

Скорость сфалеронных переходов в решеточной глюодинамике

А. Ю. Котов¹⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт” - ИТЭФ, 117218 Москва, Россия

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 14 августа 2018 г.

Представлены результаты вычисления скорости сфалеронных переходов в глюодинамике при температуре $T/T_c = 1.24$ методом решеточного моделирования. Расчеты проведены с помощью формулы Кубо, которая связывает скорость сфалеронных переходов и коррелятор плотности топологического заряда. Для вычисления коррелятора плотности топологического заряда был использован метод градиентного потока. Обращение формулы Кубо проведено методом Бакуса–Гильберта. Проводится сравнение представленных данных с результатами, полученными другими методами.

DOI: 10.1134/S0370274X18180029

Введение. Хорошо известно, что теория Янга–Миллса обладает нетривиальной топологической структурой [1–4]. В данной теории есть бесконечное количество энергетически вырожденных, но топологически различных классических вакуумов, отличающихся топологической характеристикой – целым числом Черна–Саймонса. При нулевой температуре переходы между различными вакуумами возможны благодаря туннельному процессу, инстантону [5, 6], однако они подавлены [7]. При конечной температуре классические тепловые флуктуации полей (возбуждающие нестабильные седловые решения уравнений поля – сфалероны [8]) также могут привести к изменению числа Черна–Саймонса и переходу в другой вакуум. Скорость сфалеронных переходов определяет эволюцию числа Черна–Саймонса со временем, которая представляет собой случайное блуждание:

$$\Gamma_{CS} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Delta N_{CS}(t))^2}{Vt}. \quad (1)$$

Следствием данной топологической структуры вакуума является ряд важнейших физических явлений. В теории с фермионами киральная аномалия [9–11] приводит к тому, что изменение числа Черна–Саймонса сопровождается изменением соответствующей плотности заряда ρ . Например, в электрослабой теории сфалеронные переходы приводят к аномальному несохранению барионного заряда [12], а в квантовой хромодинамике – к генерации кирального

заряда [13]. С ростом плотности заряда ρ увеличивается энергия системы, поэтому сфалеронные переходы приводят к распаду ρ [13]:

$$\frac{d\rho}{dt} \sim -\rho\Gamma_{CS}, \quad (2)$$

коэффициент пропорциональности в данной формуле зависит от свойств фермионов в данной теории. В последнее время очень активно исследуются свойства квантовой хромодинамики (КХД) с ненулевым киральным зарядом из-за ряда нетривиальных явлений, которые возникают в данной системе [14, 15].

Детали вычислений. Поскольку изменение числа Черна–Саймонса задается интегралом плотности топологического заряда $q(x) = \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu}(x)$ калибровочных полей:

$$\Delta N_{CS}(t) = \int_0^t dt \int d^3\bar{x} q(t, \bar{x}), \quad (3)$$

скорость сфалеронных переходов определяется пределом нулевой частоты спектральной функции $\rho(\omega)$ запаздывающего коррелятора G^R плотности топологического заряда $q(x)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{CS} &= -2\pi T \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho(\omega)}{\omega}, \\ \rho(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} G^R(\omega, \mathbf{k} = 0), \\ G^R(\omega, \mathbf{k}) &= -i \int d^4x e^{-ikx} \theta(t) \langle [\frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu}(x), \\ &\quad \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\alpha\beta}^a \tilde{F}_a^{\alpha\beta}(0)] \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾e-mail: kotov.andrey.yu@gmail.com

Решеточные расчеты проводятся в пространстве Евклида [16]. Спектральная функция связана с евклидовым коррелятором плотности топологического заряда интегральным соотношением [17]:

$$G_E(t) = \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\cosh \omega(\beta/2 - t)}{\sinh \omega\beta/2} d\omega. \quad (5)$$

Решеточное вычисление скорости сфалеронных переходов аналогично вычислению таких транспортных величин, как проводимость [18, 19], сдвиговая вязкость [20–22], объемная вязкость [23, 24] и др.

Решеточное вычисление транспортных коэффициентов в теории с динамическими фермионами на данный момент невозможно из-за очень маленького отношения сигнала к шуму. По этой причине в данной работе рассматривается глюодинамика с калибровочной группой $SU(3)$. Данная теория является важным испытательным полигоном для полной КХД, поскольку она содержит большую часть как пертурбативных, так и непертурбативных явлений, свойственных КХД [25, 26], и может быть использована для оценки эффектов в полной теории.

Численные расчеты были проведены в глюодинамике с калибровочной группой $SU(3)$ и вильсоновским действием:

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr } U_{\mu\nu}(x) \right),$$

где $U_{\mu\nu}(x)$ – произведение линковых переменных U вдоль элементарного прямоугольника в точке x в направлениях μ, ν .

Для определения шага решетки были использованы результаты [27]. Расчеты проводились при температуре $T/T_c = 1.24$ на решетках размером 12×36^3 , 16×48^3 , 20×60^3 , 24×70^3 . Расчеты на разных размерах решеток позволили рассмотреть непрерывный предел $a \rightarrow 0$ (температура T связана с шагом решетки a соотношением $T = \frac{1}{N_t a}$, где N_t – размер решетки во временном направлении). Для данных размеров решеток произведение пространственного размера решетки L на температуру T равно $LT \approx 3$. Для оценки эффектов конечного объема также были проведены расчеты на решетках размером 16×32^3 ($LT = 2$), 16×64^3 ($LT = 4$).

Для измерения плотности топологического заряда $q(x)$ применен метод градиентного потока [28]. В данном методе вводится дополнительная фиктивная координата τ и изучается изменение полей вдоль уравнения движения $dA_\mu(\tau, t, x)/d\tau = -g_0^2 \partial S / \partial A_\mu(\tau, t, x)$, где начальное условие $A_\mu(\tau = 0, t, x) = A_\mu(t, x)$ определяется обычным 4-мерным

калибровочным полем. Градиентный поток сглаживает калибровочное поле с характерным радиусом сглаживания $\sqrt{8\tau}$.

Одним из важных особенностей градиентного потока является тот факт, что он позволяет определить перенормированную плотность топологического заряда и ее корреляторы [29]. Например, непрерывный предел двухточечной корреляционной функции $\langle q(x)q(0) \rangle$ перенормированной плотности $q(x)$ равен

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle q(x)q(0) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \langle q_L^\tau(x)q_L^\tau(0) \rangle, \quad (6)$$

где $q_L^\tau(x)$ – решеточная дискретизация плотности топологического заряда, измеренная на 4-мерной конфигурации поля $A_\mu(\tau, t, x)$ в момент времени градиентного потока τ . Также известно поведение поправок в первом порядке по τ и по a :

$$\langle q(x)q(0) \rangle = \langle q_L^\tau(x)q_L^\tau(0) \rangle + O_\tau(a^2) + O(\tau). \quad (7)$$

Важно отметить, что ошибки дискретизации $O_\tau(a^2)$, вообще говоря, зависят от τ , поэтому порядок пределов в (6) важен.

В расчетах использовалась следующая дискретизация плотности топологического заряда [30]:

$$q_L(x) = -\frac{1}{512\pi^2} \sum_{\mu\nu\rho\sigma=\pm 1}^{\pm 4} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(U_{\mu\nu}U_{\rho\sigma}), \quad (8)$$

где $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ антисимметричен по любой паре индексов, $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ для положительных индексов, а для отрицательных $\tilde{\epsilon}_{(-\mu)\nu\rho\sigma} = -\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Результаты. На рисунке 1 приведен вид коррелятора плотности топологического заряда как функции евклидова времени t на решетке размером 24×70^3 для нескольких времен градиентного потока $\tau/a_{24}^2 = 1.0, 1.5, 2.0$ в единицах шага решетки a_{24} . Из-за того, что оператор плотности топологического заряда является псевдоскаляром, коррелятор $G_E(t)$ отрицателен при $t > 0$. Кроме того, в $G_E(t)$ дает вклад положительный контактный член при $t = 0$. Поскольку градиентный поток сглаживает конфигурации с характерным радиусом сглаживания $\sim \sqrt{8\tau}$, при конечном времени градиентного потока τ на маленьких евклидовых временах $t \lesssim \sqrt{8\tau}$ в коррелятор вносит вклад размазанный контактный член. Кроме того, при $\tau \lesssim a^2$ велики ошибки дискретизации. Поэтому в дальнейшем для экстраполяции используются точки с $t^2/8 \gtrsim \tau \gtrsim a^2$.

Непрерывный предел был рассмотрен для каждой точки коррелятора на решетке с наименьшим шагом 24×70^3 . Для других размеров решетки была взята интерполяция коррелятора сплайнами, что

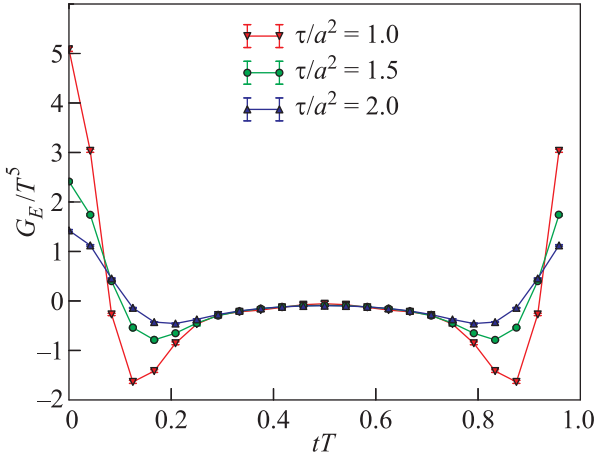


Рис. 1. (Цветной онлайн) Коррелятор плотности топологического заряда G_E/T^5 как функция евклидова времени t для нескольких времен градиентного потока $\tau/a_{24}^2 = 1.0, 1.5, 2.0$. Размер решетки 24×70^3 . Линии соединяют точки с одинаковым τ для удобства восприятия

позволило для каждого размера решетки иметь данные для коррелятора в точках $tT = i/24$, где i – целое число.

Было обнаружено, что для точек с учетом ограничения $t^2/8 \gtrsim \tau \gtrsim a^2$, экстраполяция к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$ с хорошей точностью может быть описана поправками $\sim a^2$. На рисунке 2 визуализирована характерная зависимость коррелятора G_E/T^5 от $1/N_t^2$ для времени градиентного потока $\tau/a_{24}^2 = 2.5$

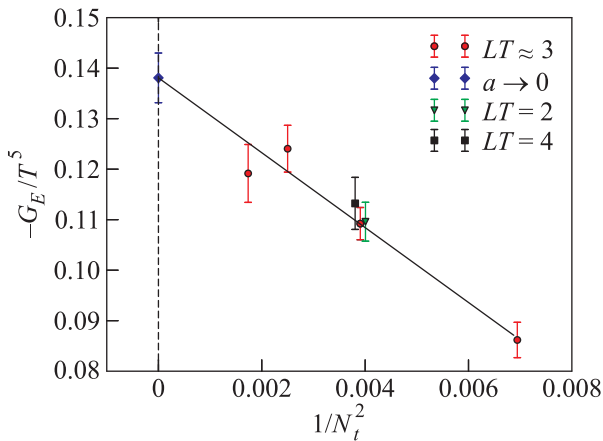


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость коррелятора плотности топологического заряда от $1/N_t^2 \sim a^2$. Красной линией показан результат фитирования линейной функцией. Синим ромбом показан результат экстраполяции к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$. Также показаны данные для решеток с произведением пространственного размера на температуру $LT = 2$ и 4

и евклидова времени $tT = 10/24$. Кроме того, было обнаружено, что данные для коррелятора на решетках размера $16 \times 32^3, 16 \times 48^3, 16 \times 64^3$ совпадают в пределах ошибок, т.е. эффекты конечного объема малы.

На рисунке 3 представлена зависимость коррелятора, экстраполированного к непрерывному пределу

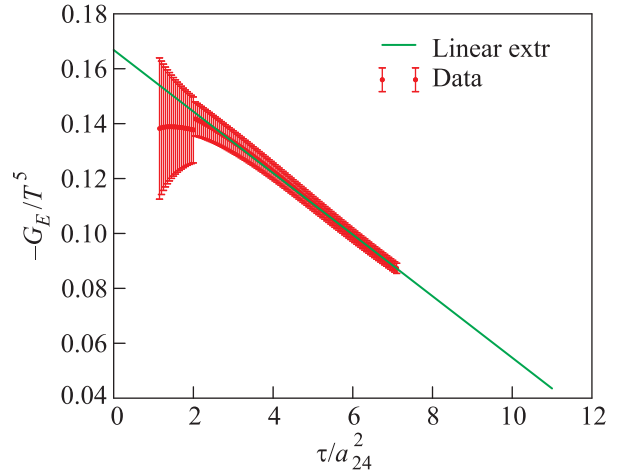


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость коррелятора плотности топологического заряда, экстраполированного к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$, от времени градиентного потока τ . Время градиентного потока τ измеряется в единицах шага решетки 24×70^3 . Линией показана экстраполяция линейной функцией $\tau \rightarrow 0$

лу, от времени градиентного потока τ для евклидова времени $tT = 10/24$. Видно, что зависимость от τ может быть описана как линейная. Для всех остальных точек t зависимость от τ также линейная, что позволило произвести экстраполяцию $\tau \rightarrow 0$. В результате данной экстраполяции получен коррелятор плотности топологического заряда G_E , представленный на рис. 4.

Для обращения интегрального соотношения (5) и определения скорости сфалеронных переходов был использован метод Бакуса–Гильберта [31, 32]. Подробно данный метод описан в [21]. Для оценки погрешности была изучена зависимость от параметра регуляризации λ . Конечный результат для оценки скорости сфалеронных переходов равен:

$$\Gamma/T^4 = 0.12(3). \quad (9)$$

Основным источником погрешности (9) является неопределенность, возникающая при обращении интегрального соотношения (5).

Обсуждение и заключение. Интересно сравнить полученные данные с результатами [33]. В данной работе авторы изучали скорость сфалеронных

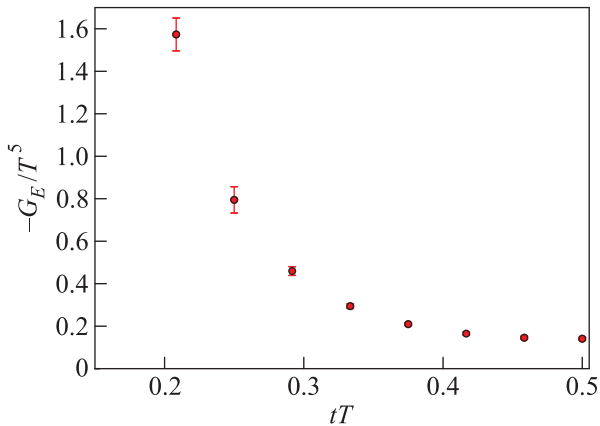


Рис. 4. (Цветной онлайн) Коррелятор плотности топологического заряда как функция евклидова времени t . Данный коррелятор получен в результате двойной экстраполяции $a \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$

переходов с помощью численного моделирования в реальном времени в режиме слабой связи. Экстраполяция полученных данных к константам связи, соответствующим окологрническим температурам системы, дает оценку $\Gamma/T^4 \sim 30\alpha_s^4$, что для $T/T_c = 1.24$ соответствует $\Gamma/T^4 = 0.027 \pm 0.012$. Данный результат несколько меньше представленного в данной статье, однако различие составляет $\sim 3\sigma$. Помимо этого, невозможно определить погрешность, внесенную экстраполяцией к α_s , соответствующим критическим температурам. Поэтому можно заключить, что полученные данные согласуются с результатами [33].

Представленный результат в несколько раз больше полученного в [34]. Возможными причинами данного несоответствия может быть использование калибровочной группы $SU(2)$, отсутствие непрерывного предела и использование анзаца для обращения интегрального соотношения (5) в [34].

В заключение, в данной работе представлены результаты измерения скорости сфалеронных переходов в $SU(3)$ -глюодинамике методами решеточного моделирования. Полученный результат $\Gamma/T^4 = 0.12(3)$ при $T/T_c = 1.24$. Данный результат находится в согласии с данными, полученными в результате моделирования в слабой связи в реальном времени.

Авторы благодарны В.В. Брагуге, Н.Ю. Астраханцеву и Э.М. Ильгенфритцу за интересные и полезные обсуждения. Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса” НИЦ “Курчатовский институт”, <http://ckp.nrcki.ru/>. Часть расчетов была проведена с использованием

суперкомпьютера “НИЦ “Курчатовский институт” – ИТЭФ. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект # 18-72-00055).

1. C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, Phys. Lett. B **63**, 334 (1976).
2. C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, Phys. Lett. B **63**, 357 (1976).
3. R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976).
4. R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 353 (1976).
5. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
6. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 350 (1975).
7. E. V. Shuryak, Phys. Lett. B **79**, 135 (1978).
8. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155**, 36 (1985).
9. S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
10. S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 241 (1969).
11. J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
12. S. Yu. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **308**, 885 (1988).
13. L. D. McLerran, E. Mottola, and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. D **43**, 2027 (1991).
14. V. V. Braguta and A. Yu. Kotov, Phys. Rev. D **93**(10), 105025 (2016).
15. K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
16. I. Montvay and G. Munster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1997).
17. H. B. Meyer, Eur. Phys. J. A **47**, 86 (2011).
18. G. Aarts, C. Allton, A. Amato, P. Giudice, S. Hands, and J.-I. Skullerud, JHEP **02**, 186 (2015).
19. D. L. Boyda, V. V. Braguta, M. I. Katsnelson, and M. V. Ulybyshev, Phys. Rev. B **94**(8), 085421 (2016).
20. H. B. Meyer, Phys. Rev. D **76**, 101701 (2007).
21. N. Astrakhantsev, V. Braguta, and A. Kotov, JHEP **04**, 101 (2017).
22. N. Yu. Astrakhantsev, V. V. Braguta, and A. Yu. Kotov, JHEP **09**, 082 (2015).
23. H. B. Meyer, Phys. Rev. Lett. **100**, 162001 (2008).
24. N. Yu. Astrakhantsev, V. V. Braguta, and A. Yu. Kotov, <https://arxiv.org/abs/1804.02382>.
25. Z. V. Khaidukov, M. S. Lukashov, and Yu. A. Simonov, <https://arxiv.org/abs/1806.09407>.
26. N. O. Agasian, M. S. Lukashov, and Yu. A. Simonov, Eur. Phys. J. A **53**(6), 138 (2017).
27. M. Kitazawa, T. Iritani, M. Asakawa, T. Hatsuda, and H. Suzuki, Phys. Rev. D **94**(11), 114512 (2016).
28. M. Lüscher, JHEP **08**, 071 (2010) [Erratum: M. Lüscher, JHEP **03**, 092 (2014)].

29. M. Cè, C. Consonni, G. P. Engel, and L. Giusti, *Phys. Rev. D* **92**(7), 074502 (2015).
30. C. Bonati and M. D'Elia, *Phys. Rev. D* **89**(10), 105005 (2014).
31. G. Backus and F. Gilbert, *Geophys. J. Int.* **16**(2), 169 (1968).
32. G. Backus and F. Gilbert, *Philos. Trans. Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **266**(1173), 123 (1970).
33. G. D. Moore and M. Tassler, *JHEP* **02**, 105 (2011).
34. E.-M. Ilgenfritz and H. Panagopoulos, *Phys. Lett. B* **258**, 415 (1991).