнением (1). Однако в реалистическом случае  $F_a \simeq F_d \simeq 1$ . Тогда, согласно (15), нарушение топологической устойчивости состояния Ландау проявляет себя преимущественно около угловых точек ферми-линии, а не на границе зоны, поэтому логарифмическая расходимость не возникает, и, следовательно, ренормгрупповой формализм оказывается неприменимым. Тем не менее, поведение электронной системы LSCO на ферми-жидкостной стороне от ТКТ можно проанализировать, если разделить ее на две подсистемы, состоящие из: а) легких носителей со средней эффективной массой  $m_{av}(x)$ , населяющих область вблизи диагоналей зоны и не меняющих своих свойств при топологическом переходе, и б) тяжелых носителей, занимающих области вблизи углов ферми-линии и имеющих среднюю эффективную массу  $M_{av}(x)$ , величина которой растет при приближении к  $x_c^h$ . Легкие носители вносят основной вклад в электрический ток, тогда как тяжелые усиливают обратное время между столкновениями  $\tau^{-1}$ , которое принимает вид

$$\tau^{-1} \propto m_{av}^* (M_{av}^*)^2 T^2 |\Gamma|^2. \quad (17)$$

При вычислении тяжелой эффективной массы, связанной с НФЖ поведением  $A_2(x)$ , надо иметь ввиду, что  $v_F(\varphi, x_c^h)$  обращается в нуль при  $\varphi = 0$ , но

остается конечной при  $\varphi > 0$ . Это означает, что тяжелые носители появляются в узкой импульсной области, примыкающей к углам ферми-линии, что подавляет их влияние. Кроме того, усиление  $M_{av}(x)$  существенно зависит от поведения групповой скорости. Действительно, согласно соотношениям (14) и (15), это поведение дается формулами

$$\begin{aligned} v_F(\varphi, x) - v_F(\varphi, x_c^h) &\propto x - x_c^h, \\ v_F(\varphi, x_c^h) &\propto \varphi^2, \quad \varphi < \varphi_t^h, \\ v_F(\varphi, x_c^h) &\propto \varphi - \varphi_t^h, \quad \varphi > \varphi_t^h, \end{aligned} \quad (18)$$

причем последнее соотношение работает при углах  $\varphi$ , превышающих малое переходное значение  $\varphi_t^h$ . Подставляя (18) в интеграл (16) и пренебрегая вкладом области малых углов  $\varphi < \varphi_t^h$ , получаем

$$N_h(0) = N(0, x \rightarrow x_c^h) \propto \ln(|x - x_c^h| + c\varphi_t^h), \quad (19)$$

где  $c$  – числовая константа, значение которой обращается в нуль в пределе слабой связи  $f \rightarrow 0$ . В противном случае  $N_h(0)$  и  $M_{av}$  остаются конечными, что не позволяет коэффициенту  $A_2(x)$  расходиться при  $x_c^h$  в противоречии с предсказаниями сценария ККТ, но в согласии с имеющимися экспериментальными данными [52].

На противоположной стороне объединенной фазовой диаграммы, где ферми-линия по форме близка к окружности (как показано на правой панели рис. 2), ситуация иная. Действительно, в рассматриваемом случае интеграл в (14) имеет такую же структуру, как в однородной 2D электронной жидкости. Следовательно, вместо (15) получаем

$$v_F(\varphi, x) = v_{0F}(\varphi) - F_1(x)/2, \quad (20)$$

где  $F_1$  – первая гармоника разложения Фурье функции взаимодействия  $f$  в 2D ферми-жидкости. Сходство между (15) и (20) означает, что поведение скорости Ферми  $v_F(\varphi)$  при малых  $\varphi$  и  $x - x_c^e$ , которое дается уравнением (18), остается неизменным при переходе от семейства LSCO к семейству  $\text{La}_{2-x}\text{Ce}_x\text{CuO}_4$  (LCCO). Однако, переходный угол  $\varphi_t$  из соотношения (18) теперь становится большим, и это делает различие кардинальным (за деталями отсылаем читателя к [53]). Учитывая это различие, приходим к результату

$$N_e(0, x) \propto M_{av}^*(x) \propto |x - x_c^e|^{-1/2}, \quad (21)$$

который отличается от ККТ предсказания  $M_{QCP}^*(x) \propto |x - x_c^e|^{-1}$ . Подстановкой (21) в Eq.(17) находим:

$$A_2(x \rightarrow x_c^e) \propto (x - x_c^e)^{-1}. \quad (22)$$

Этот результат согласуется с экспериментом и совпадает с предсказанием ККТ сценария, в котором постулируется, что  $A_2(x) \propto M_{QCP}^*(x)$  [54], в противовес формуле (17), выведенной на основе анализа уравнения Больцмана.

**Зависимость  $T_c$  от допинга.** Перейдем к анализу зависимости  $T_c$  от допинга  $x$ , служащей одним из критических тестов теоретических сценариев ВТСП в купратах. Кривую  $T_c(x)$  удобно находить с помощью критерия Таулесса [55], связанного с решением линейного интегрального уравнения для вычета  $\mathcal{T}$  в полосе куперовской вершинной части:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{p}, T_c) = \\ = - \int \mathcal{V}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \frac{\text{th}(\epsilon(\mathbf{p}_1, T_c)/2T_c)}{2\epsilon(\mathbf{p}_1, T_c)} \mathcal{T}(\mathbf{p}_1, T_c) \frac{d^2\mathbf{p}_1}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подавляющий вклад в интеграл в этом уравнении вносят четыре пятна ФК, каждое из которых привязано к своей седловой точке:  $\mathbf{p}_1 = (0, \pi)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (\pi, 0)$ ,  $\mathbf{p}_3 = (0, -\pi)$ ,  $\mathbf{p}_4 = (-\pi, 0)$  (см., например, [20, 51, 56]). Тогда интеграл по области, занятой ФК, заменяется некоторой эффективной константой, имеющей, вообще говоря, другую величину и даже другой знак по сравнению с БКШ интегралом, расходящимся логарифмически. Действительно, применение теоремы о среднем позволяет свести интегральное уравнение (23) к системе четырех алгебраических:

$$\mathcal{T}(\varphi) = - \sum_{k=1}^4 \mathcal{V}_k(\varphi) L(T_c) \mathcal{T}_k, \quad (24)$$

где  $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mathbf{p}_k, T_c)$ , а  $\mathcal{V}_k(\varphi) = a\mathcal{V}(p_F, \varphi, \mathbf{p}_k)$  есть усредненное значение взаимодействия  $\mathcal{V}$  по той из областей  $\Omega_k$ , занятых ФК, которая примыкает к рассматриваемой седловой точке, причем  $a \simeq 1$ .

Далее, воспользуемся формулой Нозьера [30],

$$\epsilon(\mathbf{p} \in \Omega) = T \ln \frac{1 - n_*(\mathbf{p})}{n_*(\mathbf{p})}, \quad (25)$$

которая означает, что ФК импульсное распределение, найденное из вариационного соотношения (1) при  $T = 0$ , остается неизменным при увеличении  $T$ , так что для  $\mathbf{p} \in \Omega$

$$\frac{\text{th}[\epsilon(\mathbf{p}, T_c)/2T_c]}{2\epsilon(\mathbf{p}, T_c)} = \frac{1 - 2n_*(\mathbf{p})}{2T_c \ln[(1 - n_*(\mathbf{p}))/n_*(\mathbf{p})]}. \quad (26)$$

Интеграл  $L(T_c)$ , который в силу соотношения (26) дается выражением

$$L(T_c) = \int_{\Omega_k} \frac{1 - 2n_*(\mathbf{p})}{2T_c \ln[(1 - n_*(\mathbf{p}))/n_*(\mathbf{p})]} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}, \quad (27)$$

фактически не зависит от  $k$ , пропорционален  $\eta(x)$  (отношению объема импульсного пространства, занятого ФК, к полному заполненному ферми-объему) и обратно пропорционален  $T_c$ , так что применяя снова теорему о среднем, находим  $L(T_c) = b\eta(x)/T_c$ , где  $b$  – тоже число порядка единицы.

Система уравнений (24) имеет четыре решения  $\mathcal{T}_k = e^{i\beta k}\mathcal{T}$  с  $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  [57], из которых решение с  $\beta = 0$  отвечает  $S$ -спариванию, решение с  $\beta = \pi$  –  $D$ -спариванию, а два решения с  $\beta = \pi/2$  и  $3\pi/2$  –  $P$ -спариванию [58]. Рассмотрим решение

$$\mathcal{T}_k = (-1)^k \mathcal{T}, \quad (28)$$

имеющее  $D$ -волновую структуру. Подставляя эту формулу в систему (24), находим, что

$$\mathcal{T}(\varphi) = -a\mathcal{V}_D(\varphi)L(T_c)\mathcal{T}, \quad (29)$$

где

$$\mathcal{V}_D(\varphi) = \sum_{k=1}^4 (-1)^k \mathcal{V}_k(\varphi). \quad (30)$$

Таким образом,  $\mathcal{T}(\varphi)$  меняет знак в точке  $\varphi = \pi/4$ . Смена знака  $\mathcal{T}(\varphi)$  происходит из-за того, что функция  $\mathcal{V}_D(\varphi)$  делает это при замене  $\varphi \rightarrow \varphi - \pi/2$ . Несложная алгебра, связанная с подстановкой соотношения (30) в уравнение (24), ведет к окончательному результату

$$\mathcal{T} \propto -V_D \eta(x), \quad (31)$$

где

$$V_D = \mathcal{V}^0 - 2\mathcal{V}^+ + \mathcal{V}^{++}, \quad (32)$$

выражается через матричные элементы

$$\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_{ii}, \quad \mathcal{V}^+ = \mathcal{V}_{i,i+1}, \quad \mathcal{V}^{++} = \mathcal{V}_{i,i+2}, \quad (33)$$

с  $\mathcal{V}_{ik} = \mathcal{V}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k)$ .

Оба матричных элемента  $\mathcal{V}^0$  и  $\mathcal{V}^{++}$  малы. Для матричного элемента  $\mathcal{V}^0$  это заключение следует из компенсации фононного притяжения и кулоновского отталкивания при малых переданных импульсах [59], а для  $\mathcal{V}^{++}$  оно вытекает из подавления их величины при больших переданных импульсах. Таким образом, получается оценка  $V_D \simeq -2\mathcal{V}^+$ . Поскольку роль электрон-фононного обмена быстро убывает с ростом переданного импульса, матричный элемент  $\mathcal{V}^+$  определяется эффективным кулоновским отталкиванием, имеющим положительный знак, что окончательно дает

$$T_c(x) \propto \mathcal{V}^+ \eta(x). \quad (34)$$

Этот результат, в котором  $T_c$  пропорциональна величине эффективного кулоновского отталкивания  $\mathcal{V}^+$ ,

коренным образом отличается от соответствующего экспоненциально малого БКШ результата  $T_c^{\text{BCS}} \propto e^{-2/\lambda}$ , где  $\lambda$  – безразмерная константа притяжения в куперовском канале.

Аналогичные расчеты могут быть проведены и для стандартного  $S$ -спаривания. Тогда формула (28) заменяется на  $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}$ , и после некоторой алгебры получается выражение, почти идентичное формуле (34), только с другим знаком, исключающим спаривание. Таким образом, присутствие ФК не только увеличивает критическую температуру  $T_c$  по сравнению с соответствующими БКШ результатами, но и делает высокотемпературным именно  $D$ -, а не  $S$ -спаривание.

**6. Спонтанное рождение  $D$ -волны зарядовой плотности.** Обсудим еще одну важную особенность фазовой диаграммы высокотемпературных сверхпроводников – наличие на ней областей, в которых нарушается однородность системы благодаря спонтанному появлению волн спиновой или зарядовой плотностей. Ограничимся анализом последней возможности. В пренебрежении несущественным вкладом от областей в импульсном пространстве, где ФК нет, уравнение для температуры фазового перехода  $T_{\text{CDW}}$  с образованием волны зарядовой плотности в нормальной фазе, т.е. при  $T_{\text{CDW}} > T_c$ , имеет вид [60]

$$\tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}) A(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}; T_{\text{CDW}}) \tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}) \frac{d^2 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^2}, \quad (35)$$

где  $\tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  – вершинная функция (чтобы отличить эту функцию от куперовской, мы снабдили ее “тильдой”), а  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q})$  – ландшафтная амплитуда отталкивательного кулоновского взаимодействия в частично-дырочном канале. Ферми-конденсатный частично-дырочный пропагатор

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}; T) = \frac{n_*(\mathbf{p}) - n_*(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{p}; T) - \epsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q}; T)} \quad (36)$$

при  $T > 0$  выражается через независимые от  $T$  числа заполнения  $n_*(\mathbf{p})$  квазичастиц ФК и линейные по температуре квазичастичные энергии (25).

Приступая к анализу уравнения (35), отметим, что в системах без ФК у соответствующего уравнения интересующих нас решений нет. В системах с ФК представим интеграл в правой части уравнения (35) аналогично тому, как это делалось для уравнения (23), в виде суммы по всем четырем областям, занятым ФК:

$$\tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^4 f_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) A_0(\mathbf{q}; T_{\text{CDW}}) \tilde{\mathcal{T}}_k(\mathbf{q}), \quad (37)$$



где  $\tilde{T}_k(\mathbf{q}) = \tilde{T}(\mathbf{p}_k, \mathbf{q})$ , а  $f_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \simeq f_k(\mathbf{p}, \mathbf{p}_k, \mathbf{q})$  есть усредненное значение взаимодействия по той из областей, занятых ФК, которая примыкает к рассматриваемой седловой точке. Интеграл  $A_0(\mathbf{q})$ , даваемый выражением

$$A_0(\mathbf{q}; T) = \frac{1}{T} \int_{\Omega_k} \frac{n_*(\mathbf{p}_1) - n_*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})}{\ln \frac{1-n_*(\mathbf{p}_1)}{n(\mathbf{p}_1)} - \ln \frac{1-n_*(\mathbf{p}_1+\mathbf{q})}{n_*(\mathbf{p}_1+\mathbf{q})}} \frac{d^2 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^2}, \quad (38)$$

фактически не зависит от  $k$ . При малых переданных импульсах  $q$  он пропорционален  $\eta$  и обратно пропорционален  $T_{\text{CDW}}$ . Когда величина  $q$  превышает характерный размер области, занятой ФК, амплитуда  $A_0(\mathbf{q})$  быстро убывает. Система (37), аналогично рассмотренной выше системе (29) в куперовском канале, имеет несколько разных решений. Для иллюстрации рассмотрим только одно из них,

$$\tilde{T}_k(\mathbf{q}) = (-1)^k \tilde{T}(\mathbf{q}), \quad (39)$$

аналог  $D$ -волны зарядовой плотности [61]. Опуская дальнейшие выкладки, эквивалентные тем, которые были выполнены выше при нахождении  $\mathcal{T}$ , приведем окончательный результат для температуры перехода

$$T_{\text{CDW}} \propto -F_D \eta, \quad (40)$$

где

$$F_D = F^0 - 2F^+ + F^{++} \quad (41)$$

выражается через матричные элементы

$$F^0 = f_{ii}, \quad F^+ = f_{i,i+1}, \quad F^{++} = f_{i,i+2}, \quad (42)$$

с  $f_{ik} = f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k)$ . Отметим, что решение (39) существует только тогда, когда параметр  $F_D$  отрицателен.

**7. Дихотомия сопротивления ВТСП купратов в нормальном состоянии.** Приступим теперь к анализу неферми-жидкостного поведения сопротивления  $\rho(T, x)$  купратов в нормальном состоянии, для которого в последнее время появился ряд экспериментальных находок, привлекших широкое внимание. Во-первых, главной особенностью следует признать тот факт, что  $\rho(T)$  демонстрирует преимущественно линейную зависимость от температуры (отметим, в первую очередь, на этот счет работы [2, 52, 54, 62]). Во-вторых, вместо коллапса НФЖ свойств в единственной критической точке, как это предписывает ККТ сценарий, обнаружено, что коэффициент  $A_1(x)$  растет линейно с разностью  $|x - x_c|$  с вызывающим префактором, *универсальным для различных купратов*, значение которого сравнимо с планковским пределом [63]. Хотя линейность

$\rho(T)$  может быть учтена на основе подхода Херца–Миллиса–Морьи [64], наблюдаемый рост коэффициента  $A_1(x)$  с увеличением разности  $|x - x_c|$  не имеет объяснения в рамках флуктуационных сценариев.

В то же время, как видно, в частности, из рис. 3 и 4, все эти аномалии можно объяснить на основе

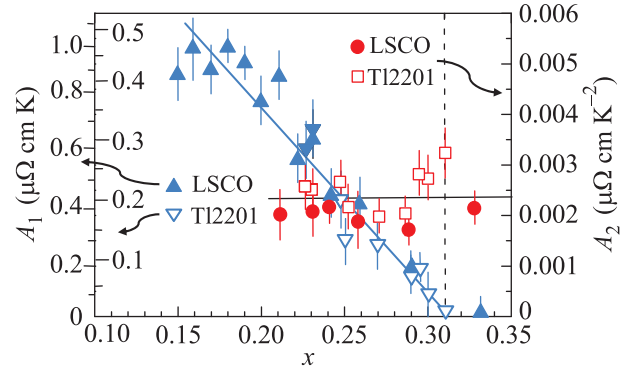


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость от допинга коэффициентов в линейном ( $A_1$ ) и квадратичном ( $A_2$ ) по температуре членах в сопротивлении  $\rho(T)$  соединений LSCO и Tl2201. Левая ось: треугольники изображают экспериментальные данные [52] для LSCO (масштаб оси снаружи) и Tl2201 (масштаб внутри), прямая линия показывает предсказание  $A_1 \propto |x - x_c|$  с  $x_c^h \simeq 0.3$  и коэффициентом, подобранным под воспроизведение поведения в среднем. Правая ось: кружки показывают экспериментальные данные [52], горизонтальная прямая представляет предсказание  $A_2 \simeq \text{const}$  со значением константы, подобранным из условия согласия с экспериментом

концепции ФК [19, 20, 22, 27, 30]. Поскольку вблизи границ объединенной фазовой диаграммы нет фазы псевдощели [54, 13], можно использовать оригинальную модель ФК с эффективной массой  $M_{\text{FC}}^*(T, x) \propto \eta(x)/T$ , где  $\eta(x) \ll 1$  (детали см. в [65]).

Опуская промежуточные выкладки, приведем результат  $\rho(x, T) \propto (ne^2)^{-1} (m_{\text{av}}^*(x))^3 M_{\text{FC}}^*(x) |\Gamma(x)|^2 T^2$ , что окончательно дает

$$A_1(x) \propto (ne^2)^{-1} (m_{\text{av}}^*(x))^3 |\Gamma(x)|^2 \eta(x). \quad (43)$$

Поправки к этому результату, не зависящие от  $T$ , пропорциональны  $\eta^2$ .

Имея ввиду, что в действительности средняя эффективная масса  $m_{\text{av}}^*(x)$ , извлеченная из данных по теплоемкости LSCO, довольно большая, около  $10 m_e$  [63], можно использовать соотношение (11) и исключить произведение  $(m_{\text{av}}^*(x))^2 |\Gamma(x)|^2$  из формулы (43). Для 2D купратов полученный результат удобно пе-



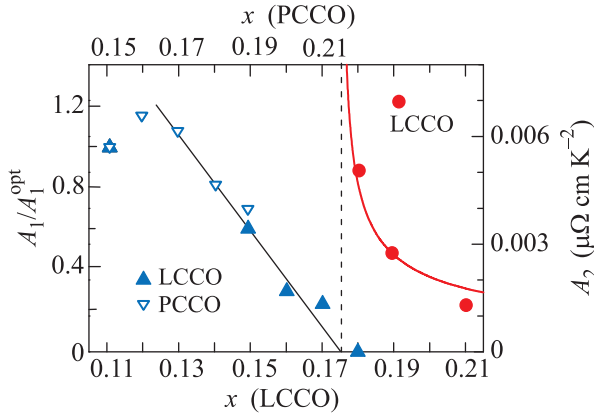


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость от допинга коэффициента  $A_1$ , нормированного на значение при оптимальном допинге, для LCCO и PCCO (левая сторона графика) и, аналогично,  $A_2$  для LCCO (правая сторона). Слева ( $x < x_c^e$ ;  $x_c^e \simeq 0.175$  для LCCO и 0.215 для PCCO): треугольники изображают экспериментальные данные [54], прямая линия показывает ТКТ предсказание  $A_1 \propto |x - x_c^e|$  с коэффициентом, подобранным под воспроизведение экспериментального значения приведенного коэффициента  $A_1$  для LCCO при  $x = 0.15$ . Справа ( $x > x_c^e$ ): кружки показывают экспериментальные данные [54], кривая представляет ТКТ результат  $A_2 \propto (x - x_c^e)^{-1}$  с префактором, найденным из условия воспроизведения экспериментального значения  $A_2$  для LCCO при  $x = 0.19$

реписать в виде, аналогичном введенному в экспериментальной работе [63]:

$$A_1^{2D}(x) = \alpha \frac{h}{2e^2 T_F(x)} \eta(x), \quad (44)$$

где  $T_F(x) = p_F^2 / 2m_{av}^*(x)$ ,  $h$  – постоянная Планка, а  $\alpha$  – численный множитель порядка единицы. Сравнение этого соотношения с предложенным в [63] показывает, что они почти совпадают, за исключением зависящего от допинга множителя  $\eta(x)$  в (44), который тоже подтверждается экспериментом [63]. Это опровергает так называемую “планковскую трактовку” поведения  $A_1(x)$ , но поддерживает ФК сценарий ВТСП, рассматриваемый в настоящей работе.

Полученные результаты дают также ключ к разгадке обнаруженной в ряде экспериментальных работ [52, 54, 62] загадочной пропорциональности между  $A_1(x)$  и критической температурой  $T_c(x)$ . Действительно, как видно из сравнения выражений (34) и (44), отношение  $A_1(x)/T_c(x)$  оказывается слабо зависящим от допинга  $x$  в согласии с экспериментом по обе стороны – электронного и дырочного допинга – объединенной фазовой диаграммы купратов [52, 54, 62]. При этом важно отметить следующее:

вопреки общепринятому мнению эта зависимость демонстрирует, что поведение интересующих нас величин обусловлено вкладом импульсной области, занятой ФК, а вовсе не сходством участвующих в деле взаимодействий между квазичастицами.

**8. Обсуждение результатов.** В работе продемонстрировано, что главное различие между сценариями ККТ и ТКТ для ВТСП соединений проявляется наиболее ярко вблизи границ сверхпроводящего купола, где заканчивает кривая  $T_c(x)$ . В ККТ сценарии это происходит в силу обращения в нуль  $D$ -волновой спаривательной константы  $\lambda_D(x_c)$  при значениях  $x_c$ , равных  $x_c^h$  или  $x_c^e$ . При этом БКШ поведение  $T_c(x \rightarrow x_c) \propto e^{-2/\lambda_D(x)}$  означает, что производная

$$dT_c^{QCP}(x \rightarrow x_c^h)/dx \propto e^{-2/\lambda_D(x)} \quad (45)$$

обращается в нуль при  $x = x_c$ , тогда как в эксперименте она остается *конечной* или даже расходится [54]. Это противоречие исключает ККТ сценарий ВТСП в купратах и электрон-фононное притяжение как причину возникновения сверхпроводимости в этих системах.

В противоположность этому, поведение  $dT_c(x)/dx \propto d\eta/dx$  в ТКТ сценарии, обусловленное эволюцией ФК параметра  $\eta(x)$  с допингом, этого недостатка не имеет. В ряде аналитически решаемых моделей так же, как и в численных расчетах, параметр  $\eta(x)$  растет линейно с  $x - x_c$  или даже быстрее [27, 11, 20] в согласии с имеющимися экспериментальными данными.

Рассмотренный в работе сценарий ВТСП отличается существованием нескольких ФК пятен – областей в импульсном пространстве, где при  $T = 0$  импульсное распределение квазичастиц  $n_*(\mathbf{p})$  отличается от ферми-жидкостного, что приводит к НФЖ поведению сильно коррелированных ферми-систем, надежно зарегистрированному в экспериментах последнего десятилетия. Именно  $C_4$  симметрия этого распределения, устойчивая к повышению температуры до  $T_c$ , объясняет нетривиальную  $D$ -волновую структуру ВТСП щели в купратах. Имея ввиду результаты, полученные в расчетах в пределе сильной связи [66] для треугольной решетки, и особенно в свете недавнего экспериментального изучения повернутого двухслойного графена [40], можно сделать вывод, что корреляция между ВТСП и пятнами ФК, по-видимому, универсальна. Отметим также, что именно благодаря присутствию ФК, на фазовой диаграмме купратов сверхпроводящая фаза соседствует с неоднородными фазами, содержащими конденсаты волн зарядовой и спиновой плотностей.

Другой важный результат нашего анализа относится к объяснению так называемой аномальной критичности, обнаруженной в исследованиях проводимости сверхдопированных LSCO соединений [52], включая *отсутствие* расходимости коэффициента  $A_2(x)$  на ферми-жидкостной стороне фазовой диаграммы. Такое поведение  $A_2(x)$  сводит на нет диктат ККТ сценария, который также не в состоянии объяснить возникновение линейного по  $T$  неферми-жидкостного члена в сопротивлении  $\rho(T)$  при  $x < x_c^h$ , величина которого  $A_1(x)$  растет линейно с увеличением разности  $x_c^h - x$  [52].

В свете всего того, что дает анализ существующих экспериментальных данных на основе концепции ФК, стоит повторить слова, сказанные в работе [52] около десяти лет назад: “Физика состояния странного металла в купратах с дырочным сверхдопингом связана не с наличием квантовой критической точки, а с неизвестной фазой”, которую мы отождествляем с состоянием с плоской зоной.

В заключение, мы продемонстрировали, что область высокотемпературной сверхпроводимости в купратах расположена между двумя критическими значениями допинга  $x_c^e$  и  $x_c^h$ , связанных с границами существования области импульсного пространства, занятого фермионным конденсатом, который возникает вслед за нарушением топологической устойчивости состояния Ландау. Представлены экспериментальные и теоретические аргументы, опровергающие представление, что необычные свойства купратов управляются квантовыми критическими точками. Наш анализ и его результаты говорят, что хотя допирование плоскостей  $\text{CuO}_2$  электронами или дырками может переводить моттовский изолятор в проводник, это наблюдение не означает, что антиферромагнитные флуктуации обеспечивают сверхпроводимость купратов – в действительности, вопреки распространенному убеждению, все устроено иначе.

Авторы благодарны Г. Воловику, Р. Грину, В. Долгополову, Я. Копелевичу, Л. Питаевскому и В. Шагиняну за полезное обсуждение затронутых в работе вопросов. Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-02-06261. В.А.К. и Дж.У.К. благодарят за поддержку МакДоннелловский Центр космических наук, Дж.У.К. так же признателен Центру математических наук Университета Мадейры за гостеприимство.

1. J. G. Bednorz and K. A. Müller, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
2. N. P. Armitage, P. Fournier, and R. L. Greene, Rev. Mod. Phys. **82**, 2421 (2012).

3. P. Monthoux, A. V. Balatsky, and D. Pines, Phys. Rev. Lett. **67**, 3448 (1991).
4. T. Moriya and R. Ueda, Advances in Physics **49**, 555 (2000).
5. H. v. Löchneysen, A. Rosch, M. Vojta, and P. Wolfe, Rev. Mod. Phys. **79**, 1015 (2007).
6. P. Gegenwart, Q. Si, and F. Steglich, Nat. Phys. **4**, 186 (2008).
7. D. J. Scalapino, Rev. Mod. Phys. **84**, 1383 (2012).
8. S. Doniach and S. Engelsberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 753 (1966).
9. P. Coleman, C. Pépin, Q. Si, and R. Ramazashvili, J. Phys: Condens. Matter **13**, R723 (2001).
10. A. V. Chubukov, V. M. Galitski, and V. M. Yakovenko, Phys. Rev. Lett. **94**, 046404 (2005).
11. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, JETP Lett. **90**, 628 (2010); **94**, 73 (2011).
12. T. Yoshida, X. Y. Zhou, K. Tanaka, W. L. Jang, Z. Hussain, Z.-X. Shen, A. Fujimori, S. Sahrakorpi, M. Lindroos, R. S. Markiewicz, A. Bansil, S. Komiyama, Y. Ando, H. Eisaki, T. Kakeshita, and S. Uchida, Phys. Rev. B **74**, 224510 (2006).
13. T. Yoshida, X. Y. Zhou, D. H. Lu, S. Komiyama, Y. Ando, H. Eisaki, T. Kakeshita, S. Uchida, Z. Hussain, Z.-X. Shen, and A. Fujimori, J. Phys. Condens. Matter **19**, 125209 (2007).
14. T. Yoshida, W. Malaeb, S. Ideta, D. H. Lu, R. G. Moor, Z.-X. Shen, M. Okawa, T. Kiss, K. Ishizaka, S. Shin, S. Komiyama, Y. Ando, H. Eisaki, S. Uchida, and A. Fujimori, Phys. Rev. B **93**, 014513 (2016).
15. F. Mahmood, X. He, I. Bozovic, and N. P. Armitage, arxiv 1802.02101.
16. T. Tomura, K. Kuga, Y. Uwatoko, P. Coleman, and S. Nakatsuji, Science **349**, 506 (2015).
17. I. M. Lifshitz, JETP **11**, 1130 (1960).
18. L. D. Landau, JETP **3**, 920 (1957); JETP **8**, 70 (1958).
19. V. A. Khodel and V. R. Shaginyan, JETP Lett. **51**, 553 (1990).
20. V. A. Khodel, J. Low Temp. Phys. **191**, 14 (2018).
21. M. Shifman, A. Vainshtein, and V. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** 385; 448; 519 (1979).
22. G. E. Volovik, JETP Lett. **53**, 222 (1991).
23. F. Wilczek, arxiv: 1604.05669.
24. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, Nature **426**, 537 (2003).
25. P. Hohenberg and W. Kohn, Phys. Rev. **136**, B864 (1964).
26. G. E. Volovik, Springer Lecture Notes in Physics **718**, 31 (2007).
27. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, Phys. Rev. B **78**, 075120 (2008).
28. J. W. Clark, M. V. Zverev, and V. A. Khodel, Ann. Phys. (N. Y.) **327**, 3063 (2012).

29. M. Ya. Amusia, K. G. Popov, V. R. Shaginyan, and V. A. Stephanovich, *Theory of Heavy-Fermion Compounds*, Springer Series in Solid-State Sciences, **182** (Springer, Berlin, 2014).
30. P. Nozières, *J. Phys. I France* **2**, 443 (1992).
31. J. G. Donath, F. Steglich, E. D. Bauer, J. L. Sarrao, and P. Gegenwart, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 136401 (2008).
32. M. Neumann, J. Nyéki, B. Cowan, and J. Saunders, *Science* **317**, 1356 (2007).
33. V. A. Khodel, M. V. Zverev, and V. M. Yakovenko, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 236402 (2005).
34. V. R. Shaginyan, A. Z. Msezane, K. G. Popov, and V. A. Stephanovich, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096406 (2008).
35. V. R. Shaginyan, A. Z. Msezane, K. G. Popov, J. W. Clark, M. V. Zverev, and V. A. Khodel, *Phys. Rev. B* **86**, 085147 (2012).
36. V. R. Shaginyan, K. G. Popov, and V. A. Khodel, *Phys. Rev. B* **88**, 115103 (2013).
37. V. R. Shaginyan, A. Z. Msezane, K. G. Popov, J. W. Clark, V. A. Khodel, and M. V. Zverev, *Phys. Rev. B* **93**, 205126 (2016).
38. A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, J. W. Clark, V. R. Shaginyan, M. V. Zverev, and V. A. Khodel, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 186402 (2014).
39. V. A. Khodel, J. W. Clark, H. Li, and M. V. Zverev, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 216404 (2007).
40. Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, and E. Kaxiras, and P. Jarillo-Herrero, *Nature* **556**, 43 (2018).
41. A. Mokashi, S. Li, B. Wen, S. V. Kravchenko, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, and M. P. Sarachik, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 096405 (2012).
42. М. В. Зверев, В. А. Ходель, В. Р. Шагинян, *ЖЭТФ* **109**, 1054 (1996).
43. C. Collignon, B. Fauqué, A. Cavanna, U. Gennser, D. Mailly, and K. Behnia, *Phys. Rev. B* **96**, 224506 (2017).
44. C. Collignon, X. Lin, C. W. Rischau, B. Fauqué, and K. Behnia, arxiv: 1804.07067.
45. D. Pines and P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids*, W. A. Benjamin, N.Y. (1966), v. I .
46. V. A. Khodel and P. Schuck, *Z. Phys. B* **104**, 505 (1997).
47. N. D. Mermin, *Phys. Rev.* **159**, 161 (1967).
48. K. Kadowaki and S. B. Woods, *Solid State Commun.* **58**, 507 (1986).
49. L. P. Pitaevskii, *JETP* **10**, 1267 (1960).
50. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. E. Dzjaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, London (1963).
51. V. Yu. Irkhin, A. A. Katanin, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 076401 (2002).
52. R. A. Cooper, Y. Wang, B. Vignolle, O. J. Lipscombe, S. M. Hayden, Y. Tanabe, T. Adachi, Y. Koike, M. Nohara, H. Takagi, C. Proust, and N. E. Hussey, *Science* **323**, 603 (2009).
53. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, arxiv 1804.08177.
54. K. Jin, N. P. Butch, K. Kirshenbaum, J. Paglione, R. L. Greene, *Nature* **476**, 73 (2011).
55. D. J. Thouless, *Ann. Phys. (N.Y.)* **10**, 553 (1960).
56. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, *JETP Lett.* **105**, 267 (2017).
57. S. Maiti and A. Chubukov, *Superconductivity from repulsive interactions in Lectures on the physics of strongly correlated systems XYII*, pp.3–73, AIP Conference Proceedings, Melville, N.Y. (2013).
58. V. A. Khodel, J. W. Clark, V. R. Shaginyan, and M. V. Zverev, arXiv 1505.01966.
59. A. S. Alexandrov, *Phys. Rev. B* **77**, 094502 (2008).
60. V. A. Khodel and M. V. Zverev, *JETP Lett.* **85**, 404 (2007).
61. S. Chakravarty, *Phys. Rev. B* **66**, 224505 (2002).
62. L. Taillefer, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**, 51 (2010).
63. A. Legros, S. Benhabib, W. Tabis, F. Laliberté, M. Dion, M. Lizaïre, B. Vignolle, D. Vignolles, H. Raffy, Z. Z. Li, P. Auban-Senzier, N. Doiron-Leyraud, P. Fournier, D. Colson, L. Taillefer, and C. Proust, arXiv:1805.02512.
64. T. Moriya, K. Ueda, *Adv. Phys.* **49**, 555 (2000).
65. V. A. Khodel, J. W. Clark, K. G. Popov, and V. R. Shaginyan, *JETP Lett.* **101**, 415 (2015).
66. D. Yudin, D. Hirschmeier, H. Hafermann, O. Eriksson, A. I. Lichtenstein, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 070403 (2014).