

Структурная модель взаимосвязи сейсмических скейлингов и обобщенный скейлинговый закон сейсмичности

И. Р. Стаховский¹⁾

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 123242 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 мая 2019 г.

После переработки 14 мая 2019 г.

Принята к публикации 16 мая 2019 г.

Представлена математическая модель согласования скейлингов двух мультифрактальных полей, индуцируемых мультипликативными каскадами. Выведены соотношения, связывающие параметры локальных и глобальных скейлингов таких полей. Модель применена для описания взаимосвязи скейлингов пространственных распределений эпицентров микроземлетрясений и их сейсмической энергии, а также скейлинга повторяемости землетрясений. Показано, что для реальных сейсмических распределений, моделируемых мультифрактальными полями, выведенные соотношения выполняются. Эти соотношения, связывающие все известные сегодня формы сейсмических скейлингов (кроме временного), предложено рассматривать как новый сейсмический закон – обобщенный скейлинговый закон сейсмичности.

DOI: 10.1134/S0370274X19120105

1. Введение. Сейсмогенерирующая система – пример существенно неравновесной и нелинейной природной физико-химической системы, эволюция которой подчинена нескольким формам скейлинга. Это прежде всего скейлинг повторяемости землетрясений (закон Гутенберга–Рихтера [1]):

$$E \propto N^{-\omega}, \tag{1}$$

где N – число землетрясений с сейсмической энергией E , ω – константа. Закон Гутенберга–Рихтера можно привести к виду:

$$E_{\text{sum}} \propto N_{\text{sum}}^{\omega}, \tag{2}$$

где E_{sum} – суммарная сейсмическая энергия всех событий представительного множества землетрясений, N_{sum} – суммарное число событий в этом множестве. Сейсмический процесс обладает также локальными и глобальными скейлингами пространственных распределений эпицентров землетрясений и сейсмической энергии, что установлено с помощью мультифрактального анализа данных сейсмических каталогов [2–4]). Эти статистические характеристики относятся к одному и тому же физико-химическому процессу, что позволяет предполагать существование более общих соотношений, связывающих частные формы сейсмического скейлинга между собой. Установление взаимосвязей между частными формами скейлинга имеет важное значение для теории сей-

смического процесса. Ниже показано, что для установившегося сейсмического режима такие соотношения могут быть выведены методами математического моделирования структурной организации пространственных распределений сейсмичности, а также могут быть напрямую проверены с использованием данных сейсмологических каталогов.

2. Модель согласования скейлингов. Для модельной генерации мультифрактальных полей воспользуемся такой итерационной процедурой, как мультипликативный каскад (предложенной изначально для моделирования турбулентности [5–7]). В данном случае его можно определить следующим образом. Единичный D -мерный отрезок подвергается λ^D -адическому разбиению, где λ – целое число, $\lambda \geq 2$. На первой итерации каждому i -тому элементу разбиения сопоставляется положительный множитель m_j , соответственно, все m_j образуют конечный набор чисел или начальных множителей, удовлетворяющих условиям:

$$0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{\lambda^D} < 1 \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{\lambda^D} m_j = 1. \tag{4}$$

На второй итерации каждый элемент разбиения вновь подвергается λ^D -адическому разбиению и каждому вновь образованному элементу вновь сопоставляется один из начальных множителей. Результатом мультипликативной процедуры на второй итерации являются произведения множителей “материнского”

¹⁾e-mail: stakhov@ifz.ru

и “дочернего” элементов разбиения. На последующих итерациях процедура повторяется. Обозначим через k номер итерации. На k -той итерации i -тому элементу разбиения сопоставляется произведение $\prod m_j^{k\varphi_j}$, где φ_j – относительные частоты, с которыми множители m_j присутствуют в этих произведениях. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{\lambda^{kD}} \prod m_j^{k\varphi_j} = 1 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (5)$$

то величины

$$p_i = \prod m_j^{k\varphi_j} \quad (6)$$

могут рассматриваться как доли некоторой мультиномиальной меры P , сосредоточенные на i -тых элементах разбиения (в i -тых боксах масштабной сетки). Каждая последующая итерация модулирует наследуемое с предыдущего масштабного уровня распределение меры, повышая перемежаемость распределения. Сингулярная, нигде не дифференцируемая мера P в пределе $k \rightarrow \infty$ является мультифракталом, в том числе и при произвольных перестановках множителей “дочерних” боксов в рамках “материнского” бокса. Мультипликативные генераторы позволяют получать бесконечное разнообразие самоподобных распределений, характеризуемых индексами сингулярности a_i (локальный скейлинг) и спектрами сингулярностей $f(a)$ (глобальный скейлинг). В общем случае множители мультипликативного каскада могут быть и случайными числами, однако в рамках данной работы приведенного определения достаточно.

Индексы сингулярности мультифрактальной меры определяются выражением (теория подробно изложена в [4]):

$$a_i = \lim_{r \rightarrow 0} (\ln p_i / \ln r), \quad (7)$$

где $r = \lambda^{-k}$ – размер бокса сетки, т.е. масштаб. В дальнейшем будем рассматривать только двумерные распределения. Кумулянт-генерирующая функция:

$$\tau(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^N p_i^q(r) \right)}{\ln(1/r)}, \quad (8)$$

где N – общее число непустых боксов сетки, q – порядок момента меры, для 2D-распределения, индуцируемого мультипликативным каскадом, равна:

$$\tau(q) = \frac{\ln \left(\sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q \right)}{\ln \lambda}. \quad (9)$$

Проведя преобразование Лежандра $\left(a = -\frac{d}{dq} \tau(q); f(a) = \tau(q) + qa \right)$, получаем выражения для спектра сингулярностей мультифрактального поля, индуцируемого мультипликативным каскадом:

$$a(q) = \frac{\sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q \ln m_j}{\ln \lambda \sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q}, \quad (10)$$

$$f(a(q)) = \frac{\ln \left(\sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q \right)}{\ln \lambda} + qa(q). \quad (11)$$

Параметрические уравнения (10)–(11) позволяют построить $f(a)$ -спектр мультифрактального поля, индуцируемого мультипликативным каскадом с заданными значениями множителей m_j , при изменении порядка момента в диапазоне $-\infty < q < +\infty$.

Два модельных мультифрактальных поля, индуцируемых мультипликативными каскадами, могут иметь структурно согласованные скейлинги. Оригиналом для такой модели являются, например, мультифрактальные поля, моделирующие пространственные распределения сейсмических эпицентров и сейсмической энергии. Пусть два мультипликативных $2D$ -генератора Γ^S и Γ^E индуцируют два мультифрактальных поля – P^S , моделирующее пространственное распределение эпицентров землетрясений (сейсмическое поле), и P^E , моделирующее пространственное распределение сейсмической энергии (сейсмоэнергетическое поле). Далее верхний индекс S будет обозначать принадлежность параметра к сейсмическому полю, а E – к сейсмоэнергетическому. Свяжем генераторы Γ^S и Γ^E следующими условиями согласования скейлингов: 1) мультипликативные каскады, индуцирующие модельные поля, должны обладать одной и той же структурой, т.е. $\lambda^S = \lambda^E$; 2) между множителями мультипликативных каскадов с одними порядковыми индексами j устанавливается взаимно-однозначное соответствие $m_j^S \leftrightarrow m_j^E$, т.е. при построении модельных полей могут использоваться только попарно сопряженные перестановки множителей. Численные же значения множителей свяжем условием вида $m_j^E \propto (m_j^S)^\omega$, что эквивалентно учету в модели закона Гутенберга–Рихтера в форме (2), т.е.:

$$m_j^E = c(m_j^S)^\omega, \quad (12)$$

где c – коэффициент пропорциональности. Мультипликативные каскады адекватно передают свойства

диссипативных структур, возникающих в многокомпонентных системах в условиях неравновесности (например, масштабную инвариантность сейсмических структур), поэтому перечисленные условия позволяют связать пространственные сейсмические скейлинги со скейлингом повторяемости землетрясений и выразить значения параметров одного поля через значения параметров другого поля.

С учетом (6), (7) и (12) можем записать:

$$a_i^S = \frac{\ln(\prod(m_j^S)^{\varphi_j})}{\ln(1/\lambda)}, \quad (13)$$

$$a_i^E = \frac{\omega \ln(\prod(m_j^S)^{\varphi_j}) + \ln c}{\ln(1/\lambda)}. \quad (14)$$

Благодаря условиям 1) и 2), множества боксов масштабной сетки в пределе $r \rightarrow 0$ можно представить как суперпозицию подмножеств, имеющих в обоих полях общие значения фрактальных размерностей, но различающихся долями мер, сосредоточенных на элементах этих подмножеств. Иными словами, боксы масштабной сетки модельных полей с одним номером i различаются значениями индексов сингулярности, однако при этом в множествах боксов они принадлежат подмножествам, которые в структурах обоих полей характеризуются одним значением фрактальной размерности. Следовательно, с учетом выражений (13) и (14) два модельных поля оказываются связаны соотношениями:

$$a_i^E = \omega a_i^S + \frac{\ln c}{\ln(1/\lambda)}, \quad (15)$$

$$f(a_i^E) = f(a_i^S). \quad (16)$$

В соответствии с условиями модели индексы сингулярности модельных полей в каждой точке связаны линейно (15), причем коэффициентом пропорциональности является параметр ω – показатель степени из формул (1)–(2). Таким образом, уравнение (16) связывает спектры сингулярностей модельных полей аффинными преобразованиями растяжения и сдвига.

3. Методы проверки модельных уравнений и исходные данные. Поскольку второе слагаемое в правой части уравнения (15) не содержит переменных, перепишем уравнения (15)–(16) в виде:

$$a_i^E = \omega a_i^S + \text{const}, \quad (17)$$

$$f(a_i^E) = f(a_i^S), \quad (18)$$

где слагаемое const будет иметь смысл эмпирической константы. Модельные соотношения (17)–(18) могут

быть подвергнуты прямой численной проверке с использованием данных сейсмологических каталогов. Для численных расчетов воспользуемся данными Южно-Калифорнийского сейсмологического каталога (каталога SCEDC – Southern California Earthquake Data Center). Одна из самых сейсмоактивных областей, информация о сейсмичности которой попадает в каталог SCEDC, – север мексиканского штата Баха Калифорния (Baja California), граничащего с США. В этой области был выделен полигон размером 80×80 км с ориентацией сторон субширотно и субмеридионально с центром в точке с координатами 32.28° N, 115.29° W. 4-го апреля 2010 г. в этой точке находился эпицентр сильного землетрясения, получившего название землетрясения Северная Баха (Northern Baja, испанское название – Sierra El Mayor Cucarahn) [8]. Магнитуда землетрясения составила $M = 7.2$, глубина гипоцентра 10 км. Землетрясение сопровождалось многочисленными афтершоками, затихшими к осени 2010 г. [9]. После этого сейсмический процесс в границах выбранного полигона продолжился в спокойном установившемся режиме. Используемая в расчетах выборка данных каталога для рассматриваемого полигона охватывала период времени 01.01.2011–31.12.2018 и содержала информацию о 1696-и мелкомасштабных сейсмических событиях в представительном диапазоне магнитуд $2.0 \leq M \leq 5.09$. Глубины гипоцентров этих событий не превышали 20 км (с единичными исключениями).

Для целей мультифрактального анализа данных каталога территория полигона покрывалась ренормируемой масштабной сеткой квадратных непересекающихся боксов. Пространственные распределения эпицентров землетрясений и сейсмической энергии моделировались мерами \mathbf{P}^S и \mathbf{P}^E , где верхний индекс S соответствует сейсмическому полю (распределению эпицентров), а E – сейсмоэнергетическому полю (распределению сейсмической энергии). Содержание этих мер в i -тых боксах масштабной сетки оценивалось с помощью нормировки:

$$\mathbf{p}_i^S = N_i/N_0, \quad (19)$$

$$\mathbf{p}_i^E = E_i/E_0, \quad (20)$$

где N_i – число событий в i -том боксе, N_0 – общее число событий в выборке, E_i – общая величина сейсмической энергии в i -том боксе, E_0 – общая величина сейсмической энергии всех событий в выборке, i – порядковый индекс боксов. При пересчете магнитуд в энергии использовалась формула Бата [10]:

$$\lg E = 5.24 + 1.44M, \quad (21)$$

где E – сейсмическая энергия (Дж), M – магнитуда по поверхностным волнам. Кумулянт-генерирующая функция (8) определялась с помощью последовательного неоднократного ренормирования масштабной сетки. Далее с помощью численного преобразования Лежандра осуществлялся переход к переменным a и $f(a)$.

4. Результаты расчетов. Рисунок 1 представляет зависимость (1) для исследовавшейся выборки данных (традиционный для сейсмологии график повторяемости землетрясений, построенный в энергетической форме). Прямая линия на рис. 1 – график

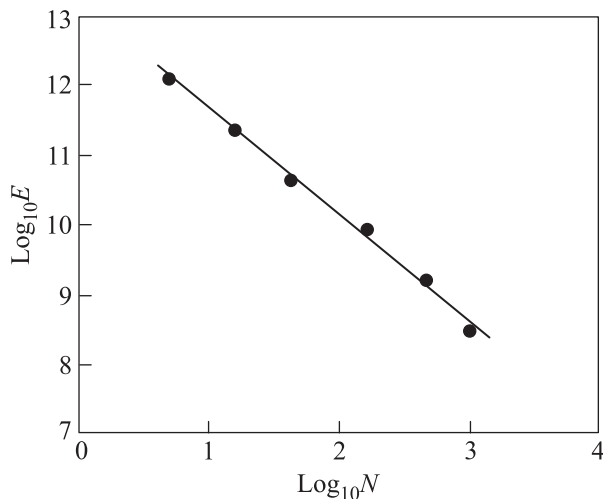


Рис. 1. График повторяемости землетрясений для исследовавшейся выборки. Сейсмическая энергия землетрясений E выражена в джоулях, N – число событий с энергией E . Точки (данные каталога) рассчитаны с шагом в 0.5 единицы магнитуды

линейной регрессии, аппроксимирующий данные каталога (точки). Абсолютное значение коэффициента регрессии можно рассматривать как оценку величины параметра ω , полученную с помощью построения графика повторяемости (наклон графика повторяемости). В данном случае $\omega = 1.52\dots$

Заметим, что следствием линейной зависимости (17) является равенство:

$$\omega = (a_{i_1}^E - a_{i_2}^E) / (a_{i_1}^S - a_{i_2}^S), \quad (22)$$

где i_1 и i_2 – произвольные точки сейсмического и сейсмоэнергетического полей, имеющие одинаковые координаты. В частности, если исходные данные достаточно представительны для того, чтобы максимальные и минимальные значения индексов сингулярности полей относились к одним и тем же боксам

масштабной сетки, то формула (22) может быть записана в виде:

$$\omega = (a_{\max}^E - a_{\min}^E) / (a_{\max}^S - a_{\min}^S), \quad (23)$$

где a_{\max} и a_{\min} – максимальные и минимальные значения индексов сингулярности соответствующих полей. Однако в силу нехватки данных форма правых ветвей $f(a)$ -спектров, построенных по экспериментальным данным, как правило оказывается искажена (форма правых ветвей $f(a)$ -спектров определяется боксами масштабной сетки с наименьшим содержанием меры), поэтому целесообразно использовать формулу (22) в виде:

$$\omega = (a_{\text{ex}}^E - a_{\min}^E) / (a_{\text{ex}}^S - a_{\min}^S), \quad (24)$$

где a_{ex} – значения индексов сингулярности экстремумов $f(a)$ -спектров. В этом случае значение параметра ω определяется только по левым (надежным) ветвям $f(a)$ -спектров.

На рисунке 2 представлены $f(a)$ -спектры сейсмического (точки) и сейсмоэнергетического (сплошная

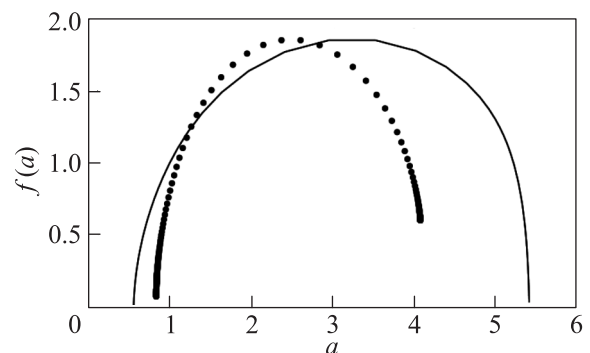


Рис. 2. Спектры сингулярностей сейсмического поля (точки) и сейсмоэнергетического поля (сплошная линия) для исследовавшейся выборки

линия) полей, построенных для исследовавшейся выборки (спектры вычислены в диапазоне $-30 \leq q \leq 30$ с шагом $\Delta q = 0.15$). Численные значения параметров $f(a)$ -спектров составили: $a_{\max}^E = 5.40\dots$, $a_{\min}^E = 0.55\dots$, $a_{\max}^S = 4.06\dots$, $a_{\min}^S = 0.83\dots$. Подставляя эти значения в (23), получаем вторую оценку значения параметра ω : $\omega = 1.50\dots$, причем в данном случае ω (“наклон графика повторяемости в энергетической форме”) определен без построения графика повторяемости, т.е. на основе анализа исключительно пространственных распределений сейсмичности.

Из-за нехватки данных (неизбежной при анализе современных каталогов) форма правой ветви $f(a)$ -спектра сейсмоэнергетического поля на рис. 2 заметно искажена (график резко асимметричен), а правая

ветвь $f(a)$ -спектра сейсмического поля претерпевает разрыв скейлинга (ветвь не может быть доведена до оси абсцисс). Воспользовавшись формулой (24), можно рассчитать третью оценку величины параметра ω по левым ветвям спектров, которая в данном случае составила $\omega = 1.56\dots$

Уравнение (18) имеет простой геометрический смысл: с помощью преобразований растяжения и сдвига один $f(a)$ -спектр (рис. 2) может быть преобразован в другой. Подбор параметров растяжения ω и сдвига const может быть осуществлен разными способами в зависимости от метода минимизации невязок между спектрами (“наилучший” способ предложить едва ли возможно). Учитывая сложную форму спектров, подбор параметров растяжения и сдвига в данном случае реализовывался не с помощью формальных методов, подобных методу наименьших квадратов, методу Колмогорова или аналогичным методам, а программно, с помощью компьютерного перебора значений, минимизирующего невязку между вычисленными точками спектров (поскольку абсциссы этих точек не совпадают).

На рисунке 3 показан $f(a)$ -спектр сейсмоэнергетического поля (сплошная линия) и $f(a)$ -спектр сейсмического поля (точки), преобразованный в соответствии с соотношениями (17)–(18), т.е. подвергнутый преобразованиям растяжения и сдвига с параметром растяжения $\omega = 1.54\dots$ (тем самым, получаем четвертую оценку величины параметра ω) и параметром сдвига $\text{const} = -0.705\dots$. Спектры на рис. 3 чрезвычайно близки в окрестностях экстремумов

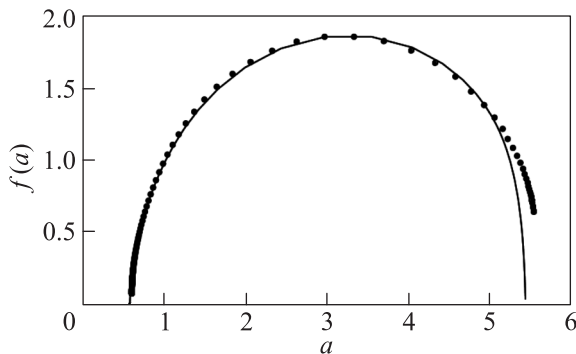


Рис. 3. Результат наложения спектра сингулярностей сейсмического поля (точки) после преобразования растяжения и сдвига на спектр сингулярностей сейсмоэнергетического поля (сплошная линия)

и в своих левых ветвях. Нижние участки правых ветвей $f(a)$ -спектров расходятся, однако это область максимального искажения формы ветвей, вызванного нехваткой данных и разрывом скейлинга, вызван-

ного нехваткой данных, поэтому расхождение ветвей спектров в этой области физически бессодержательно (т.е. обусловлено исключительно лимитированными метрологическими возможностями сейсмической сети).

Как видим, оценки значения параметра ω , полученные четырьмя независимыми методами, различаются только в третьем знаке (в пределах 4%), а $f(a)$ -спектры сейсмического и сейсмоэнергетического полей могут быть преобразованы один в другой с помощью аффинных операций растяжения и сдвига в статистически представительном диапазоне значений индексов сингулярности. Это позволяет утверждать, что с учетом погрешностей исходных данных сейсмический процесс в рамках исследованного полигона подчиняется соотношениям (17)–(18). Другой пример выполнения соотношений (17)–(18) в реальном сейсмическом процессе приведен в работе [4].

5. Выводы. Соотношения (17)–(18) показывают взаимосвязь всех известных на сегодня форм сейсмического скейлинга (кроме временного). Соотношение (17) связывает три формы сейсмического скейлинга: скейлинг повторяемости землетрясений ω , локальный скейлинг пространственного распределения эпицентров землетрясений a_i^S и локальный скейлинг пространственного распределения сейсмической энергии a_i^E . Соотношение (18) связывает глобальные скейлинги сейсмического и сейсмоэнергетического полей. Выполнение соотношений (17)–(18) в условиях реального сейсмического процесса, находящегося в установившемся режиме, подтверждает и физический смысл геометрических предпосылок согласования скейлингов, заложенных в проверяемую модель в виде условий 1) и 2) (раздел 2).

Взаимосвязь сейсмических скейлингов (17)–(18) существенно отличается от закона Гутенберга–Рихтера тем, что устанавливает соотношения между параметрами пространственных распределений эпицентров землетрясений и их сейсмической энергии (закон Гутенберга–Рихтера (1) не содержит пространственных параметров сейсмичности). По сути, закон Гутенберга–Рихтера оказывается частным случаем более общих соотношений (17)–(18). Возможность определения “наклона графика повторяемости” ω без построения самого графика повторяемости (а только с помощью анализа пространственных распределений сейсмичности) качественно расширяет физический смысл параметра ω по сравнению с его значением в формуле (1): параметр ω связывает сейсмическое и сейсмоэнергетическое поля в каждой точке, где значения полей отличны от нуля.

Результаты работы позволяют говорить, что взаимосвязь сейсмических скейлингов имеет характер закономерности, не зависящей от тектоники сейсмоактивного региона. Соотношения (17)–(18) характеризуют неравновесную природу сейсмогенерирующей системы, а параметр ω можно определить как количественную меру “степени неравновесности” сейсмического процесса. По всей видимости, соотношение (17)–(18) следует воспринимать как универсальный закон сейсмического процесса для установившегося сейсмического режима. Этот закон может быть назван обобщенным скейлинговым законом сейсмичности.

1. B. Gutenberg and C.F. Richter, *Annali di Geofisica* **9**(1), 15 (1956).
2. M. B. Geilikman, T. V. Golubeva, and V. F. Pisarenko, *Earth Planet. Sci. Lett.* **99**(1/2), 127 (1990).
3. C. Hooge, S. Lovejoy, S. Pecknold, F. Malouin, and D. Schertzer, *Fractals* **2**(3), 445 (1994).
4. И. П. Стаховский, *УФН* **187**(5), 505 (2017).
5. L. F. Richardson, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **110**(756), 709 (1926).
6. A. Obukhov, *J. Geophys. Res.* **67**, 3011 (1962).
7. A. N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
8. E. Hauksson, J. Stock, K. Hutton, W. Yang, J. A. Vidal-Villegas, and H. Kanamori, *Pure and Applied Geophysics* **168**, 1255 (2011).
9. R. R. Castro, J. G. Acosta, V. M. Wong, A. Perez-Vertti, A. Mendoza, and L. Inzunza, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **101**(6), 3072 (2011).
10. M. Bath, *Introduction to seismology*, Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart (1973).