

О зависимости сверхпроводящей щели от волнового вектора в $\text{Pr}_{0.89}\text{LaCe}_{0.11}\text{CuO}_4$ ¹⁾

М. В. Еремин²⁾, Д. С. Кочергин, М. А. Малахов

Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Казань, Россия

Поступила в редакцию 8 октября 2018 г.

После переработки 29 октября 2018 г.

На основе модели нижней хаббардовской подзоны найдены решения уравнения Бардина–Купера–Шриффера с учетом трехцентровых корреляций, суперобменного, кулоновского, фононного и спин-флуктуационного механизмов спаривания квазичастиц. В качестве примера рассмотрено соединение $\text{Pr}_{0.89}\text{LaCe}_{0.11}\text{CuO}_4$. Зависимость сверхпроводящей щели от волнового вектора вдоль контура Ферми хорошо аппроксимируется выражением вида $\Delta_\phi = \Delta_0 (B \cos(2\phi) + (1 - B) \cos(6\phi))$, где угол ϕ отсчитывается от границы зоны Бриллюэна. Рассчитанные значения параметров Δ_0 и B соответствуют экспериментальным данным. Роль фононного механизма относительно мала. Конкуренция же других указанных механизмов в формировании величины Δ_0 оказалась довольно сильной и эффект их интерференции важен, причем он различен на различных участках поверхности Ферми. Основной вклад в формирование компоненты пропорциональной $\cos(6\phi)$ (высшая гармоника щели) обусловлен спин-флуктуационным и кулоновским взаимодействиями. Численно и аналитически доказано, что роль трехцентровых корреляций сводится к ослаблению суперобменного механизма.

DOI: 10.1134/S0370274X18240050

Зависимость сверхпроводящей щели от волнового вектора несет в себе важную информацию о механизме спаривания квазичастиц. К настоящему времени различными экспериментальными методами обнаружено, что как в дырочно-, так и в электронно-допированных купратах она существенно отклоняется от простой зависимости вида $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta (\cos k_x a - \cos k_y a)$, которую часто представляют формулой $\Delta_\phi = \Delta_0 \cos(2\phi)$.

Имеющиеся экспериментальные данные, как правило, аппроксимируются феноменологическим выражением $\Delta_\phi = \Delta_0 (B \cos(2\phi) + (1 - B) \cos(6\phi))$ [1–5]. Множитель $(1 - B)$ для дырочно-допированных купратов положителен [1–3], в то время как для электронно-допированных он отрицателен [4, 5]. Исследование природы этой загадочной асимметрии может помочь выяснить важные детали спаривания.

Происхождение высшей гармоники в дырочных купратах анализировалось в работах [6, 7]. В [6] полагалось, что высшая гармоника в сверхпроводящей щели есть следствие спин-флуктуационного механизма спаривания, однако при этом другие возможные механизмы не анализировались. Рассмотрение роли

других упомянутых механизмов проведено в [7]. Было найдено, что наряду со спин-флуктуационным важным вклад в формирование высшей гармоники вносит взаимодействие квазичастиц через поле фононов.

Основная цель данной работы – попытаться выяснить происхождение обеих гармоник в сверхпроводящей щели электронно-допированных купратов, приняв во внимание при решении уравнения Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) суперобменный, фононный, плазменный (кулоновский) и спин-флуктуационный механизмы на равных основаниях, а также трехцентровые корреляции на важную роль которых для оценки критических температур обращалось внимание в [8, 9]. В [10] отмечалось, что в дырочно-допированных купратах трехцентровые корреляции подавлены сильным обменным взаимодействием дырок на позициях кислорода с локализованными дырками на позициях меди. И это одна из важнейших причин в асимметрии значений критических температур в электронных и дырочных купратах.

При допировании купратов электронами носители тока распределяются по орбитальным состояниям меди $|x^2 - y^2\rangle$. В этом случае гамильтониан модели имеет вид

¹⁾См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: meremin@kpfu.ru

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{l,m,\sigma} t_{lm} X_l^{\sigma,0} X_m^{0,\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{l,m} G_{lm} X_l^{0,0} X_m^{0,0} - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{l,m,\sigma,\sigma'} J_{lm} (-1)^{1-\sigma-\sigma'} X_l^{\sigma,\sigma'} X_m^{\bar{\sigma},\bar{\sigma}'} - \\ & - \sum_{l \neq m, f, \sigma, \sigma'} \frac{t_{lf} t_{fm}}{U} (-1)^{1-\sigma-\sigma'} X_l^{\sigma,0} X_f^{\bar{\sigma},\bar{\sigma}'} X_m^{0,\sigma'}. \end{aligned} \quad (1)$$

Хаббардовские операторы $X_i^{\sigma,0}$ имеют смысл операторов рождения квазичастичного возбуждения в нижней хаббардовской зоне со спиновым квантовым числом $\sigma = \pm \frac{1}{2}$. Коммутационное соотношение операторов рождения и уничтожения имеет вид

$$X_i^{\sigma,0} X_j^{0,\sigma} + X_j^{0,\sigma} X_i^{\sigma,0} = \left[\frac{1 + \delta_i}{2} + 2\sigma S_i^z \right] \delta_{ij}, \quad (2)$$

где δ_i – оператор числа квазичастиц в расчете на одну элементарную ячейку. Второй член в (1) описывает кулоновское взаимодействие между электронами из различных элементарных ячеек, третий и четвертый члены учитывают поправки второго порядка теории возмущений, обусловленные виртуальными возбуждениями квазичастиц из нижней хаббардовской зоны в верхнюю. Энергетический интервал между зонами равен U [8]. Слагаемое с параметром J_{lm} соответствует суперобменному взаимодействию спинов меди через промежуточные ионы кислорода (их номера для краткости опущены). Последний член (четвертый) отсутствует в случае диэлектрической фазы купратов, так как нижняя хаббардовская зона полностью заполнена.

Энергия квазичастиц, как это принято при описании экспериментов по фотоэмиссии с угловым разрешением (ARPES – Angle Resolved Photo Emission Spectroscopy), записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} = & -\mu + 2t(\cos k_x a + \cos k_y a) + \\ & + 4t' \cos k_x a \cos k_y a + 2t''(\cos 2k_x a + \cos 2k_y a). \end{aligned} \quad (3)$$

Эффективные параметры перескока квазичастиц “одетых зарядовыми и спиновыми корреляциями” выражаются через затравочные параметры перескока электронов между первыми (t_1), вторыми (t_2) и третьими соседями (t_3) следующим образом:

$$\begin{aligned} t = & t_1 \left(P + \frac{1 + 2F_1^T}{4P} K_1 \right) + \\ & + \left(J_1 \frac{F_1^J}{2P} + 3 \frac{t_1^2}{U} (1 + F_1^T) \right) \langle X_0^{0,\sigma} X_1^{\sigma,0} \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$t' = t_2 P + 2 \frac{t_1^2}{U} \left(\frac{2 + F_1^T}{2} K_1 - \frac{1 - \delta_0}{2} P \right), \quad (5)$$

$$t'' = t_3 P + \frac{t_1^2}{U} \left(\frac{2 + F_1^T}{2} K_1 - \frac{1 - \delta_0}{2} P \right). \quad (6)$$

Через $K_1 = 4\langle S_0^z S_1^z \rangle$ обозначены спин-спиновые корреляционные функции, которые оцениваются самоогласованно через динамическую спиновую восприимчивость. $P = (1 + \delta_0)/2$ – среднее значение антикоммутаторов операторов рождения и уничтожения, δ_0 – число носителей тока в расчете на одну элементарную ячейку. Формула для параметра проектирования F_1^T , полученная из условия эквивалентности электронного и дырочного представлений имеет следующий вид:

$$F_1^T = \frac{-K_1 - 4P \left(\frac{J_1 F_1^J}{2P} + 3 \frac{t_1^2}{U} (1 + F_1^T) \right) t_1^{-1} \langle X_0^{0,\sigma} X_1^{\sigma,0} \rangle}{4P^2 + 2K_1}. \quad (7)$$

Корреляционные функции $\langle X_0^{0,\sigma} X_1^{\sigma,0} \rangle$ рассчитываются самоогласованно через числа заполнения квазичастиц.

В результате проектирования вклад в щель, обусловленный трехцентровыми членами гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}}^T = & 2 \frac{t_1^2}{U} (1 + F_1^T) \times \\ & \times \sum_{\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle (2 \cos(k_x - k'_x) a + 2 \cos(k_y - k'_y) a + \\ & + 4 \cos k_x a \cos k'_y a + 4 \cos k_y a \cos k'_x a). \end{aligned} \quad (8)$$

В случае d -типа спаривания это выражение может быть упрощено. Так как $\langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle \propto \cos k'_x a - \cos k'_y a$, имеем следующее соотношение:

$$\sum_{\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle \cos k'_x a = - \sum_{\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle \cos k'_y a \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}}^T = & -2 \frac{t_1^2}{U} (1 + F_1^T) \times \\ & \times \sum_{\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle (2 \cos(k_x - k'_x) a + 2 \cos(k_y - k'_y) a). \end{aligned} \quad (10)$$

Сопоставляя это выражение с вкладом в щель от суперобменного взаимодействия

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}}^J = & \frac{J_1 F_1^J}{P} \times \\ & \times \sum_{\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle (2 \cos(k_x - k'_x) a + 2 \cos(k_y - k'_y) a), \end{aligned} \quad (11)$$

приходим к выводу – трехцентровые корреляции в случае d -типа спаривания просто перенормируют параметр суперобменного взаимодействия

$$J_1 F_1^J \rightarrow J_1 F_1^J - 2 \frac{t_1^2}{U} (1 + F_1^T) \equiv J_1^*. \quad (12)$$

При проектировании оператора кинетической энергии на пространство операторов рождения и уничтожения в узельном представлении получается аномальное среднее вида

$$\Delta_{jn}^t = \delta_{jn} \sum_m t_{jm} F_{jm}^t \langle X_j^{0,\downarrow} X_m^{0,\uparrow} - \frac{1}{2} X_j^{0,\uparrow} X_m^{0,\downarrow} \rangle. \quad (13)$$

Фурье-образ этого вклада в сверхпроводящую щель записывается следующим образом:

$$\Delta_{\mathbf{k}}^t = 6 \sum_{\mathbf{k}'} [tF^t]_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle X_{\mathbf{k}'}^{0,\downarrow} X_{-\mathbf{k}'}^{0,\uparrow} \rangle. \quad (14)$$

Видно, что он не зависит от волнового вектора \mathbf{k} , т.е. способствует изотропному s -типу спаривания. Эти двухцентровые корреляции не могут быть ответственны за дисперсию сверхпроводящей щели. Как видно из приведенного выражения (14), при использованном нами способе проектирования, роль кинематического механизма по сравнению с работами [11, 12] существенно ослаблена. Это обстоятельство объясняет преобладание d -типа спаривания над s -типом в решениях уравнения БКШ.

Вклады, рассматриваемых в данной работе механизмов, в d -тип спаривания удобно пояснить в интегральной форме, как они фигурируют в уравнении БКШ

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T}\right), \quad (15)$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (16)$$

При решении уравнения БКШ на сверхпроводящую щель нами учитывались спин-флуктуационный (V^{sp}), кулоновский (V^C), перенормированный трехцентровыми корреляциями суперобменный (V^{J^*}) и фононный (V^{ph}) механизмы спаривания:

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{sp} + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^C + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{J^*} + V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{ph}. \quad (17)$$

Спин-флуктуационное взаимодействие считается одним из основных в формировании сверхпроводимости в купратах. В сверхпроводящей фазе у купратов нет антиферромагнитного упорядочения, но существуют антиферромагнитные флуктуации. За счет этой корреляции спинов ближнего порядка поляризуют среду, т.е. “наводят” магнитное поле на окружающих их спинах, пропорциональное спиновой восприимчивости. Это косвенное взаимодействие носителей тока между собой приводит к спариванию. Так как в плоскостях CuO корреляционная длина составляет лишь несколько постоянных решетки, в первом приближении можно пренебречь эффектами запаздывания и считать, что фурье-образ

спин-флуктуационного взаимодействия пропорционален реальной части спиновой восприимчивости, взятой на нулевой частоте [13, 14]:

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{sp} = g^2 \text{Re} \chi_{sp}(\omega = 0, \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \theta(\omega_{sp} - |\varepsilon_{\mathbf{k}}|) \theta(\omega_{sp} - |\varepsilon_{\mathbf{k}'}|) \theta(\omega_{sp} - |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}|). \quad (18)$$

Здесь g – константа взаимодействия, которая подбиралась для соответствия максимального значения щели с экспериментом. В наших расчетах она оказалась равной 0.341. Это в 4.7 раза меньше ширины зоны проводимости ($W \sim 8t_1$). В расчетах [6] $g/t_1 = 1.6/0.13 = 12.3$, т.е. константа взаимодействия g почти в 1.5 раза больше ширины зоны W , что ставит под сомнение справедливость вывода о доминировании спин-флуктуационного взаимодействия в формировании высшей гармоники $\cos(6\phi)$ в дисперсии сверхпроводящей щели.

Что касается фурье-образа эффективного кулоновского взаимодействия между носителями тока, то он записывается более определенно при использовании диэлектрического формализма, предложенного Гинзбургом и Киржницем [15]:

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^C = G_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (1 - G_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \text{Re} \chi_{ch}(\omega = 0, \mathbf{k} - \mathbf{k}')) \times \theta(\varepsilon_F - |\varepsilon_{\mathbf{k}}|) \theta(\varepsilon_F - |\varepsilon_{\mathbf{k}'}|) \theta(\varepsilon_F - |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}|). \quad (19)$$

Здесь ε_F – уровень Ферми, отсчитываемый от дна зоны. $G_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ – неэкранированное кулоновское взаимодействие носителей тока в слоях CuO [16]:

$$G_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{2\pi d e^2}{\varepsilon_{\perp} a^2 \sqrt{A^2 - 1}}, \quad (20)$$

$$A = 2 \frac{\varepsilon_{\parallel} d^2}{\varepsilon_{\perp} a^2} \left(\sin^2 \frac{(k_x - k'_x)a}{2} + \sin^2 \frac{(k_y - k'_y)a}{2} \right) + 1. \quad (21)$$

Аналитическое выражение для спиновой восприимчивости было получено в работе [14], для зарядовой – в [17]. Их единообразное представление приведено в Дополнительных материалах. Там же иллюстрируются соответствие рассчитанного спектра коллективных спиновых колебаний новейшим данным по рассеянию нейтронов [18–20].

Фурье-образ перенормированного трехцентровыми корреляциями суперобменного взаимодействия имеет вид

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{J^*} = -J_1^* (2 \cos(k_x - k'_x)a + 2 \cos(k_y - k'_y)a). \quad (22)$$

Фурье-образ взаимодействия носителей через дыхательную фононную моду записывается следующим образом [21]:

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{ph} = -\frac{p^2}{\Omega_l} \left(\sin^2 \frac{(k_x - k'_x)a}{2} + \sin^2 \frac{(k_y - k'_y)a}{2} \right) \times \theta(\omega_D - |\varepsilon_{\mathbf{k}}|) \theta(\omega_D - |\varepsilon_{\mathbf{k}'}|) \theta(\omega_D - |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}|). \quad (23)$$

Здесь $p = 0.05 \text{ эВ}$ – параметр взаимодействия с продольной фононной модой с частотой Ω_l , равной 0.07 эВ , ω_D – частота Дебая.

Параметры зоны брались согласно экспериментальным данным [5], равными $t = 0.2 \text{ эВ}$, $t' = -0.4t$, $t'' = 0.1t$, $\mu = -0.4t$. Обменный интеграл между ближайшими соседями брался аналогично работам [14, 17], где это значение успешно использовалось; $J_1 = 0.11 \text{ эВ}$. Параметры проектирования для суперобменного и трехцентрового взаимодействия считались равными друг другу и равными 0.7 . Спиновая корреляционная функция $K_1 = -0.22$.

Результаты решения уравнения (15) приведены на рис. 1. Как видно на рис. 1а, результаты расчета соответствуют экспериментальным данным. Абсолютные значения обоих параметров Δ_0 и B получились правильными, причем в соответствии с экспериментальными данными [4, 5] знак параметра B отрицательный. В дырочно-допированных купратах $B > 0$ и абсолютная величина относительной амплитуды перед высшей гармоникой $(1 - B)$ примерно в 3 раза меньше [1–3]. Как видно на рис. 1с, в формировании высшей гармоники наряду со спин-флуктуационным механизмом важную роль играет также кулоновское взаимодействие (плазменный механизм). Различие в знаке параметра B для электронно- и дырочно-допированных купратов в работе [6] связывалось с различием поверхностей Ферми. В дополнение к этому мы обращаем внимание на различие спектров коллективных спиновых возбуждений. Если в дырочно-допированных купратах он имеет форму вертикального сечения песочных часов (“*hour-glass dispersion*”), то в электронно-допированных купратах это форма вертикального сечения затупившегося карандаша (“*pencil-shape form*”) [18–20]. Кулоновское взаимодействие мешает d -типу спаривания, но по-разному на различных участках контура Ферми, вследствие чего способствует появлению высшей гармоники (рис. 1с). Суперобменное взаимодействие, будучи короткодействующим, как известно [22, 23], способствует d -типу спаривания носителей тока. Решение только при учете суперобменного взаимодействия, перенормированного трехцентровыми корреляциями, аппроксимируется с помощью $\cos(2\phi)$ ($B = 1$). Вместе с тем следует иметь в виду, что его нельзя отбрасывать при исследовании причин происхождения высшей гармоники в дисперсии сверхпроводящей щели. Это можно пояснить следующим образом. Парциальные вклады в параметр щели в (16) входят в виде квадрата суммы. Уравнение нелинейно. В процессе самосогласованного решения уравнения (15) проявляются детали “интерференции” различных механизмов и, как следствие это-

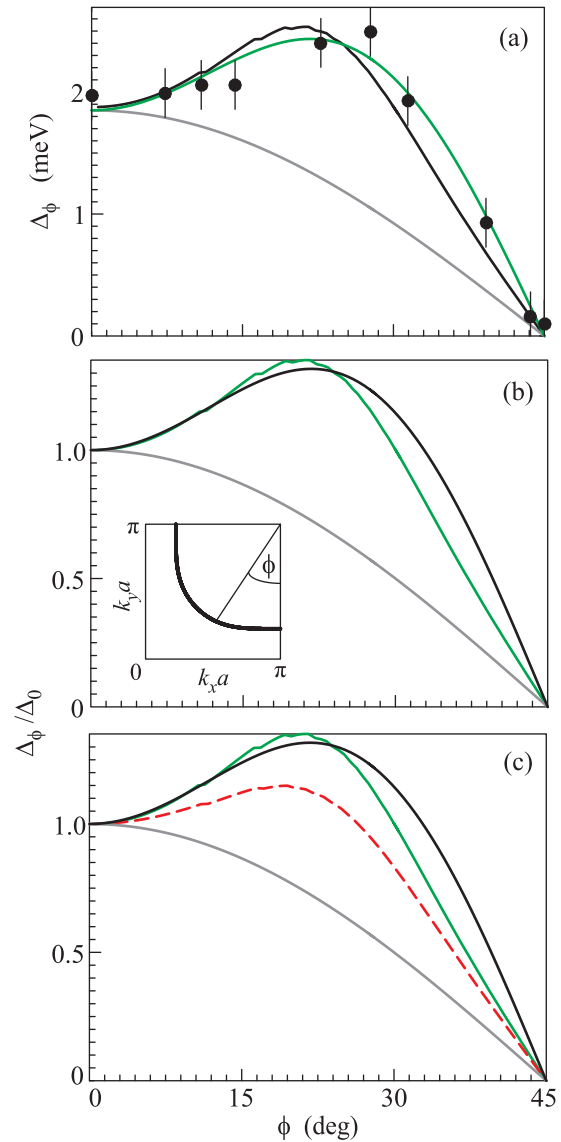


Рис. 1. (Цветной онлайн) Дисперсия сверхпроводящей щели вдоль фрагмента контура Ферми. Символы с погрешностями изменений из экспериментальной работы [5] для $\text{Pr}_{0.89}\text{LaCe}_{0.11}\text{CuO}_4$. Зеленым цветом представлены результаты решения уравнения (15) при учете всех механизмов спаривания, описанных в тексте. Серым – при $B = 1$, черным – при $B = 1.43$ изображены графики функции $\Delta_\phi = \Delta_0 (B \cos(2\phi) + (1 - B) \cos(6\phi))$, изменение угла ϕ вдоль контура Ферми поясняется на рис. 1б. (с) – При решении уравнения (15) “отключено” кулоновское взаимодействие (красная пунктирная линия)

го, отбрасывание одного из них искажает значения амплитуд обоих гармоник. Влияние фононного взаимодействия на высшую гармонику оказалось незначительно, однако оно важно, как уже это отмечалось [9], для понимания происхождения изотопического эффекта.

В заключение интересно сопоставить результаты полученные для дырочно- и электронно-допированных купратов.

В работах [24–26] считается, что основным механизмом спаривания в дырочно-допированных купратах является спин-флуктуационное, а роль кулоновского и суперобменного сводится к взаимному ослаблению друг друга. В работе [7] схожая интерпретация – доминирующими в d -типе спаривания считаются спин-флуктуационный и суперобменный, а кулоновский ослабевает первые два. Определяющие же вклады в высшую гармонику связаны с спин-флуктуационным и фононным механизмами спаривания.

В электронно-допированных купратах спин-флуктуационное и суперобменное также, как и в дырочно-допированных купратах, при допировании близком к оптимальному, способствует d -типу спаривания. Кулоновское взаимодействие и трехцентровые корреляции мешают им. Высшая гармоника в дисперсии сверхпроводящей щели формируется в результате совместного действия спин-флуктуационного и кулоновского механизмов.

Работа М.А.Малахова поддержана за счет средств субсидии, выделенной Казанским (При-волжским) федеральным университетом для выполнения госзадания в сфере научной деятельности, проект # 3.2166.2017/4.6.

1. J. Mesot, M.R. Norman, H. Ding, M. Randeri, J.C. Campuzano, A. Paramekanti, H.M. Fretwell, A. Kaminski, T. Takeuchi, T. Yokoy, T. Sato, T. Takahashi, T. Mochiku, and K. Kadowaki, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 840 (1999).
2. S.V. Borisenko, A.A. Kordyuk, T.K. Kim, S. Legner, K.A. Nenkov, M. Knupfer, M.S. Golden, J. Fink, H. Berger, and R. Follath, *Phys. Rev. B* **66**, 140509 (2002).
3. Y. Kohsaka, C. Taylor, P. Wahl, A. Schmidt, J. Lee, K. Fujita, J.W. Alldredge, K. McElroy, J. Lee, H. Eisaki, S. Uchida, D.-H. Lee, and J.C. Davis, *Nature* **454**, 1072 (2008).
4. G. Blumberg, A. Koitzsch, A. Gozar, B.S. Dennis, C.A. Kendziora, P. Fournier, and R.L. Greene, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 107002 (2002).
5. H. Matsui, K. Terashima, T. Sato, T. Takahashi, M. Fujita, and K. Yamada, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 017003 (2005).
6. D. Parker and A.V. Balatsky, *Phys. Rev. B* **78**, 214502 (2008).
7. M.V. Eremin and M.A. Malakhov, *JETP Lett.* **105**, 710 (2017).
8. В.В. Вальков, Т.А. Валькова, Д.М. Дзедзисашвили, С.Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 450 (2002) [*JETP Lett.* **75**, 378 (2002)].
9. М.М. Коршунов, С.Г. Овчинников, Ф.В. Шерман, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 45 (2004) [*JETP Lett.* **80**, 39 (2004)].
10. М.В. Еремин, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 322 (2017) [*JETP Lett.* **105**, 710 (2017)].
11. Р.О. Зайцев, В.А. Иванов, *ФТТ* **29**, 2554 (1987) [*JETP Lett. Suppl.* **46**, 116 (1987)].
12. R. O. Zaitsev and V. F. Ivanov, *Int. J. Mod. Phys. B.* **5**, 153 (1988).
13. T. Dahm, V. Hinkov, S.V. Borisenko, A.A. Kordyuk, V.B. Zabolotnyy, J. Fink, B. Buchner, D.J. Scalapino, W. Hanke, and B. Keimer, *Nature Phys.* **5**, 217 (2009).
14. М.В. Еремин, М.А. Малахов, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 13 (2016) [*JETP Lett.* **104**, 15 (2016)].
15. В.Л. Гинзбург, Д.А. Киржниц, *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости*, Наука, М. (1977).
16. F. Becca, M. Tarquini, M. Grilli, and C. Di Castro, *Phys. Rev. B* **54**, 12443 (1996).
17. М.В. Еремин, Д.С. Кочергин, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 119 (2018) [*JETP Lett.* **108**, 132 (2018)].
18. M. Fujita, M. Matsuda, B. Fak, C.D. Frost, and K. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 093704 (2006).
19. M. Fujita, K. Shigiya, J. Kaminaga, M. Nakagawa, M. Enoki, and K. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80**, SB029 (2011).
20. M. Fujita, H. Hiraka, M. Matsuda, M. Matsuura, J.M. Tranquada, S. Wakimoto, G. Xu, and K. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 011007 (2012).
21. A.W. Sandvik, D.J. Scalapino, and N.E. Bickers, *Phys. Rev. B* **69**, 094523 (2004).
22. P.W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987).
23. N.M. Plakida, *High-Temperature Cuprate Superconductors. Experiment, Theory, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2010).
24. N.M. Plakida and V.S. Oudovenko, *Phys. Rev. B* **59**, 11949 (1999).
25. N.M. Plakida, L. Anton, S. Adam, and Gh. Adam, *J. Exp. Theor. Phys.* **97**, 331 (2003).
26. N.M. Plakida, *Physica C: Superconductivity and its Applications* **531**, 39 (2016).