

О координатно-зависимой эффективной массе в бозе-конденсатах фотонов и поляритонов в ловушке оптической микрополости

Н. С. Воронова^{+*1)}, Ю. Е. Лозовик^{×◦1)}

⁺ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ” (Московский инженерно-физический институт), 115409 Москва, Россия

^{*} Российский квантовый центр, 143025 Сколково, Москва, Россия

[×] Институт спектроскопии РАН, 142190 Троицк, Москва, Россия

[◦] Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова – Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 123458 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2018 г.

Исследуется влияние переменной (координатно-зависимой) эффективной массы частиц на поведение квази-двумерных конденсатов фотонов и экситонных поляритонов в параболической ловушке полупроводниковой оптической микрополости. Показано, что правильный учет зависимости эффективной массы от координаты в операторе кинетической энергии приводит к изменению эффективного потенциала конфинмента частиц. Для фотонной системы найдены поправки к энергии и волновой функции бозе-конденсата. Для экситонных поляритонов показано, что выбор специфической геометрии зеркал может привести к изменению взаимодействия между частицами с отталкивательного на притягательное.

DOI: 10.1134/S0370274X18240049

Приближение эффективной массы, разработанное изначально для описания поведения электронов и дырок вблизи минимума зоны проводимости (либо максимума валентной зоны) при наличии примесей в однородных кристаллах [1, 2], позднее было распространено на описание полупроводниковых материалов с переменной шириной запрещенной зоны. В настоящее время понятие эффективной массы применяется при аппроксимации законов дисперсии в области минимума при малых импульсах независимо от геометрии или структуры материала и природы физических систем. В том числе, эффективная масса приписывается квазичастицам, таким как экситоны [3, 4], квази-двумерные (2D) фотоны [5, 6] и экситонные поляритоны в полупроводниковых оптических микрорезонаторах [7]. Тогда как для экситонов эффективная масса по-прежнему определяется геометрией запрещенной зоны в полупроводнике, для 2D фотонов и экситонных поляритонов, которые являются собственными модами оптической микрополости в режиме слабой и сильной связи соответственно, данная величина определяется геометрией микрорезонатора и в общем случае зависит от координат.

Будучи ограниченными зеркалами в поперечном направлении, фотоны в микрорезонаторе являются массивными квазичастицами, движущимися в плоскости резонатора в удерживающем потенциале, форма которого определяется изгибом зеркал. Их закон дисперсии имеет вид: $E_{\text{ph}}(k_{\parallel}) = \hbar c \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} \approx \hbar c \sqrt{k_{\perp}^2} + \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m_{\text{ph}}^*$, где $L(\mathbf{r}) = \pi n / k_{\perp}$ – ширина микрополости (расстояние между зеркалами), $m_{\text{ph}}^* = \hbar n / L(\mathbf{r})c$ – эффективная масса, $n = 1, 2, \dots$ – номер моды, c – скорость распространения света в среде, заполняющей микрорезонатор. Конфинмент фотонов между зеркалами сферической формы, заполненными раствором органического красителя, позволил недавно достичь бозе-конденсации фотонного газа при комнатной температуре [6]. Термализация фотонов была достигнута за счет многократно неупругого рассеяния на молекулах красителя в режиме слабой связи. В серии последующих экспериментов было показано, что эффективный потенциал для фотонного бозе-конденсата можно создавать как при помощи изменения формы зеркал, так и при помощи локального варьирования диэлектрической проницаемости заполняющего микрополость красителя [8]. Однако, как видно из определения, и переменное расстояние между зеркалами, и переменная диэлектрическая проницаемость приводят не толь-

¹⁾e-mail: nsvoronova@mephi.ru; lozovik@isan.troitsk.ru

ко к возникновению удерживающего потенциала, но еще и к зависимости эффективной массы рассматриваемых частиц от координаты: $m_{\text{ph}}^* = m_{\text{ph}}^*(\mathbf{r})$.

Если внутрь микрорезонатора в пучности оптической моды помещены квантовые ямы (КЯ), то фотоны могут переходить в режим сильной связи с экситонами, которые также обладают квадратичным законом дисперсии $E_{\text{ex}}(k_{\parallel}) = E_{\text{ex}}^0 + \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m_{\text{ex}}^*$ в плоскости КЯ, но с существенно отличной эффективной массой ($m_{\text{ph}}^*/m_{\text{ex}}^* \sim 10^{-4}$). В результате гибридизации мод возникают новые собственные состояния гамильтониана связанной системы фотонов и экситонов – экситонные поляритоны [7], закон дисперсии которых состоит из двух (нижней и верхней) поляритонных ветвей $E_{\text{LP,UP}}(k_{\parallel}) = (E_{\text{ph}} + E_{\text{ex}} \mp \sqrt{(E_{\text{ph}} - E_{\text{ex}})^2 + (\hbar\Omega)^2})/2$, где $\hbar\Omega$ – энергия Раби-расщепления, причем при низких температурах макроскопически заселенной оказывается только нижняя поляритонная ветвь $E_{\text{LP}}(k_{\parallel})$. Из-за своей смешанной природы, объединяющей свойства света и материи, экситонные поляритоны демонстрируют множество необычных эффектов, включая бозеконденсацию [9–11], сверхтекучесть [12, 13], джозефсоновские явления [14–16] и др. Аппроксимация параболическим законом в области малых продольных импульсов позволяет получить выражение для эффективной массы нижних поляритонов $m_{\text{LP}}^*(\mathbf{r})$, которая оказывается зависящей от координаты в силу зависимости от координаты закона дисперсии фотонов $E_{\text{ph}}(k_{\parallel})$.

Несмотря на различные механизмы бозеконденсации в фотонном газе в режиме слабой связи [6] и в газе экситонных поляритонов в режиме сильной связи [9], стационарное состояние обеих систем может быть описано в приближении среднего поля при помощи уравнения Гросса–Питаевского следующего вида:

$$\left[\hat{T}(-i\nabla) + U(\mathbf{r}) - \mu + g|\Psi|^2 \right] \Psi = 0, \quad (1)$$

где Ψ – макроскопическая волновая функция конденсата (параметр порядка), μ – химический потенциал, g – константа взаимодействия, $U(\mathbf{r})$ – эффективный удерживающий потенциал, обусловленный членами закона дисперсии, не зависящими от k_{\parallel} , а $\hat{T}(-i\nabla)$ – оператор кинетической энергии, обобщенный на случай переменной массы частиц. В многочисленных предыдущих теоретических описаниях фотонных [6, 17] и поляритонных конденсатов [18, 19] на базе уравнений типа (1) зависимость эффективной массы от координаты была опущена. В работах, явно указывающих на эту зависимость [20–22], рассматривалось

лишь приближение Томаса–Ферми $\hat{T}(-i\nabla)\Psi \approx 0$ [22], либо рассматривался случай $L(\mathbf{r}) = \text{const}$ и изучались поляритонные ловушки другого типа [20, 21].

В этой связи целью данной работы является восполнение указанного пробела и изучение влияния координатно-зависимой эффективной массы на свойства бозе-конденсатов фотонов и экситонных поляритонов в неплоских микрорезонаторах, а именно в ловушках оптической микрополости с зеркалами сферической формы [5].

Оператор кинетической энергии \hat{T} , обобщенный на случай скалярной переменной массы, имеет эрмитову форму [23]

$$\hat{T} = -i\hbar\nabla \left(\frac{-i\hbar\nabla}{2m^*(\mathbf{r})} \right) + \hat{T}_1, \quad (2)$$

где слагаемое \hat{T}_1 содержит члены $\sim \nabla^2 m^*$ и $(\nabla m^*)^2$ и может быть отброшено в предположении медленно меняющейся ширины микрополости, рассматриваемой в данной работе.

Для фотонного конденсата, подставляя $m_{\text{ph}}^*(\mathbf{r})$, из (1) с учетом (2) немедленно получим:

$$\left[-\frac{\hbar c}{2\pi n} \nabla L(\mathbf{r}) \nabla + \frac{\pi \hbar c n}{L(\mathbf{r})} - \mu + g|\Psi_{\text{ph}}(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

Стоит отметить, что константа взаимодействия выражается через безразмерный параметр взаимодействия [24] как $g = \tilde{g}\hbar^2/m^*$ (здесь $m^* \equiv m^*(\mathbf{r})$ – эффективная масса), что делает ее также зависимой от координаты. Однако в силу существенной слабости взаимодействий в фотонных конденсатах ($\tilde{g} \sim 10^{-7} \div 10^{-4}$ [5, 25, 26]), мы будем предполагать $g(\mathbf{r}) = g \approx \text{const}$. Эффекты координатной зависимости $g(\mathbf{r})$ для фотонного конденсата в квадратичной ловушке рассмотрены в работе [22]. Будем рассматривать медленно меняющуюся ширину микрорезонатора $L(\mathbf{r})$ как ширину в центре полости $L_0 = L(\mathbf{r} = 0)$ с добавкой: $L(\mathbf{r}) = L_0 + \delta L(\mathbf{r})$, где $|\delta L| \ll L_0$. Подстановка волновой функции конденсата в виде

$$\Psi_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r})}{\sqrt{L(\mathbf{r})}} \quad (4)$$

позволяет избавиться от смешанной производной в (3) и получить уравнение на функцию f :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{ph}}^0} \left[\nabla^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2(\mathbf{r})} (\nabla \delta L(\mathbf{r}))^2 - \frac{\nabla^2 \delta L(\mathbf{r})}{L(\mathbf{r})} \right) \right] + \frac{L_0}{L(\mathbf{r})} \left(\frac{\pi \hbar c n}{L(\mathbf{r})} - \mu \right) + \frac{gL_0}{L^2(\mathbf{r})} |f(\mathbf{r})|^2 \right\} f(\mathbf{r}) = 0, \quad (5)$$

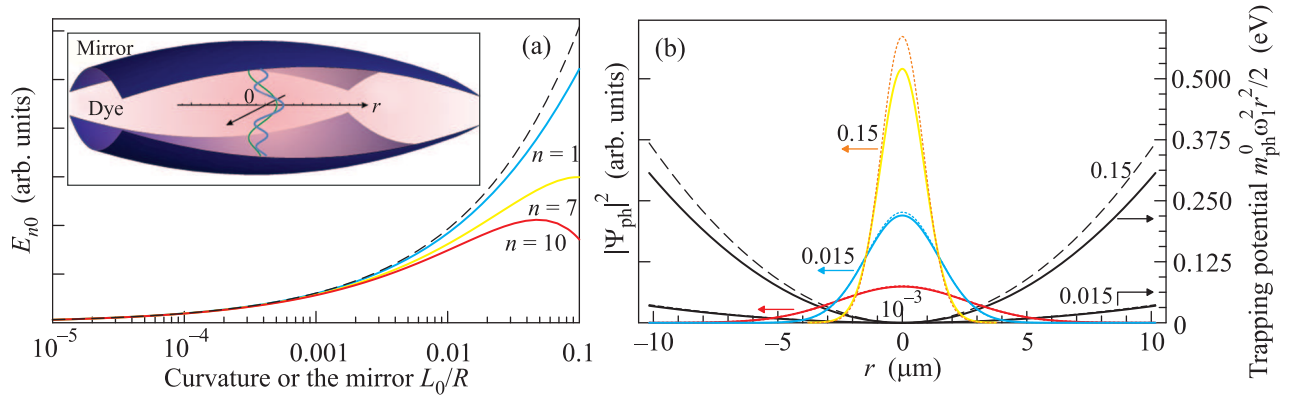


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Энергия основного состояния (9) для уравнения (7) в пренебрежении взаимодействием в зависимости от отношения L_0/R для фотонных мод номер $n = 1, 7, 10$. Пунктирная линия показывает энергию без поправки на координатно-зависимую массу. И использованные параметры: ширина микрополости в центре $L_0 = 1.5$ мкм, диэлектрическая проницаемость красителя $\varepsilon = 60$. Вставка: иллюстрация микрополости со сферическими зеркалами с $L_0/R = 10^{-3}$, $L_0 = 1.5$ мкм, заполненной раствором красителя. (б) – Левая ось: модуль квадрата волновой функции $|\Psi_{ph}(r)_{100}|^2$, согласно (10), для $L_0/R = 10^{-3}, 0.015$ и 0.15 . Пунктирные линии – без поправки на координатно-зависимую массу. Правая ось: соответствующие эффективные ловушки, созданные сферической геометрией зеркал для наименьшей моды $n = 1$, согласно (8). В выбранном масштабе для $L_0/R = 10^{-3}$ кривизна потенциала не видна. Показано для $L_0/R = 0.015$ и 0.15

где мы обозначили как $m_{ph}^0 = \pi \hbar n / c L_0$ эффективную массу двумерных фотонов в центре микрополости. Полученное уравнение (5) верно для микрополости с любой геометрией зеркал. Решая его вместе с условием нормировки

$$\int |\Psi_{ph}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \int \frac{|f(\mathbf{r})|^2}{L(\mathbf{r})} d\mathbf{r} = N_0, \quad (6)$$

фиксирующим химический потенциал системы (N_0 – полное число частиц в конденсате), можно определить параметр порядка $\Psi_{ph}(\mathbf{r})$.

Для случая сферических зеркал, используемых повсеместно в экспериментах с бозе-конденсатами фотонов в ловушках (см., например, [5, 6]), ширина резонатора имеет вид $L(r) = L_0 - 2(R - \sqrt{R^2 - r^2}) \approx L_0(1 - r^2/L_0R)$, где $R \gg L_0$ – радиус кривизны зеркала (см. вставку на рис. 1а). Предполагая, что везде в пределах системы верно $r^2/L_0R \ll 1$, после подстановки в уравнение (5) для аксиально-симметричной функции $f(r)$ получим:

$$\frac{\hbar^2}{2m_{ph}^0} \left(f'' + \frac{1}{r} f' \right) + \left\{ \mu - E_{ph}^0 \left(1 - \frac{L_0}{\pi^2 R} \right) - (2E_{ph}^0 - \mu) \frac{r^2}{L_0 R} \right\} f - \frac{g}{L_0} f^3 = 0. \quad (7)$$

В (7) введено обозначение $E_{ph}^0 = \pi \hbar c n / L_0$ и, кроме того, отброшены малые поправки $\sim \delta L$ в слагаемом, описывающем взаимодействие, в силу существенной малости параметра g . За исключением по-

следнего слагаемого, полученное уравнение (7) аналогично уравнению Шредингера для функции f в 2D гармоническом потенциале с частотой

$$\omega_n = c \sqrt{\frac{2}{L_0 R}} \left(1 - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{L_0}{2\pi^2 R}} \right) \quad (8)$$

и энергией основного состояния

$$E_{n0} \equiv (\mu - E_{ph}^0)_{n0} = \hbar c \sqrt{\frac{2}{L_0 R}} \left(1 - \frac{n^2 + 1}{n} \sqrt{\frac{L_0}{2\pi^2 R}} \right). \quad (9)$$

Последние члены внутри скобок в уравнениях (8) и (9) являются поправками $\sim (L_0/R)^{1/2}$ к ранее выведенным результатам [5] за счет учета зависимости эффективной массы фотонов от координаты. Как можно видеть, данные поправки зависят не только от кривизны зеркал, но также и от номера моды n , причем если поправка к частоте убывает с ростом n , поправка к энергии основного состояния растет. Так, в случае $L_0/R = 1.5 \cdot 10^{-6}$ [6], для наименьшей моды $n = 1$ получим относительное понижение E_{10} лишь на 0.055 %, а для моды $n = 7$ (рассмотренной в эксперименте [6]) $\delta E_{70}/E_{70}$ достигает 0.3 %. С увеличением отношения L_0/R до 10^{-3} [22], для той же самой моды $n = 7$ энергия основного состояния понижается уже на 7 %. Зависимость E_{n0} от параметра кривизны L_0/R показана на рис. 1а.

Волновая функция основного состояния, нормированная, согласно (6), имеет вид:

$$\Psi_{\text{ph}}(r)_{n00} = \sqrt{\frac{N_0}{\pi L_0 R} \frac{e^{-\frac{L_0 R}{2\ell_n^2}}}{\text{Ei}\left(\frac{L_0 R}{2\ell_n^2}\right)} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\ell_n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{L_0 R}}}}, \quad (10)$$

где $\ell_n = \sqrt{\hbar/m_{\text{ph}}^0 \omega_n}$, а $\text{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция. Характерная осцилляторная длина ℓ_n убывает с номером моды n , так как величина m_{ph}^0 содержит n в числителе. Эффект поправки за счет переменной массы в волновой функции не столь велик, как в случае энергии основного состояния, так как данная поправка входит лишь через величину ω_n , и потому ее влияние резко падает с номером моды n . Квадрат волновой функции основного состояния и эффективный удерживающий потенциал для наименьшей моды $n = 1$ показан на рис. 1b для зеркал различной кривизны. Как можно видеть, поправка за счет зависимости эффективной массы от координаты понижает силу конфайнмента, создаваемого сферическими зеркалами для фотонного газа, что, как следствие, выталкивает частицы из центра пятна на периферию.

Чтобы рассмотреть аналогичные эффекты для экситон-поляритонного конденсата в микрополости в режиме сильной связи, получим явное выражение для зависимости $m_{\text{LP}}^*(\mathbf{r})$ от координаты в предположении нулевой расстройки между фотонной модой в центре резонатора и экситонной модой в КЯ: $E_{\text{ph}}^0 = E_{\text{ex}}^0$. Записывая $E_{\text{ph}}(k_{\parallel}) = E_{\text{ph}}^0/(1 + \delta L(\mathbf{r})/L_0) + \hbar^2 k_{\parallel}^2/2m_{\text{ph}}^*(\mathbf{r})$ и учитывая $m_{\text{ex}}^* \gg m_{\text{ph}}^*$, имеем:

$$E_{\text{LP}}(k_{\parallel}) \approx E_{\text{ph}}^0 - \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{E_{\text{ph}}^0}{2} \frac{\delta L}{L_0} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\text{ph}}^*} \left(1 + \frac{E_{\text{ph}}^0}{2\hbar\Omega} \frac{\delta L}{L_0}\right), \quad (11)$$

откуда

$$\frac{1}{m_{\text{LP}}^*(\mathbf{r})} \approx \frac{1}{m_{\text{ph}}^*(\mathbf{r})} \left(1 + \frac{E_{\text{ph}}^0}{2\hbar\Omega} \frac{\delta L(\mathbf{r})}{L_0}\right). \quad (12)$$

Необходимо подчеркнуть, что поскольку $\hbar\Omega \sim \text{мэВ}$, а $E_{\text{ph}}^0 = \pi\hbar cn/L_0 \sim \text{эВ}$, то поправка к $m_{\text{LP}}^*(\mathbf{r})$ по сравнению с фотонной эффективной массой не мала, несмотря на малость $|\delta L|/L_0 \ll 1$. Поэтому при подстановке (11) и (12) в (1) с учетом (2) для сферических зеркал с радиусом кривизны R получим

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{ph}}^0} \nabla \left(1 - a \frac{r^2}{L_0 R}\right) \nabla + E_{\text{LP}}^0 - \mu + \frac{E_{\text{ph}}^0}{2} \frac{r^2}{L_0 R} + \frac{\tilde{g}\hbar}{m_{\text{ph}}^0} \left(1 - a \frac{r^2}{L_0 R}\right) |\Psi_{\text{LP}}|^2 \right] \Psi_{\text{LP}} = 0, \quad (13)$$

где обозначено $a \equiv E_{\text{ph}}^0/2\hbar\Omega$ и $E_{\text{LP}}^0 \equiv E_{\text{ph}}^0 - \hbar\Omega/2$ – минимум нижней поляритонной ветви. Для микрорезонаторов шириной $L_0 = 0.4 \mu\text{м}$ [9] с GaAs квантовыми ямами ($\varepsilon = 13$) имеем $a \simeq 40n$ (n – номер фотонной моды в полости), поэтому даже для $n = 1$ рассмотрение слагаемого $ar^2/L_0 R$ в качестве малой поправки, верное везде для фотонного конденсата, в данном случае возможно лишь в области очень малых r . Кроме того, за счет экситонной компоненты межчастичное взаимодействие в поляритонных конденсатах ($\tilde{g} \sim 10^{-3}$ [7]) на порядки сильнее взаимодействия между двумерными фотонами в режиме слабой связи, так что координатная зависимость $g(\mathbf{r})$ не может быть отброшена. Поэтому в случае с экситон-поляритонным конденсатом эффективное уравнение Гросса–Питаевского не допускает непосредственного аналитического решения, за исключением хорошо изученного предела Томаса–Ферми (см., например, [22]), когда волновая функция считается настолько слабо меняющейся, что уравнение Гросса–Питаевского допускает отбрасывание производных.

Примечательным является тот факт, что за счет зависимости m_{LP}^* от координаты в данном случае константа взаимодействия может менять знак, т.е. отталкивательное поляритон-поляритонное взаимодействие может на расстояниях $r > \sqrt{L_0 R/a}$ от центра микрополости стать эффективно притягательным. Ранее для конденсатов экситонных поляритонов предсказывалась смена знака взаимодействия за счет взаимодействия с экситонным резервуаром [27] и посредством достижения резонанса Фешбаха из-за спиновой анизотропии поляритонных взаимодействий [28]. В нашем случае же эффективное слабое притяжение между поляритонами достигается в полностью равновесной системе без учета спиорности конденсата, за счет геометрии системы.

Таким образом, в данной работе стандартное среднеполевое описание для бозе-конденсатов фотонов и экситонных поляритонов было расширено для учета координатной зависимости эффективной массы квазичастиц, которая является следствием сферической геометрии зеркал микрорезонатора. В общем случае данная зависимость приводит к изменению силы эффективного удерживающего потенциала ловушки, создаваемой зеркалами и, соответственно, к поправкам для энергии и волновой функции бозе-конденсата. Для конденсата экситонных поляритонов показано, что даже при малой вариации ширины микрополости поправка к эффективной массе оказывается существенной, что приводит к возможности управлять поляритон-поляритонным вза-

имодействием, вплоть до изменения межчастичного отталкивания на притяжение. Следует отметить, что в данном исследовании мы не касались вопросов тензорных эффективных масс, которые могут быть следствием периодической модуляции ширины микрополости в одном направлении [29].

Научная работа Н.С. Вороновой финансово поддержана Российским фондом фундаментальных исследований в рамках научного проекта #16-32-60066 мол_а_дк и грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-201.2017.2. Ю.Е. Лозовик поддержан Программой фундаментальных исследований ВШЭ.

1. G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **52**, 191 (1937).
2. J. C. Slater, *Phys. Rev.* **76**(11), 1592 (1949).
3. R. S. Knox, *Theory of excitons*, Academic, N.Y. (1963).
4. V. M. Agranovich, *Excitations in organic solids*, Oxford Univ. Press (2009).
5. J. Klaers, F. Vewinger, and M. Weitz, *Nat. Phys.* **6**, 512 (2010).
6. J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, *Nature (London)* **468**, 545 (2010).
7. A. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy, *Microcavities*, 2-nd ed., Univ. Press, Oxford (2017).
8. D. Dung, C. Kurtscheid, T. Damm, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz, and J. Klaers, *Nat. Photon.* **11**, 565 (2017).
9. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, *Nature (London)* **443**, 409 (2006).
10. S. Christopoulos, G. Baldassarri Höger von Högersthal, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butté, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 126405 (2007).
11. J. J. Baumberg, A. V. Kavokin, S. Christopoulos, A. J. D. Grundy, R. Butté, G. Christmann, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, G. Baldassarri Höger von Högersthal, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 136409 (2008).
12. I. Carusotto and C. Ciuti, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 166401 (2004).
13. A. Amo, J. Lefrère, S. Pigeon, C. Adrados, C. Ciuti, I. Carusotto, R. Houdré, E. Giacobino, and A. Bramati, *Nat. Phys.* **5**, 805 (2009).
14. K. G. Lagoudakis, B. Pietka, M. Wouters, R. André, and B. Deveaud-Plédran, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 120403 (2010).
15. M. Abbarchi, A. Amo, V. G. Sala, D. D. Solnyshkov, H. Flayac, L. Ferrier, I. Sagnes, E. Galopin, A. Lemaître, G. Malpuech, and J. Bloch, *Nat. Phys.* **9**, 275 (2013).
16. N. S. Voronova, A. A. Elistratov, and Yu. E. Lozovik, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 186402 (2015).
17. R. A. Nyman and M. H. Szymanska, *Phys. Rev. A* **89**, 033844 (2014).
18. M. Wouters and I. Carusotto, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 140402 (2007).
19. M. O. Borgh, J. Keeling, and N. Berloff, *Phys. Rev. B* **81**, 235302 (2010).
20. Н. С. Воронова, А. А. Елистратов, Ю. Е. Лозовик, *Письма в ЖЭТФ* **93**(10), 642 (2011).
21. N. S. Voronova, A. A. Elistratov, and Yu. E. Lozovik, *J. Nanophoton.* **6**(1), 061802 (2012).
22. O. Berman, R. Kezerashvili, and Yu. Lozovik, *J. Opt. Soc. B* **34**(8), 1649 (2017).
23. O. von Roos, *Phys. Rev. B* **27**(12), 7547 (1983).
24. Z. Hadzibabic and J. Dalibard, *Riv. Nuovo Cimento* **34**, 389 (2011).
25. E. van der Wurff, A.-W. de Leeuw, R. A. Duine, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 135301 (2014).
26. M. Radonjic, W. Kopylov, A. Balaz, and A. Pelster, *New J. Phys.* **20**, 055014 (2018).
27. D. V. Vishnevsky and F. Laussy, *Phys. Rev. B* **90**, 035413 (2014).
28. N. Takemura, M. D. Anderson, M. Navadeh-Toupchi, D. Y. Oberli, M. T. Portella-Oberli, and B. Deveaud, *Phys. Rev. B* **95**, 205303 (2017).
29. N. S. Voronova and Yu. E. Lozovik, *Ann. Phys. (Berlin)* (submitted 2018).