

Трехмерное численное моделирование долгоживущих квантовых вихревых узлов и зацеплений в захваченном бозе-конденсате

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 19 сентября 2018 г.

После переработки 21 сентября 2018 г.

Численно в рамках трехмерного уравнения Гросса–Питаевского промоделирована динамика простейших вихревых узлов, “не-узлов” и зацеплений торического типа в атомном бозе-конденсате, находящемся при нуле температуры в анизотропной гармонической ловушке. Обнаружено, что время существования таких квазистационарно вращающихся вихревых структур оказывается весьма долгим в широких областях значений параметров системы. Этот новый результат находится в качественном соответствии с ранее сделанным предсказанием, основанным на упрощенной одномерной модели, которая приближенно описывает движение заузленных вихревых нитей.

DOI: 10.1134/S0370274X18210075

Введение. Одним из важных направлений в теории холодных бозе-конденсированных атомных газов является изучение динамики и статики квантованных вихревых нитей (см. обзор [1] и цитируемую там литературу). Принято различать вихревые кольца (т.е. замкнутые вихри с простой топологией), собственно вихревые нити в узком смысле слова (когда концы вихрей начинаются и заканчиваются на поверхности конденсатного облака), а также топологически нетривиальные конфигурации – вихревые узлы и зацепления. Сильное влияние на поведение системы оказывает то обстоятельство, что конденсат находится во внешнем потенциале ловушки, и потому движение вихрей происходит на резко неоднородном пространственном фоне плотности $\rho(\mathbf{r})$, и в весьма ограниченном объеме. Практически, отношение размеров системы (конденсатного облака) к характерной ширине кора вихря не превышает нескольких десятков. В этом смысле задача сильно отличается, например, от проблемы квантовой вихревой турбулентности в гелии-II, где указанное отношение может достигать восьми порядков, а фоновая плотность сверхтекучей жидкости с высокой точностью однородна. Для бозе-конденсатов небольшого размера интерес представляют долгоживущие конфигурации с одним или несколькими вихрями. Если по поводу вихревых колец и нитей в неоднородных конденсатах проведены многочисленные исследования (см., например, [2–23]), то динамика вихревых узлов до сих пор изучалась в основном при одно-

родной плотности (см. [24–32] и ссылки там). Экспериментальная методика по приготовлению узлов и зацеплений в конденсатах также пока не разработана. Только совсем недавно в работе [33] на основе длинноволнового гидродинамического приближения (в пренебрежении потенциальными возмущениями) были теоретически рассмотрены простейшие вихревые узлы в захваченных осесимметричных конденсатах. Форма каждого такого узла в цилиндрических координатах описывается комплекснозначной, $2\pi P$ -периодической по азимутальному углу φ функцией $A(\varphi, t) = Z(\varphi, t) + iR(\varphi, t)$. Было сделано предсказание, что если максимум функции $r\rho(z, r)$ в цилиндрических координатах локально изотропен [матрица вторых производных в точке экстремума (Z_*, R_*) пропорциональна единичной матрице 2×2], а параметр локальной индукции велик, $\Lambda = \ln(R_*/\xi_*) \gg 1$ [где ξ_* – ширина кора вихря, соответствующая равновесной плотности $\rho_* = \rho(Z_*, R_*)$], то в таком конденсате достаточно “малоамплитудные” торические вихревые узлы должны быть устойчивыми. Применимость теории ограничена условиями

$$\xi_* \ll |A_n - A_m| \ll R_*, \quad |A_n - A_*| \ll R_*, \quad (1)$$

где $A_n(\varphi, t) = A(\varphi + 2\pi n, t)$, $n = 0, 1, \dots, P - 1$. Выберем масштаб длин и начало координат так, чтобы было $R_* = 1$, $Z_* = 0$. Предсказание об устойчивости простейших торических узлов следует из приближенной системы уравнений, которой подчиняется динамика функций $W_n(\varphi, t) = \sqrt{\Lambda}(A_n - i)$ в случае,

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

когда упомянутая матрица вторых производных равна $-\text{Diag}(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ (см. подробный вывод в [33]):

$$\frac{i}{\Lambda} W_{n,t} = -\frac{1}{2} [W_{n,\varphi\varphi} + \alpha W_n - \epsilon W_n^*] - \sum_{j \neq n} \frac{1}{W_n^* - W_j^*}. \quad (2)$$

Эта же система, но с другими граничными условиями при $\varphi = 0$ и 2π , способна описывать движение и нескольких вихревых нитей с полным числом P оборотов вокруг оси z . Можно проверить, что в случае $\epsilon = 0$ при $P \leq 6$ все решения вида

$$A_n = i + C_0 \exp(i\alpha\Lambda t/2) + B_0 \exp\left(\frac{2\pi i n}{P} + \frac{iQ}{P}\varphi - it\Omega(Q, P, B_0)\right), \quad (3)$$

с постоянными B_0 и C_0 , являются устойчивыми. При $C_0 = 0$ такие решения соответствуют стационарно вращающимся торическим узлам – если целые числа Q и P взаимно простые, “не-узлам” (“unknots”) – если $|Q| = 1$, либо зацеплениям – когда Q и P имеют общие множители. При отличных от нуля ϵ в плоскости параметров (α, B_0) появляются полосы неустойчивости, узкие в меру малости ϵ .

Ясно, что в действительности картина не может быть столь идеальной, особенно в случае не слишком больших значений Λ и при учете поправок, не вошедших в уравнения (2). Кроме того, не следует забывать, что вихри взаимодействуют с потенциальными степенями свободы. Поэтому максимум, на что можно рассчитывать в захваченном конденсате, – это достаточно долгое, но все же конечное время жизни вихревых узлов и зацеплений в квазистационарном режиме. Возможность существования долгоживущих вихревых структур указанного типа в реальных бозе-конденсатах представляется гипотезой, заслуживающей серьезного внимания. Целью данной работы является ее численная проверка в рамках уравнения Гросса–Питаевского как более точной трехмерной модели разреженного бозе-газа при нуле температуры. Насколько известно автору, в отличие от пространственно однородных систем, прямое трехмерное моделирование торических вихревых узлов и зацеплений в захваченном конденсате ранее не проводилось.

Численный метод. Пусть для простоты потенциал ловушки квадратичен. Тогда надлежащим образом обезразмеренное уравнение Гросса–Питаевского для конденсатной волновой функции имеет вид

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \frac{1}{\xi^2}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + az^2) - \frac{3}{2} + |\psi|^2\right]\psi. \quad (4)$$

Здесь присутствуют всего два безразмерных параметра – анизотропия ловушки a и малая относительная ширина кора вихря $\xi \ll 1$. Заметим, что внутри конденсата имеет место приближенное равенство

$$\rho(z, r) \approx 3/2 - (r^2 + az^2)/2. \quad (5)$$

Условной границей конденсата является эллипсоид $r^2 + az^2 = 3$. Вычисление вторых производных для $r\rho(z, r)$ в точке $Z_* = 0$, $R_* = 1$ дает $\alpha = (3 + a)/2$, $\epsilon = (3 - a)/2$, т. е. параметр ϵ равен нулю при $a = 3$. Это соответствует сплюснутому облаку с отношением размеров $1/\sqrt{3}$.

Уравнение (4) моделировалось численно с однородным пространственным разрешением 256^3 точек в кубической области $(2\pi/1.6)^3$ с центром в начале координат и периодическими граничными условиями. Указанный размер куба ($L \approx 4$) обеспечивал достаточное спадание амплитуды волновой функции вблизи его границы и в то же время конденсат с поперечным размером $2\sqrt{3} \approx 3.5$ занимал значительную часть вычислительной области. Таким образом, расстояние между узлами решетки было около $1/60$. Поскольку на длину ξ должно приходиться достаточное число узлов решетки, а с другой стороны, ξ обязана быть мала для возможности сопоставления результатов с аналитической теорией, бралось значение $1/\xi^2 = 200 \cdot 2.56$, что соответствует $\xi \approx 1/22.5$ и параметру локальной индукции $\Lambda \approx 3$.

Для продвижения по времени использовался широко применяемый в подобных системах фурье-метод расщепленного шага (*Split-Step Fourier Method*) второго порядка аппроксимации. Гамильтониан системы и ее интеграл волнового действия сохранялись с точностью до 4-х десятичных знаков на протяжении времени моделирования $T_{\text{sim}} > 30$.

В качестве начальной формы вихря бралось выражение (3) с $t = 0$, $C_0 = 0$ и с добавлением небольших азимутальных возмущений к B_0 :

$$B_0 \longrightarrow B_0 + 0.002 \sum_{m=1}^5 \cos(m\varphi + \gamma_m), \quad (6)$$

где $\gamma_{1,2,3,4,5} = 3, 5, 8, 13, 21$. Эти возмущения нарушают симметрию и служат дополнительными “зародышами” для развития возможных неустойчивостей.

Кроме того, компьютерные вычисления показали, что для обеспечения режима квазистационарности лучше вместо первого слагаемого i в правой части (3) брать меньшую величину, примерно $0.9i$. Это соответствует меньшему радиусу тора, чем предсказывает теория. По всей видимости, уменьшение равновесного радиуса связано со смещением максимуму

ма функции $\Lambda(z, r)r\rho(z, r)$, описывающей энергию сососного вихревого кольца, причем множитель $\Lambda(z, r)$ при умеренных значениях $\Lambda \sim 3$ уже не может полагаться почти константой, как это делалось при выводе приближенных уравнений (2).

Чтобы задать начальное комплексное поле $\psi_0 = \psi(x, y, z, t = 0)$, по возможности не содержащее потенциальных возмущений (которые сильно нарушали бы фон плотности в дальнейшем), но содержащее только вихрь, использовалась специальная процедура. На первом ее этапе ψ_0 задавалась более-менее подходящей аналитической формулой, которая грубо соответствует условию $|\psi_0|^2 \approx 3/2 - (r^2 + az^2)/2$ и точно соответствует наличию особенности фазы — вихревого узла заданной конфигурации. Пространственное же распределение фазы, разумеется, было далеко от оптимального. На втором этапе процедуры на некоторое время запускалась чисто диссипативная эволюция, которая состояла в замене $i \rightarrow -1$ в левой части уравнения (4). При этом в правой части к гармоническому потенциалу ловушки добавлялся фиктивный короткодействующий (пиннингующий) потенциал вблизи линии вихря, который препятствовал уходу вихря с заданной кривой. За счет диссипативного этапа достигалось значительное уменьшение амплитуд жестких потенциальных мод системы на основном ее масштабе, неизбежно возбужденных в результате использования вышеупомянутой достаточно произвольной аналитической формулы. После этого время обнулялось и включалась консервативная динамика в соответствии с уравнением (4).

Для визуализации формы вихря в процессе его движения (через определенные промежутки времени) записывались координаты всех тех узлов решетки внутри эллипсоида $3/2 - (r^2 + az^2)/2 = 0.3$, в которых $|\psi|^2 < 0.05$. Ясно, что такие точки находятся внутри кора вихря. По ним анализировалась динамика и делались рисунки, подобные рис. 1.

Результаты. Численные эксперименты были проведены для пар $(P, Q) = (2, 3)$ — узел-трилистник, $(2, 2)$ — простейшее зацепление двух колец и для $(2, 1)$ — не-узел, представляющий собой сложенную вдвое окружность. Значения a брались из набора $\{1.4, 2.0, 2.5, 3.0\}$, а параметр B_0 — из набора $\{0.09, 0.12, 0.15, 0.18, 0.21\}$. Квазистационарный режим в динамике трилистника особенно четко наблюдался при $a = 2.5$, $B_0 = 0.18$. В этом случае эксперимент завершился при $T_{\text{sim}} = 90$, причем признаки развития неустойчивости все еще отсутствовали. Вполне вероятно, что при продолжении время жизни достигло бы нескольких сотен. Для за-

цепления двух колец большое время жизни отмечено при $a = 2.5$, $B_0 = 0.18$, а для не-узла — при $a = 2.5$, $B_0 = 0.21$. В двух последних случаях существенной деформации не наблюдалось в момент завершения при $T_{\text{sim}} = 30$. Но и во многих других численных экспериментах деформация вихрей нарастала достаточно медленно, так что достигалось большое время жизни $T_{\text{lif}} \gtrsim 25$ (см. два примера на рис. 1.) Для сравнения — характерное время оборота вихрей $\tau \approx 4\pi B_0^2 \lesssim 0.4$. Надо иметь в виду, что пока еще далеко не все возможные комбинации параметров были перепробованы, поскольку трехмерное моделирование происходит весьма небыстро — несколько дней на один прогон. Понятно, что такое исследование не может считаться исчерпывающим. Более детальная проработка параметрической плоскости (a, B_0) для каждого типа вихревых структур потребует массивованных вычислений с мелким шагом по параметру B_0 . По крайней мере, о необходимости мелкого шага порядка $\Delta B_0 \sim 0.001$ свидетельствует опыт изучения неустойчивостей вихревых узлов и зацеплений в однородной сверхтекучей жидкости [31, 32].

В целом результаты компьютерного моделирования подтвердили возможность существования долгоживущих квантовых вихревых узлов и зацеплений в модели Гросса-Питаевского с квадратичным внешним потенциалом. В деталях, однако, были отмечены некоторые различия между приближенной теорией и численным экспериментом. Кроме уменьшения среднего радиуса квазистационарного тора, о чем упоминалось ранее, фактические параметры α и ϵ также изменились, в результате чего иногда даже при $a = 3$ наблюдалась неустойчивость (например, при $B_0 = 0.15$ и 0.09 в случае трилистника). Зато при $a \neq 3$ вихри часто были вполне долгоживущими, хотя на них и могли появляться с течением времени возбуждения в виде волн Кельвина. И, разумеется, во всех случаях имели место потенциальные движения в конденсате, выглядящие как дрожащая рябь на статическом фоне плотности.

Развитие неустойчивости на примере зацепления двух колец проиллюстрировано на рис. 2. Деформация неустойчивых вихрей сначала постепенно нарастает, а затем они пересоединяются. Поскольку основной целью данной работы был поиск квазистационарных структур, и развитие неустойчивости в этом смысле является отрицательным результатом, мы не описываем здесь все подробности процесса пересоединения. Скажем лишь, что дальнейшая эволюция довольно быстро (а иногда — со значительной задержкой) приводит к

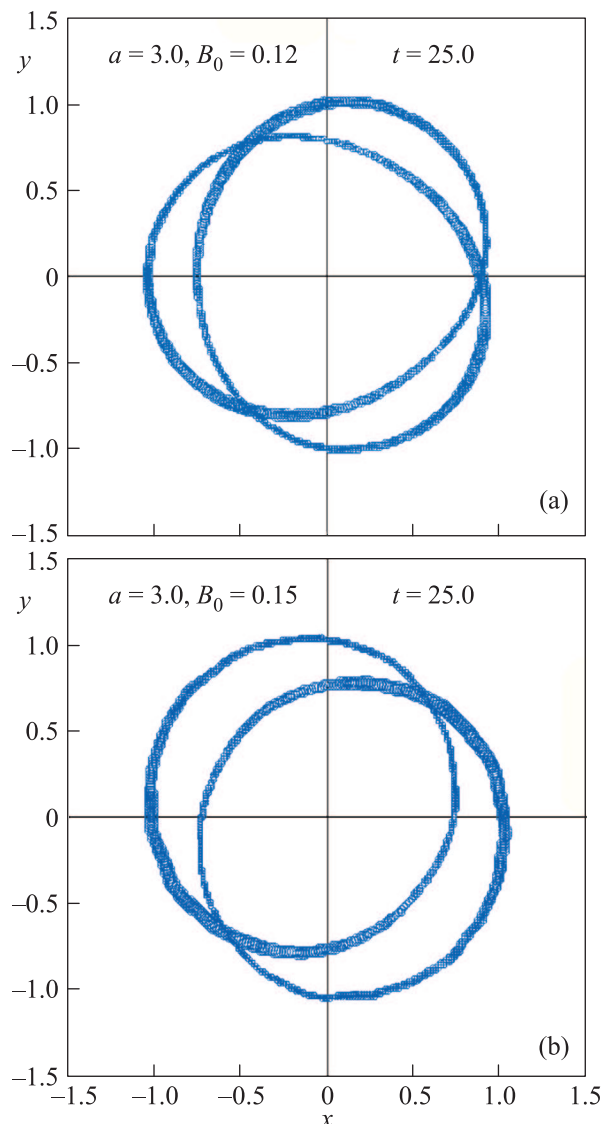


Рис. 1. (Цветной онлайн) Проекция квазиустойчивых вихревых структур на плоскость (x, y) в случае $a = 3.0$ при достаточно большом t : (a) – узел-трилистник; (b) – простейшее зацепление двух колец. Каждый рисунок состоит из многих маленьких окружностей с центрами в найденных численно точках решетки внутри кора вихря. С целью однозначного определения топологии вихревой структуры, радиус каждой такой окружности сделан тем большим, чем больше значение соответствующей z -координаты

выходу некоторых участков вихрей на поверхность, разрыву и образованию вихревых нитей. Возможен также сценарий, когда разрыв вихря на поверхности случается еще до внутреннего перезамыкания. Затем нити уменьшаются в длине за счет взаимодействия с потенциальными степенями свободы, вырождаются в полукольца и в конце концов покидают конденсат.

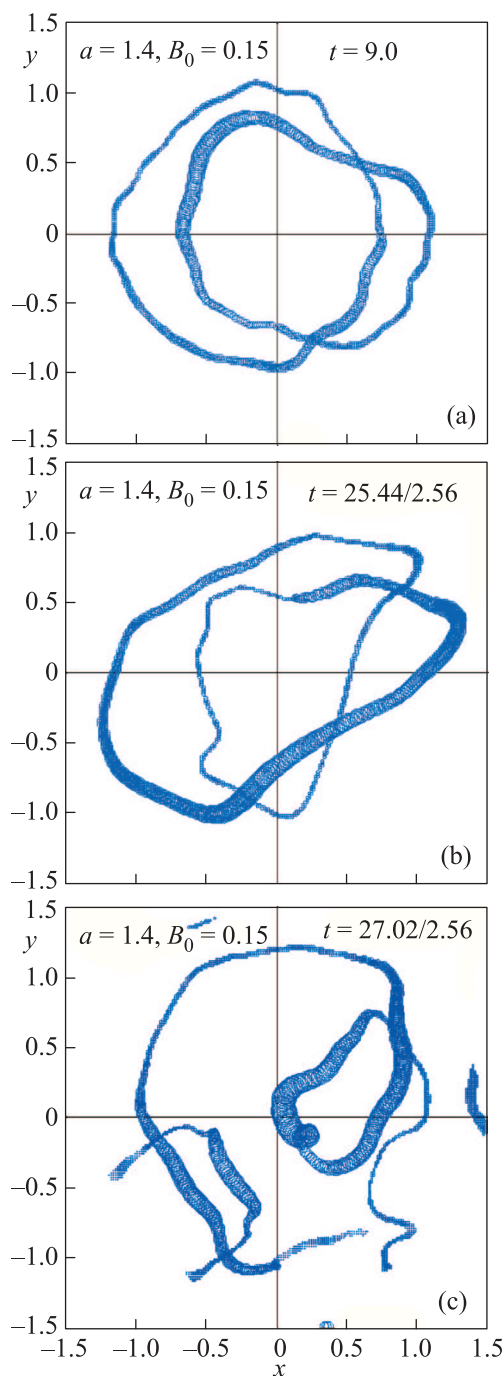


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зацепление двух колец в случае $a = 1.4$ оказалось неустойчивым. (a) – Сильная деформация. (b) – Изменение топологии в результате пересоединения. (c) – Образование вихревых нитей с концами на поверхности конденсата

Ввиду подобного стремления вихрей к выходу из конденсатного облака найденные долгоживущие квазистационарные структуры представляются даже еще более нетривиальными объектами.

Заклучение. Проведенные в данной работе численные эксперименты со всей определенностью свидетельствуют в пользу ранее выдвинутой гипотезы о возможности длительного существования квазистационарных топологически нетривиальных вихревых структур в захваченных бозе-конденсатах. Более подробное выяснение границ областей устойчивости потребует дальнейших массивованных вычислений. Заметим еще, что при $P \geq 3$ далеко не все узлы сводятся к торическим, так что задача на будущее – найти долгоживущие конфигурации среди таких узлов, как “восьмерка”, “бабий узел” и др.

1. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
2. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
3. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, R135 (2001).
4. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
5. A. Aftalion and T. Riviere, *Phys. Rev. A* **64**, 043611 (2001).
6. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **64**, 053611 (2001).
7. A. Aftalion and R. L. Jerrard, *Phys. Rev. A* **66**, 023611 (2002).
8. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
9. A. Aftalion and I. Danaïla, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
10. A. Aftalion and I. Danaïla, *Phys. Rev. A* **69**, 033608 (2004).
11. I. Danaïla, *Phys. Rev. A* **72**, 013605 (2005).
12. A. Fetter, *Phys. Rev. A* **69**, 043617 (2004).
13. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603 (2006).
14. S. Serafini, M. Barbiero, M. Debortoli, S. Donadello, F. Larcher, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 170402 (2015).
15. R. N. Bisset, W. Wang, C. Ticknor, R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, L. A. Collins, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **92**, 063611 (2015).
16. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 878 (2016).
17. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 875 (2016).
18. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **151**, 1092 (2017).
19. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 208 (2017).
20. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. X* **7**, 021031 (2017).
21. R. N. Bisset, S. Serafini, E. Iseni, M. Barbiero, T. Bienaime, G. Lamporesi, G. Ferrari, and F. Dalfovo, *Phys. Rev. A* **96**, 053605 (2017).
22. W. Wang, R. N. Bisset, C. Ticknor, R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, L. A. Collins, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **95**, 043638 (2017).
23. C. Ticknor, W. Wang, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **98**, 033609 (2018).
24. R. L. Ricca, D. C. Samuels, and C. F. Barenghi, *J. Fluid Mech.* **391**, 29 (1999).
25. F. Maggioni, S. Alamri, C. F. Barenghi, and R. L. Ricca, *Phys. Rev. E* **82**, 026309 (2010).
26. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, *Phys. Rev. E* **85**, 036306 (2012).
27. D. Kleckner and W. T. M. Irvine, *Nature Phys.* **9**, 253 (2013).
28. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, *J. Phys.: Conf. Ser.* **544**, 012022 (2014).
29. P. Clark di Leoni, P. D. Mininni, and M. E. Brachet, *Phys. Rev. A* **94**, 043605 (2016).
30. D. Kleckner, L. H. Kauffman, and W. T. M. Irvine, *Nature Phys.* **12**, 650 (2016).
31. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 325 (2018).
32. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **154**, 679 (2018).
33. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **153**, 475 (2018).