Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 11, стр. 603 – 604 *10 декабря 1988 г.*

БИАВТОМОДЕЛЬНЫЙ ВОЛНОВОЙ КОЛЛАПС

В.М.Малкин

Предсказан новый класс режимов волнового коллапса, позволяющий понять динамику нелинейных волновых полей, склонных к самофокусировке, но не обладающих устойчивыми автомодельными режимами сильного коллапса.

Нелинейные волновые поля могут, вследствие фокусирующего самовоздействия, взрывным образом возрастать в некоторых точках пространства вплоть до физически бесконечных значений. Это явление, называемое волновым коллапсом, интенсивно исследуется в последние годы. Опыт показывает, что формирование особенности волнового поля обычно происходит по автомодельному закону. В зависимости от того, какая энергия попадает в особую точку – конечная или физически бесконечно малая – коллапс называют "сильным" или "слабым". В случае сильного коллапса автомодельные решения позволяют объяснить реально происходящее поглощение энергии волнового поля. При слабом коллапсе нередко возникает парадоксальная ситуация, когда энергия может поглощаться лишь в особых точках, но в сколько-нибудь заметном количестве туда не попадает. Подобная проблема имеет место, например, для нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2 \psi = 0. \tag{1}$$

Оно описывает коллапс огибающей интенсивного волнового пакета в диспергирующей среде, служит скалярной моделью дозвукового коллапса ленгмюровских волн и давно привлекает внимание исследователей. Уравнение (1), очевидно, допускает автомодельную подстановку

$$\psi = (t_s - t)^{-\frac{1}{2} - i\alpha} \chi(\mathrm{r}/\sqrt{t_s - t}). \tag{2}$$

Зависимость (2) действительно наблюдалась в численном счете [1], а затем в [2]. Непосредственно, центрально-симметричное автомодельное решение $\chi(\zeta)$ было найдено в [3]. Более тщательная проверка его установления при различных начальных условиях проводилась в [4, 5]. Согласно указанным работам, центрально-симметричное автомодельное решение (2) осуществляется при $\alpha \approx 0{,}545$ и имеет не зависящую от времени асимптотику

$$\psi \approx C/r^{1+2i\alpha} \tag{3}$$

в области $r \gg \sqrt{t_s - t}$ $(C \approx \sqrt{2})$. В трехмерном случае (а здесь только он и обсуждается), возникающая при $t \to t_s$ особенность поля в точке $r = 0$, содержит нулевую энергию, т. е. коллапс является слабым. В качестве кандидатов на роль сильного режима коллапса предлагались "квазиклассические" автомодельные решения уравнения (1) (см. [2, 3]), но они оказались неустойчивыми относительно мелкомасштабных возмущений (развивавшихся гораздо быстрее, чем происходило сжатие основного пространственного масштаба поля). Обнаружить другие режимы сильного коллапса до сих пор не удавалось, хотя в численном эксперименте [2] и наблюдался захват конечной энергии в зону автомодельности (проследить за дальнейшей судьбой захваченной энергии не позволяло быстрое образование особенности в точке $r = 0$).

В настоящей работе найдено решение данной проблемы. Его идея чрезвычайно проста и, по всей видимости, приложима ко многим случаям слабого коллапса. Состоит она в том, что особенность, формирующаяся при слабом коллапсе, не исчезает после его завершения, а продолжает существовать и засасывает в себя конечную энергию. В условиях, когда этот процесс также носит на заключительной стадии автомодельный характер, динамику волнового поля естественно назвать "биавтомодельной". Происхождение биавтомодельных режимов коллапса нетрудно понять и с математической точки зрения. Действительно, класс регулярных автомодельных решений заведомо уже класса автомодельных решений, допускающих в некоторой точке особенность. Первый (слабый) коллапс снимает запрет с сингулярных автомодельных решений, а на более широком классе могут найтись первоначально отсутствовавшие устойчивые автомодельные режимы сильного коллапса. Именно так обстоит дело с решениями уравнения (1). Развивающийся после завершения слабого коллапса сингулярный сильный коллапс протекает на заключительной стадии по тому же автомодельному закону (2), что и первый (но, конечно, с другими значениями параметров t_s и α). Функция $\chi(\zeta)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$\left(-\alpha+\frac{i}{2}\frac{d}{d\zeta}\zeta+\frac{1}{\zeta}\frac{d^2}{d\zeta^2}\zeta+|\chi|^2\right)\chi=0, \qquad (4)$$

но теперь к конкуренции допускаются решения, обладающие конечным потоком энергии в особенность:

$$I=-\lim_{\zeta\to 0}\zeta^2|\chi|^2\frac{d}{d\zeta}\arg\chi\,. \qquad (5)$$

Такие решения существуют и при $I\gg 1$ и могут быть найдены аналитически. Наибольший интерес представляют решения с нулевым значением коэффициента C в асимптотике (3) волнового поля на больших расстояниях от особенности. В подобных решениях амплитуда поля убывает при $\zeta\to\infty$ быстрее, чем в регулярных:

$$|\chi|\underset{\zeta\to\infty}{\to}\mathrm{const}/\zeta^2 \qquad (6)$$

и интеграл энергии $\int d\zeta\zeta^2|\chi|^2$ сходится на верхнем пределе, что означает локализацию всей захваченной в зону автомодельности энергии в области $r\lesssim\sqrt{t_s-t}$. К моменту времени t_s эта энергия засасывается в особенность. Таким образом, сингулярный коллапс, в отличие от предваряющего его регулярного, является сильным.

Литература

1. *Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С.* Физика плазмы, 1975, 1, 606.
2. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А., Мушер С.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **41**, 125.
3. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 1310.
4. *McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L.* Phys. Rev. A, 1986, **34**, 1200.
5. *Kosmatov N.E., Petrov I.V., Shvets V.F., Zakharov V.E.* Preprint-1365, Space Research Institute, 1988.

Институт ядерной физики
Сибирское отделение Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1988 г.