

## Клонирование химерных состояний в мультиплексной сети двухчастотных осцилляторов с линейными локальными связями

А. С. Дмитричев<sup>+</sup>, Д. С. Шапин<sup>+1)</sup>, В. И. Некоркин<sup>+\*</sup>

<sup>+</sup>Институт прикладной физики, 603950 Нижний Новгород, Россия

<sup>\*</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 6 июля 2018 г.

После переработки 17 сентября 2018 г.

В работе описывается новый эффект, возникающий в результате кратковременного взаимодействия химерных состояний в мультиплексной сети – клонирование химерных состояний. Эффект наблюдается при объединении в мультиплексную сеть двух кольцевых сетей линейно локально связанных двухчастотных (бистабильных) осцилляторов. При определенных значениях силы и времени межкольцевого (мультиплексного) взаимодействия в кольце, с изначально беспорядочным распределением фаз, формируется копия химерного состояния, наблюдаемого в другом кольце с точностью до значений фаз в некогерентной части. Показано, что эффект является структурно устойчивым и возникает за счет конкуренции автоколебаний, существующих в отдельных кольцах.

DOI: 10.1134/S0370274X18200109

**Введение.** Одним из удивительных явлений, возникающих в самых разнообразных областях естествознания и привлекающих значительное внимание исследователей, является формирование так называемых химерных состояний. В своем классическом определении [1, 2] химерным состоянием принято называть состояние осцилляторной сети, в котором часть осцилляторов сети находится в синхронном состоянии и совершает когерентные колебания, а распределение фаз колебаний других осцилляторов является беспорядочным. В настоящее время существование химерных состояний обнаружено не только в многочисленных теоретических работах (см., например, обзор [3]), но и экспериментально в нейронных структурах мозга [4, 5], механических [6–9], оптических [10, 11], химических [12–16] и радиотехнических [17, 18] системах. Долгое время образование химерных состояний связывали со сложным, нелокальным характером межэлементных связей и большим размером сетей. Однако сравнительно недавно теоретически и экспериментально [19] было установлено, что химерные состояния могут существовать в системах с локальным и даже линейным типом связей. При этом число осцилляторов может варьироваться от нескольких единиц до сотен тысяч, а их динамика быть как регулярной (фазовый осциллятор, предельный цикл), так и хаотической.

В настоящее время наибольшее внимание исследователей привлекают проблемы взаимодействия химерных состояний. Исследования базируются на различных аспектах теории синхронизации. Обнаружены эффекты обобщенной синхронизации химерных состояний [20], синхронизация химерных состояний в ансамблях с несимметричными связями [21], синхронизация химерных состояний в мультиплексных сетях с задержками [22], синхронизация химерных состояний в модульных сетях [23], исследовано взаимодействие химерных состояний с полностью когерентными или полностью некогерентными состояниями [24] и др. Отметим, что в известных к настоящему времени работах в результате взаимодействия происходит формирование новых состояний по сравнению с исходными химерными состояниями.

В этой работе мы описываем новое и необычное явление, происходящее в мультиплексной двухкольцевой сети, архитектура которой представлена на рис. 1а. Каждое кольцо представляет собой сеть локально и линейно связанных двухчастотных (бистабильных) осцилляторов. При отсутствии связи между кольцами их параметры выбираются такими, что в одном из колец (для определенности в первом) существует химерное состояние, а в другом (для определенности во втором) реализуется фазовый беспорядок. Мы установили, что в результате даже кратковременного взаимодействия таких колец беспорядочное состояние достаточно быстро преобразуется в химерное состояние. Это состояние имеет такое же

<sup>1)</sup>e-mail: shapinds@mail.ru

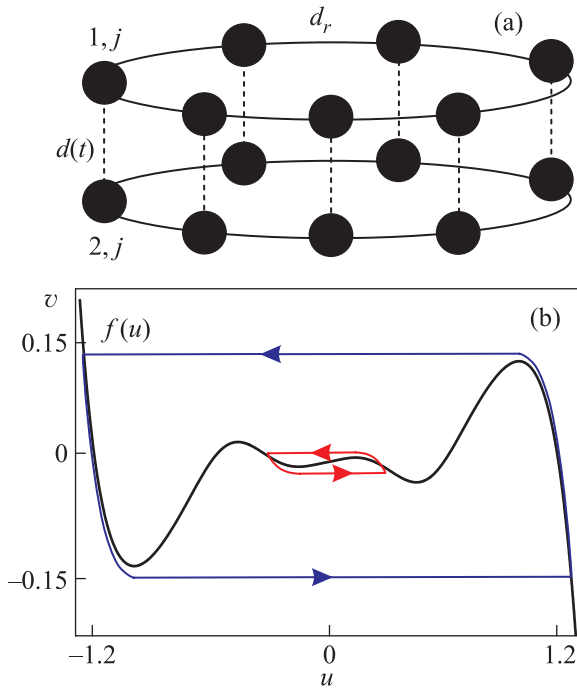


Рис. 1. (Цветной онлайн) Архитектура (a) и фазовая плоскость локального осциллятора (b) мультиплексной сети

распределение фаз в когерентной части, а также одни и те же распределения средних частот и амплитуд, как в изначальном химерном состоянии. Мы назвали это явление *клонированием* химерных состояний и показали, что этот эффект не связан с процессом синхронизации, а возникает достаточно быстро в результате конкуренции автоколебаний.

**Модель.** Динамика рассматриваемой мультиплексной сети описывается следующей системой:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{du_{i,j}}{dt} &= f(u_{i,j}) - v_{i,j} + \\
 &+ d_r(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) + d(u_{i+1,j} - u_{i,j}), \\
 \frac{dv_{i,j}}{dt} &= u_{i,j}, \\
 d(t) &= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ d_c, & 0 < t \leq T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \\
 j &= \overline{1, N}, u_{i, N+1} \equiv u_{i, 1}, i = \overline{1, 2}, u_{3,j} \equiv u_{1,j},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где функция  $f(u) = -u(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2)$ , параметры, контролирующие динамику колец, далее для определенности будут зафиксированы:  $a = 0.32, b = 0.79, c = 1.166, \varepsilon = 0.001, d_r = 0.006$ , а параметры  $d_c > 0$  и  $T_c > 0$ , контролирующие соответственно силу и время межкольцевого взаимодействия, будем рассматривать как контрольные. Если осцилля-

торы не взаимодействуют,  $d_r = d_c = 0$ , то динамика каждого из них описывается уравнениями второго порядка. На фазовой плоскости  $(u, v)$  существуют два устойчивых предельных цикла “малой” и “большой” амплитуды (см. рис. 1b), области притяжения которых разделяет неустойчивый предельный цикл, а в начале координат  $(u = 0, v = 0)$  расположено неустойчивое состояние равновесия. Таким образом, осциллятор может находиться либо в режиме низкоамплитудных колебаний с безразмерной частотой 0.0039, либо, если взять начальные условия “снаружи” неустойчивого цикла, в режиме высокоамплитудных колебаний с частотой 0.0021. В нашей предыдущей статье [19] мы показали, что при выбранных параметрах в изолированном кольце системы (1) существуют различные химерные состояния.

В численных экспериментах мы использовали два метода интегрирования системы (1). Первый – достаточно быстрый метод Рунге–Кутты 4–5-го порядка [25]. Второй – не такой быстрый, но достаточно точный – метод Гира пятого порядка [25], который применялся для проверки результатов полученных первым методом. Точность результатов этих методов контролируется автоматически и соответственно ей выбирается шаг интегрирования.

**Клонирование химерных состояний.** Рассмотрим методику клонирования химерных состояний на примере мультиплексной системы из  $N = 7$  осцилляторов в каждом кольце.

*Начальное состояние невзаимодействующих колец.* Пусть при  $d_c = 0$ , т.е. при отсутствии взаимодействия между кольцами, в первом кольце (рис. 1a) начальные условия выбраны таким образом, что в нем реализуется химерное состояние, обладающее следующими свойствами. Когерентное состояние образовано двумя первыми осцилляторами  $j = 1, 2$  (они имеют одинаковые мгновенные фазы, средние частоты и амплитуды), а характеристики осцилляторов  $j = \overline{3, 7}$  различны (см. рис. 2a, распределения, отмеченные индексом 1). Во втором кольце (рис. 1a) при  $d_c = 0$  сформировано, за счет выбора начальных условий, состояние, при котором фазы осцилляторов распределены в кольце беспорядочно, в то же время частоты и амплитуды близки к характеристикам изолированного осциллятора в режиме низкоамплитудных колебаний (см. рис. 2a, распределения, соответствующие индексу 2).

*Взаимодействие колец и формирование клона.* Пусть теперь  $d_c \neq 0$  и кольца начинают взаимодействовать в течение некоторого времени  $T_c$ . На рисунке 3b приведены результаты такого взаимодействия при  $d_c = 0.06, T_c = 500$ . Они показывают, что в пер-

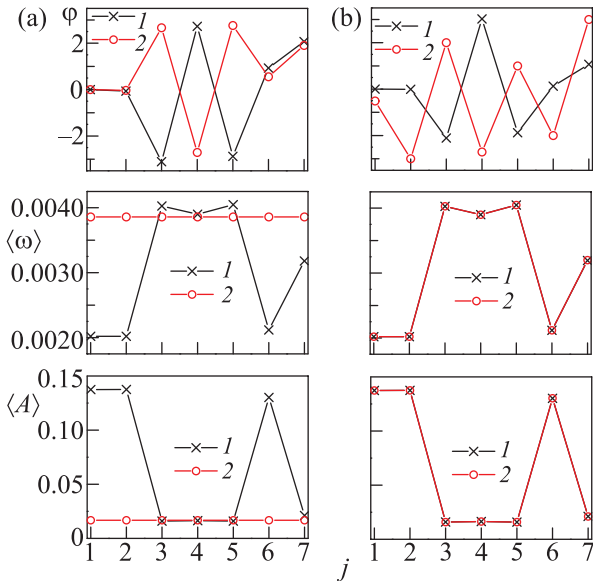


Рис. 2. (Цветной онлайн) Значения мгновенных фаз, средних частот и амплитуд в первом (“1”) и втором (“2”) кольцевых ансамблях из семи осцилляторов, соответственно: в начальный момент (а) и после взаимодействия (б). Значения параметров  $d_c = 0.06$  и  $T_c = 500$

вом кольце сохранилось химерное состояние, которое было до взаимодействия. Во втором кольце возникли такие же распределения средних частот и амплитуд, что и в первом кольце. Кроме того, фазы первого и второго элементов ( $j = 1, 2$ ) в обоих кольцах тоже совпали. Таким образом, во втором кольце сформировалась копия химерного состояния первого кольца с точностью до значений фаз в некогерентной части. Отметим, что по определению в химерном состоянии, мгновенные значения фаз некогерентной части должны быть беспорядочными, а принципиальное значение для некогерентной части имеют интегральные характеристики, например, средние частоты и амплитуды. Поэтому, на наш взгляд, для эффекта клонирования химерных состояний совпадение фаз некогерентных частей не является обязательным. Заметим, что время взаимодействия  $T_c = 500$  составляет менее одного периода парциальных колебаний и, следовательно, клонирование не связано с процессом синхронизации.

**Структурная устойчивость клонирования.**

Рассмотрим, как на клонирование влияет изменение параметров и начальных условий. Для этого нам потребуется проводить сравнение состояний, возникающих в мультиплексной системе (1) с исходным химерным состоянием. В связи с этим мы введем в рассмотрение еще одно изолированное кольцо, которое будем называть эталонным и присвоим ему индекс

“0”. Сформируем в эталонном кольце химерное состояние с теми же характеристиками, что и у изначальной химеры в первом кольце до взаимодействия. Оценивать близость химерных состояний мы будем, сравнивая в первую очередь распределения фаз когерентных частей химерных состояний и, в случае их совпадения, вычислять ошибки клонирования:

$$\omega_{\text{err}}^i = \max_{1 \leq j \leq 7} \left| \frac{\langle \omega_{i,j} \rangle - \langle \omega_{0,j} \rangle}{\langle \omega_{0,j} \rangle} \right|,$$

$$A_{\text{err}}^i = \max_{1 \leq j \leq 7} \left| \frac{\langle A_{i,j} \rangle - \langle A_{0,j} \rangle}{\langle A_{0,j} \rangle} \right|,$$

где индекс  $i = 1, 2$ ,  $\langle \omega_{i,j} \rangle, \langle A_{i,j} \rangle$  – это средние частоты и амплитуды осцилляторов  $j$  в  $i$ -ом кольце,  $\langle \omega_{0,j} \rangle, \langle A_{0,j} \rangle$  – в эталонном кольце.

Рассмотрим сначала, как на клонирование влияет вариация параметра  $d_c$ . На рисунке 3 для фиксированного значения времени  $T_c$  представлены зависи-

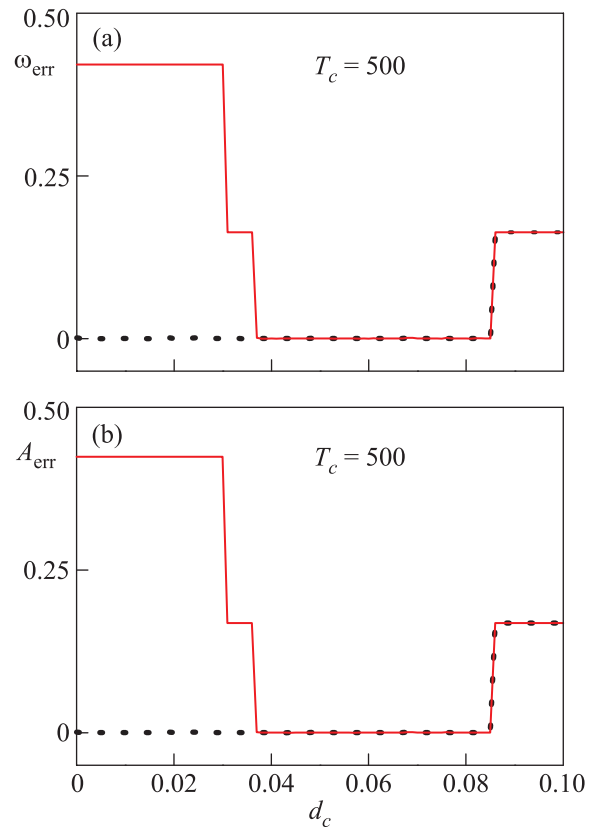


Рис. 3. (Цветной онлайн) Разница средних частот (а) и амплитуд (б) кольцевых ансамблей из семи осцилляторов. Пунктирной (черной) линией изображены  $\omega_{\text{err}}^1$  и  $A_{\text{err}}^1$ , а сплошной (красной) –  $\omega_{\text{err}}^2$  и  $A_{\text{err}}^2$

мости  $\omega_{\text{err}}^i$  и  $A_{\text{err}}^i$  от параметра  $d_c$ . Существуют три характерных интервала значений параметра  $d_c$ . При

$d_c < 0.037$  клонирование не происходит, поскольку средние частоты и амплитуды осцилляторов второго кольца после взаимодействия существенно отличаются от средних частот и амплитуд нулевого и первого кольца (см. рис. 3 и 4а), а вот разница средних

бора фиксированных значений  $T_c$  будем искать, используя изложенную выше методику, величину интервала  $d_c$ , при котором клонирование происходит для 1000 случайных распределений начальных фаз второго кольца. На рисунке 5а для  $T_c = 300$  представлены результаты такого исследования, которые показывают существование интервала значений параметра  $d_c$ , соответствующего клонированию химерных состояний с вероятностью, равной единице. Аналогично устанавливаем существование интервалов клонирования и для других  $T_c$ . В результате на плоскости параметров  $(T_c, d_c)$  выделяется область  $D_{cl}$  (на рис. 5b область показана черным цветом), для точек

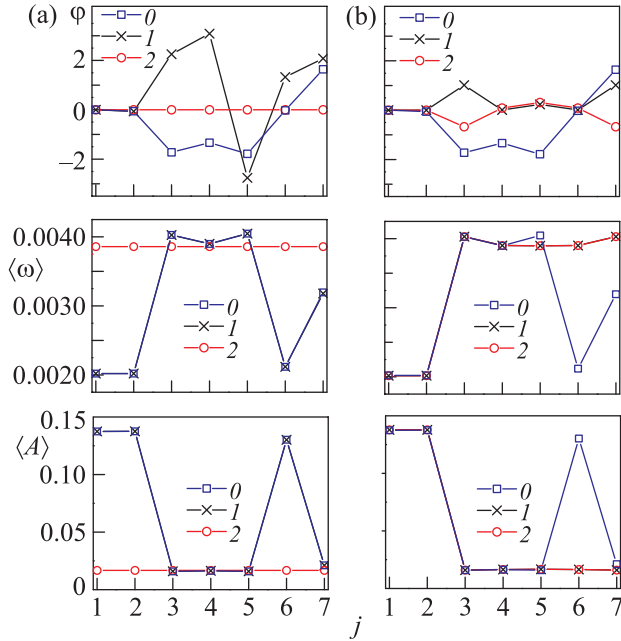


Рис. 4. (Цветной онлайн) Значения мгновенных фаз, средних частот и амплитуд в нулевом (“0”), первом (“1”) и втором (“2”) кольцевых ансамблях из семи осцилляторов, соответственно, для значений параметра  $d_c = 0.02$  (а) и  $d_c = 0.09$  (б), при времени  $T_c = 500$

частот и амплитуд осцилляторов нулевого и первого кольца фактически отсутствует (менее 0.001%). Для этих значений  $d_c$  во втором кольце все осцилляторы находятся в режиме низкоамплитудных колебаний с одинаковой частотой. При этом осцилляторы нулевого и первого кольца имеют одинаковые усредненные характеристики, а их когерентные части имеют равные мгновенные значения фаз. При  $d_c > 0.085$  эффекта клонирования тоже не происходит. В этом случае существует большая разница средних частот и амплитуд обоих колец относительно нулевого кольца (см. рис. 3 и 4б).

Другими словами, в первом и втором кольцах после взаимодействия устанавливаются режимы колебаний с одинаковыми усредненными характеристиками, но которые существенно отличающимися от химерного состояния в эталонном кольце. Таким образом, клонирование химер (3) происходит только для интервала  $0.037 \leq d_c \leq 0.085$ .

Рассмотрим теперь, как на клонирование влияет длительность времени взаимодействия  $T_c$ . Для на-

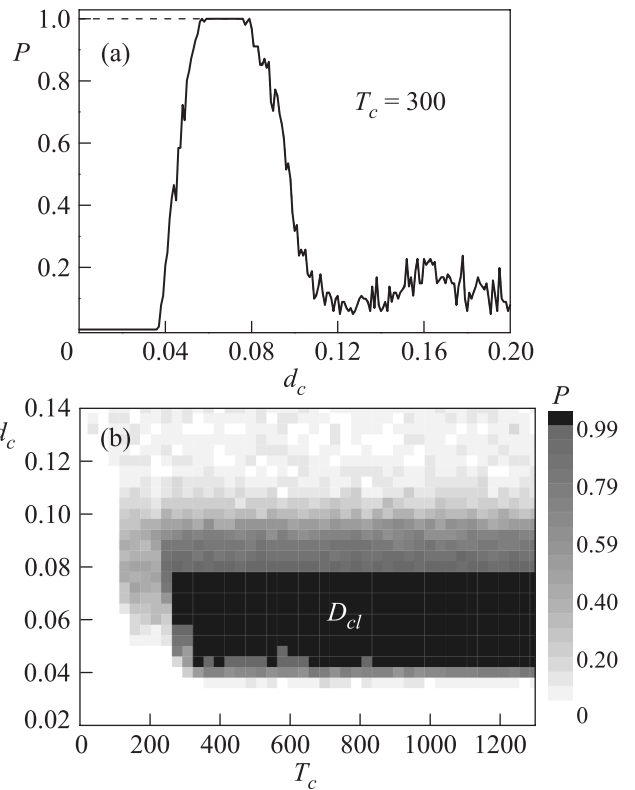


Рис. 5. Зависимость вероятности клонирования (а) от параметра  $d_c$  и область клонирования  $D_{cl}$  (б) на плоскости параметров  $(T_c, d_c)$

которой клонирование происходит с вероятностью, равной единице. Область, отмеченная в градациях серого, отвечает параметрам, при которых клонирование происходит с некоторой вероятностью, т.е. наблюдается только для некоторых начальных условий во втором кольце. Белый цвет на рис. 5b отвечает параметрам, при которых клонирование химерных состояний не происходит. Представленные на рис. 5 результаты показывают, что эффект клонирования наблюдается на временах взаимодействия, меньших

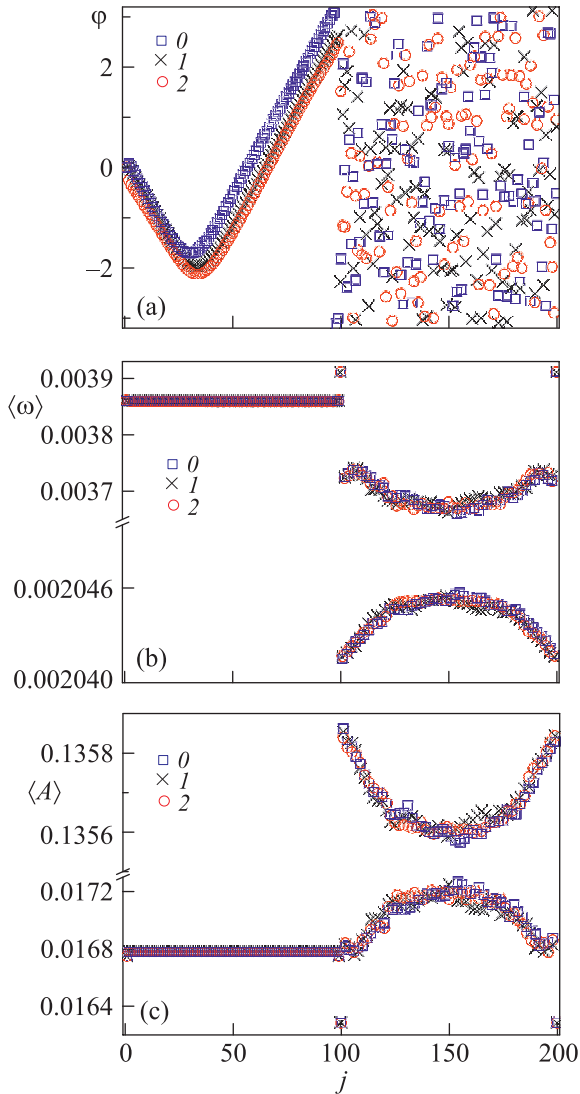


Рис. 6. (Цветной онлайн) Значения мгновенных фаз, средних частот и амплитуд в нулевом (“0”), первом (“1”) и втором (“2”) кольцевых ансамблях из 200 осцилляторов после клонирования. Значения параметров  $d_c = 0.06$ ,  $T_c = 1000$

минимального собственного периода изолированного осциллятора (собственные частоты 0.0039 и 0.0021, и отвечающие им собственные периоды 256 и 476). В частности, минимальное время взаимодействия, при котором происходит клонирование при любых начальных условиях, равно  $T_c = 270$ , а полностью этот эффект пропадает лишь при  $T_c < 100$ . Таким образом, эффект не связан с процессом синхронизации, а возникает на малых временах в результате конкуренции автоколебаний. Отметим, что клонирование имеет место и для больших, чем  $T_c = 1300$  значений, но на рис. 5b эта часть области  $D_{cl}$  не изображена, поскольку при  $T_c > 1300$  она не меняется.

Отметим, что рассмотренный эффект клонирования наблюдается не только в малых сетях. Мы также наблюдали эффект клонирования химерных состояний и в мультиплексных сетях с большим числом осцилляторов, что говорит о том, что данный эффект является грубым и его существование не связано с малыми размерами мультиплексной системы. На рисунке 6 приведен пример клонирования химерного состояния в системе  $N = 200$  осцилляторов.

**Заклучение.** Представлен новый эффект – клонирование химерных состояний в мультиплексной системе из двух колец, возникающий при взаимодействии химерного состояния с состоянием, имеющим в начальный момент беспорядочное распределение фаз. Показано, что результатом такого, достаточно короткого, взаимодействия является сохранение изначального состояния в одном из колец и появление химерного состояния с такими же характеристиками в другом кольце. Установлено, что эффект клонирования химерных состояний существует в большой области параметров и наблюдается для широкого класса случайных начальных условий, т.е. клонирование является структурно устойчивым эффектом и возникает за счет конкуренции автоколебаний существующих в отдельных кольцах.

Мы надеемся, что эффект клонирования может помочь продвинуться в понимании хранения и обработки таких сложных состояний, как химерные в различных приложениях, в том числе, при исследовании состояний нейронной активности мозга.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 14-12-01358).

1. Y. Kuramoto and D. Battogtokh, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* **5**, 380 (2002).
2. D. M. Abrams and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 174102 (2004).
3. E. Schöll, *The European Physical Journal Special Topics* **225**, 891 (2016).
4. L. M. Mukhametov, A. Y. Supin, and I. G. Polyakova, *Brain Res.* **134**, 581 (1977).
5. O. I. Lyamin, P. R. Manger, S. A. Ridgway, L. M. Mukhametov, and J. M. Siegel, *Neurosci. Biobehav. Rev.* **32**, 1451 (2008).
6. E. A. Martens, S. Thutupallic, A. Fourrierec, and O. Hallatschek, *PNAS* **110**, 10563 (2013).
7. T. Kapitaniak, P. Kuzma, J. Wojewoda, K. Czolczynski, and Y. Maistrenko, *Sci. Rep.* **4**, 6379 (2014).
8. J. Wojewoda, K. Czolczynski, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, *Sci. Rep.* **6**, 34329 (2016).
9. D. Dudkowski, J. Grabski, J. Wojewoda, P. Perlikowski, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, *Sci. Rep.* **6**, 29833 (2016).

10. A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hovel, I. Omelchenko, and E. Schöll, *Nature Phys.* **8**, 658 (2012).
11. L. Larger, B. Penkovsky, and Y. Maistrenko, *Nat. Commun.* **6**, 7752 (2015).
12. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, *Nat. Phys.* **8** 662 (2012).
13. L. Schmidt, K. Schönleber, K. Krischer, and V. Garcia-Morales, *Chaos* **24**, 013102 (2014).
14. M. Wickramasinghe and I. Z. Kiss, *PLOS ONE* **8**, e80586 (2013).
15. M. Wickramasinghe and I. Z. Kiss, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **16**, 18360 (2014).
16. A. G. Smart, *Phys. Today* **65**, 17 (2012).
17. L. Larger, B. Penkovsky, and Y. Maistrenko, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 054103 (2013).
18. L. V. Gambuzza, A. Buscarino, S. Chessari, L. Fortuna, R. Meucci, and M. Frasca, *Phys. Rev. E* **90**, 032905 (2014).
19. D. S. Shchapin, A. S. Dmitrichev, and V. I. Nekorkin, *JETP Lett.* **106**(9), 617 (2017).
20. R. G. Andrzejak, G. Ruzzene, and I. Malvestio, *Chaos* 2017 **27**(5), 053114 (2017); doi: 10.1063/1.4983841.
21. C. Tian, H. Bi, X. Zhang, S. Guan, and Z. Liu, *Phys. Rev. E* **96**, 052209 (2017).
22. S. Majhi, M. Perc, and D. Ghosh, *Chaos* **27**(7), 073109 (2017).
23. S. R. Ujjwal, N. Punetha, and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E* **93**(1), 012207 (2016).
24. V. A. Maksimenko, V. V. Makarov, B. K. Bera, D. Ghosh, S. K. Dana, M. V. Goremyko, N. S. Frolov, A. A. Koronovskii, and A. E. Hramov, *Phys. Rev. E* **94**(5), 052205 (2016).
25. M. T. Heath, *Scientific Computing: An Introductory Survey*, McGraw-Hill, N.Y. (2002).