

Реализация топологически нетривиальных фаз, каскад квантовых переходов и идентификация майорановских мод в киральных сверхпроводниках и нанопроволоках (Миниобзор)

В. В. Вальков¹⁾, В. А. Мицкан, А. О. Злотников, М. С. Шустин, С. В. Аксенов

*Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр
“Красноярский научный центр Сибирского отделения РАН”, 660036 Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 11 июня 2019 г.

После переработки 11 июня 2019 г.

Принята к публикации 11 июня 2019 г.

В обзоре рассмотрены вопросы реализации и экспериментальной идентификации топологически нетривиальных фаз в конденсированных средах. Приведены результаты исследования влияния сильного внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия на квантовый фазовый переход с изменением топологического индекса в ансамбле фермионов Хаббарда на треугольной решетке. Обсуждена нетривиальная топология фазы сосуществования киральной $d + id$ -сверхпроводимости и 120° спинового упорядочения в системе с треугольной решеткой и продемонстрировано формирование майорановских мод в такой фазе. Для открытой нанопроволоки со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания проанализирован каскад квантовых переходов, реализуемый при изменении магнитного поля или электрохимического потенциала. Показано, что в окрестности таких квантовых переходов проявляются аномалии магнето- и электрокалорических эффектов, которые могут использоваться для экспериментального тестирования материалов на существование в них топологически нетривиальных фаз. Для структуры полуметалл/сверхпроводящая проволока/полуметалл, находящейся в режиме слабой неравновесности, предсказан эффект переключения спин-поляризованного тока в фазе топологической сверхпроводимости.

DOI: 10.1134/S0370274X19140108

1. Введение. После первой волны теоретических исследований топологических изоляторов [1–3] и топологических сверхпроводников (ТС) [4–7], существование которых было предсказано для относительно простых систем, описываемых квадратичными формами по операторам вторичного квантования, возникли новые направления изучения топологически нетривиальных фаз (ТНФ) в конденсированных средах. Расширение области исследований было связано с несколькими факторами.

Один из них вытекал из необходимости рассмотрения моделей, более полно учитывающих реальные особенности материалов. В частности, представлялось актуальным исследование топологических фаз при учете кулоновского взаимодействия между фермионами. При этом часто оказывалось, что материалы, которые рассматривались как претенденты на реализацию в них топологических фаз, из-за значительного внутриатомного отталкивания электро-

нов являлись материалами с сильными электронными корреляциями [8–14].

Второй фактор определялся стремлением найти материалы, в которых топологические фазы реализовывались бы при более доступных в экспериментальном отношении условиях. С этой целью был инициирован поиск новых механизмов, индуцирующих нетривиальную топологию в сверхпроводниках. Если в первых работах по ТС с s -типом симметрии параметра порядка в нанопроволоках [6, 7] существенную роль играло одновременное влияние внешнего магнитного поля, спин-орбитального взаимодействия и наведенного за счет эффекта близости потенциала сверхпроводящего спаривания, то в недавних работах были проведены исследования твердотельных систем, в которых сверхпроводящее спаривание происходило за счет внутренних взаимодействий в материале [15–24].

Значительный интерес вызвали материалы, в которых сверхпроводящая фаза сосуществует со спиновым неколлинеарным упорядочением [17, 18]. В этом

¹⁾e-mail: vvv@iph.krasn.ru

случае для формирования сверхпроводящей фазы с нетривиальной топологией не требовалось присутствия спин-орбитального взаимодействия и внешнего магнитного поля. Это оказалось возможным вследствие того, что жесткая спин-фермионная корреляция обеспечивала смешивание состояний с различными проекциями спина.

Изучение условий реализации топологически нетривиальных фаз в материалах с сильными электронными корреляциями потребовало не только расширения арсенала математических методов, но и обобщения определения топологических индексов (ТИ), поскольку подходы, разработанные ранее для гамильтонианов, представляемых квадратичными формами по операторам вторичного квантования, становились неприменимыми [25, 26].

Исследование топологических систем неразрывно связано с поиском экспериментальных доказательств реализации нетривиальной фазы. В частности, актуальным является обнаружение на практике признаков, указывающих на существование майорановской моды (ММ) в системе, приготовленной из топологического сверхпроводника в геометрии открытых границ. В этом отношении перспективным является метод туннельной спектроскопии. Обнаруженные с его помощью характерные особенности вольт-амперной характеристики [27] трактовались как проявления ММ. В качестве топологической системы использовалась полупроводниковая проволока с сильной спин-орбитальной связью во внешнем магнитном поле и наведенным за счет эффекта близости потенциалом сверхпроводящего спаривания [7, 28]. Результаты работы [27] стимулировали бурный рост исследований по идентификации ММ, поскольку трактовка полученных данных по туннельной спектроскопии представлялась неоднозначной [29]. Поэтому актуальным представляется поиск альтернативных методов идентификации топологических фаз.

В работе сделан обзор недавних исследований по отмеченным выше проблемам реализации ТНФ в конденсированных средах. Рассмотрено влияние сильного внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия на топологические характеристики сверхпроводников с киральной симметрией параметра порядка и на топологические переходы между различными фазами (параграф 2). Результаты исследований возможности реализации нетривиальной топологии и ММ в фазе сосуществования киральной сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения в слоистых материалах с треугольной решеткой отражены в параграфе 3. Рабо-

ты, связанные со структурой основного состояния (ОС) квантовой проволоки со спин-орбитальным взаимодействием в топологической фазе, обсуждены в параграфе 4. В этом же параграфе описываются особенности магнетокалорического эффекта в рассмотренной нанопроволоке. В параграфе 5 приведены сведения по особенностям спин-поляризованного транспорта, связанным с наличием ММ в нанопроволоке.

2. Квантовый топологический переход в сверхпроводящей киральной $d + id$ фазе. Примером материала, в котором кулоновское взаимодействие между электронами качественно влияет на топологический переход в сверхпроводящей фазе, является интеркалированный водой кобальтит натрия $\text{Na}_x\text{CoO}_2 \cdot y\text{H}_2\text{O}$ [30, 31]. Без допирования электронной $3d^5$ конфигурации ионов Co^{4+} в октаэдрическом окружении с тригональным искажением соответствует заполнение четырьмя электронами нижнего орбитального дублета и одним электроном отщепленного орбитального синглета. Этот уровень вырожден по проекции спина, и в кристалле при сильном внутриатомном кулоновском отталкивании происходит хаббардовское расщепление на две подзоны. Нижняя подзона является заполненной. Поэтому основное состояние слоя CoO_2 соответствует антиферромагнитному диэлектрику Мотта.

При допировании происходит заполнение верхней хаббардовской подзоны. При конечных температурах в двумерной системе дальний магнитный порядок разрушен и в сверхпроводящей фазе его можно не учитывать.

Рассмотренный режим электронного допирования с заполнением верхней хаббардовской подзоны часто описывается $t - J$ моделью. В действительности при получении эффективной модели возникают трехцентровые слагаемые, которые оказываются существенными для описания сверхпроводящей фазы [32]. Поэтому ниже нами используется $t - J^* - V$ модель, в которой, кроме трехцентровых слагаемых \mathcal{H}_3 , будет учитываться межзельное кулоновское отталкивание. В представлении операторов Хаббарда [33, 34] гамильтониан имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T + \mathcal{H}_J + \mathcal{H}_{(3)} + \mathcal{H}_V, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{f\sigma} (\epsilon - \mu) X_f^{\sigma\sigma} + \sum_f (2\epsilon + U - 2\mu) X_f^{22},$$

$$\mathcal{H}_T = \sum_{fm\sigma} t_{fm} X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}2}, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_J = \frac{1}{2} \sum_{fm\sigma} J_{fm} (X_f^{\bar{\sigma}\sigma} X_m^{\sigma\bar{\sigma}} - X_f^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_m^{\sigma\sigma}),$$

$$\mathcal{H}_{(3)} = \sum_{\substack{fmg\sigma \\ (f \neq g)}} \frac{t_{fm} t_{mg}}{U} (X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\sigma\sigma} X_g^{\bar{\sigma}2} - X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} X_g^{\sigma2}), \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_V = \frac{1}{2} \sum_{f\delta} V (\hat{n}_f - \langle \hat{n}_f \rangle) \cdot (\hat{n}_{f+\delta} - \langle \hat{n}_{f+\delta} \rangle). \quad (4)$$

В этих выражениях \mathcal{H}_0 является оператором энергии электронов, находящихся на узлах треугольной решетки, \mathcal{H}_T и \mathcal{H}_J – кинетическое и обменное слагаемые, $\mathcal{H}_{(3)}$ описывает коррелированные перескоки, кулоновское отталкивание электронов на соседних узлах учитывается посредством слагаемого \mathcal{H}_V . Здесь использованы обычные обозначения операторов Хаббарда для верхней хаббардовской подзоны, ϵ – энергия одноэлектронного состояния, μ – химпотенциал ансамбля, U и V – параметры внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия электронов, соответственно. Оператор числа электронов на узле f задается выражением $\hat{n}_f = X_f^{\uparrow\uparrow} + X_f^{\downarrow\downarrow} + 2X_f^{22}$.

При учете обменной связи в пределах двух координационных сфер решение уравнения для сверхпроводящего параметра порядка с $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ симметрией записывается в виде суперпозиции

$$\Delta_d(q) = 2\Delta_{d1}^0 \varphi_{d1}(q) + 2\Delta_{d2}^0 \varphi_{d2}(q), \quad (5)$$

где базисные функции

$$\varphi_{d1}(q) = \cos q_y - \cos(\sqrt{3}q_x/2) \cos(q_y/2) + i\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}q_x/2) \sin(q_y/2), \quad (6)$$

$$\varphi_{d2}(q) = \cos \sqrt{3}q_x - \cos(\sqrt{3}q_x/2) \cos(3q_y/2) - i\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}q_x/2) \sin(3q_y/2)$$

соответствуют первой и второй координационным сферам [35]. Поскольку эти функции являются комплексными, то они обращаются в нуль не на линиях, а лишь в некоторых точках зоны Бриллюэна. При этом положение нодальных точек $\Delta_d(q)$ зависит от отношения амплитуд Δ_{d1}^0 и Δ_{d2}^0 (см. рис. 1). В случае, когда в $\Delta_d(q)$ дает вклад только базисная функция первой координационной сферы φ_{d1} , нодальные точки находятся в центре и на краях зоны Бриллюэна, и контур Ферми не пересекает их ни при каких конечных концентрациях. Если $\Delta_{d1}^0 = 0$, а $\Delta_{d2}^0 \neq 0$, то существуют нодальные точки внутри зоны Бриллюэна. В общем случае отношение $\Delta_{d1}^0/\Delta_{d2}^0$ зависит от концентрации носителей заряда и параметров модели. При изменении концентрации возникает взаимная динамика контура Ферми и нодальных точек, в

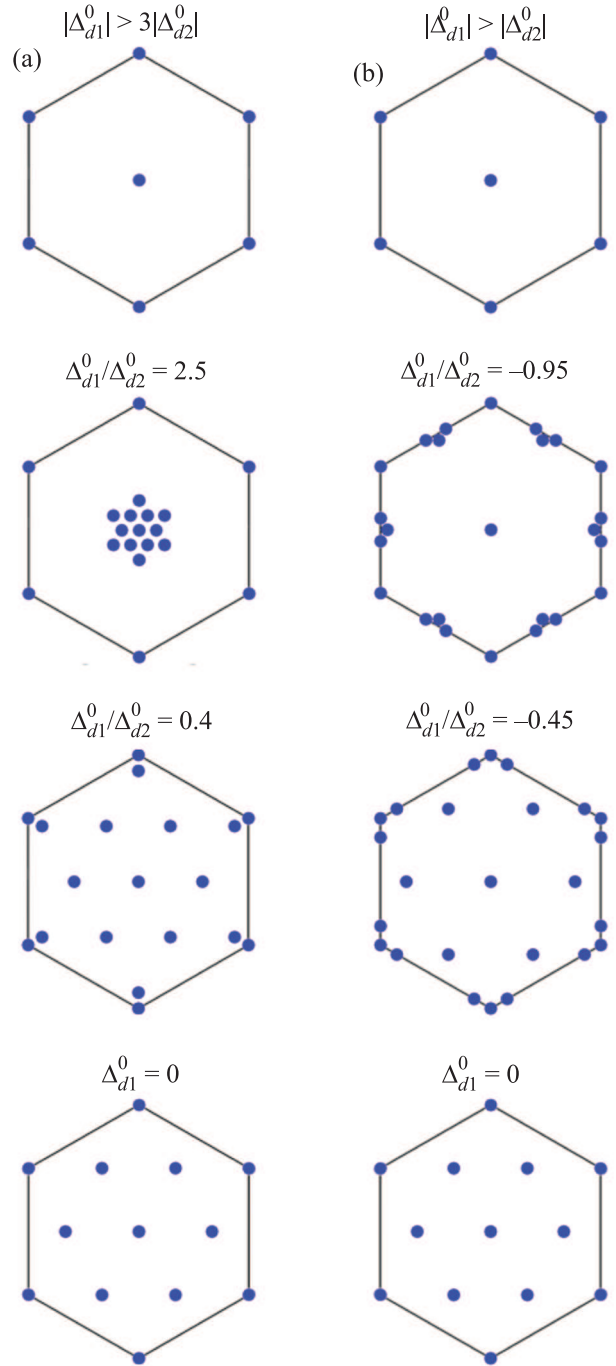


Рис. 1. (Цветной онлайн) Конфигурация нодальных точек $\Delta_d(q)$ при различных отношениях между Δ_{d1}^0 и Δ_{d2}^0 для совпадающих (а) и для противоположных (б) знаков

результате которой в системе при пересечении контуром Ферми нодальных точек реализуется квантовый топологический переход (КТП).

Важная роль межузельного кулоновского отталкивания фермионов в реализации КТП проявляется

ся через механизм формирования нодальных точек $\Delta_d(q)$. Это взаимодействие, если говорить о главном его влиянии, стремится уничтожить сверхпроводящую фазу (здесь мы не обсуждаем высшие порядки теории возмущений, приводящие к механизму Кона–Латтинжера [36–38]). При этом взаимодействие между электронами, находящимися на ближайших узлах, имеет большее влияние на амплитуду сверхпроводящего спаривания Δ_{d1}^0 , тогда как кулоновское отталкивание для второй координационной сферы существенно сказывается на уменьшении значения Δ_{d2}^0 . В результате изменяется отношение $\Delta_{d1}^0/\Delta_{d2}^0$ и положение нодальных точек $\Delta_d(q)$ смещается. В этом заключается механизм влияния межузельного кулоновского взаимодействия на точку топологического перехода при изменении концентрации носителей в системе.

Из вида спектра возбуждений в сверхпроводящей фазе $E_q = \sqrt{\xi_q^2 + |\Delta(q)|^2}$ ($\xi_q = \varepsilon_q - \mu$, ε_q – энергия электрона в нормальной фазе) вытекает, что при пересечении контуром Ферми нормальной фазы нодальных точек $\Delta(q)$, спектр сверхпроводящей фазы становится бесщелевым.

Комплексный характер $\Delta_d(q)$ инициирует топологические особенности сверхпроводящей фазы. Введение единичного вектора $\mathbf{m} = \{m_x, m_y, m_z\}$ [39] с компонентами

$$m_x = \frac{\text{Re}\Delta_d(q)}{E_q}, \quad m_y = \frac{-\text{Im}\Delta_d(q)}{E_q}, \quad m_z = \frac{\xi_q}{E_q} \quad (7)$$

позволяет построить отображение между точками зоны Бриллюэна и точками двумерной сферы единичного радиуса. Тогда движению по зоне Бриллюэна сопоставляется движение по точкам такой сферы. Для идентификации различных гомотопических классов таких траекторий вводится степень отображения – топологический индекс [35]

$$Q = \frac{1}{8\pi} \sum_{\Delta} \mathbf{m}_1 \cdot [\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_3], \quad (8)$$

где суммирование проводится по всем треугольным плакетам, а вектора \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_3 вычисляются в вершинах плакетов. Значение Q отражает топологическую структуру сверхпроводящей фазы и связано с взаимным расположением нодальных точек $\Delta_d(q)$ и контура Ферми. При изменении концентрации, если происходит пересечение нодальных точек контуром Ферми нормальной фазы (рис. 2), то реализуется квантовый топологический переход [40, 41].

Как известно [42], ненулевые значения топологического инварианта Q в киральной сверхпроводящей

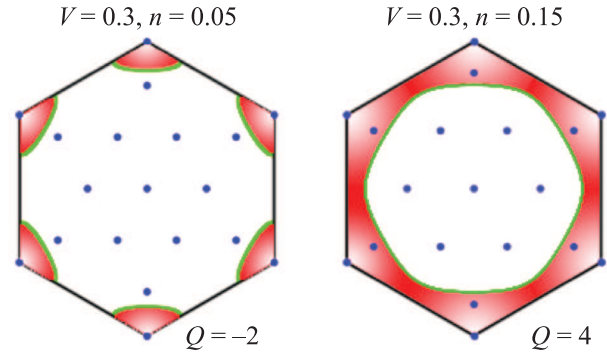


Рис. 2. (Цветной онлайн) Значения топологического индекса Q для двух конфигураций нодальных точек $\Delta_d(q)$ и контура Ферми. Параметры измеряются в единицах $|t_1|$: $J_1 = 0.3$, $J_2 = 0.2$, $t_2 = t_3 = 0$

фазе системы с периодическими граничными условиями свидетельствуют о наличии краевых состояний в аналогичной системе с открытыми границами. В следующем параграфе будет описан механизм формирования в спин-синглетной сверхпроводящей фазе с $d + id$ типом симметрии краевых состояний и ММ.

3. Майорановские моды в фазе сосуществования киральной сверхпроводимости и спинового упорядочения на треугольной решетке. Вскоре после того, как формирование ММ было предсказано в сверхпроводящих системах со спин-орбитальным взаимодействием в однородном магнитном поле [6, 7], было продемонстрировано, что аналогичную спин-орбитальной связи роль может играть внешнее неоднородное поле [43]. В этой связи, были предложены альтернативные системы для реализации ММ: 1) цепочка магнитных наночастиц с произвольными направлениями намагниченности на сверхпроводящей подложке [44]; 2) нанопроволоки с наведенной сверхпроводимостью в пространственно неоднородном магнитном поле [45]; 3) квазиодномерные системы с обменным взаимодействием Рудермана–Киттеля–Касуя–Йосиды и геликоидальным магнитным порядком в контакте со сверхпроводником [46, 47].

К другому классу систем, в которых индуцирование ММ происходит по аналогичному сценарию, относятся материалы с фазой сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения, например, HoMo_6S_8 и ErRh_4V_4 [17].

В работе [18] было показано, что если в соединении $\text{Na}_x\text{CoO}_2 \cdot y\text{H}_2\text{O}$ с треугольной решеткой при наличии киральной $d + id$ сверхпроводимости формируется страйповый магнитный порядок, то возникнут и ММ. Однако дальнейший анализ показал [48], что киральная сверхпроводимость не может сосуще-

ствовать со страйповым упорядочением спинов, но сосуществует с магнитным порядком, соответствующим 120° структуре. Более того, расчеты в рамках модели Хаббарда и $t - J$ модели демонстрируют реализацию именно 120° спинового упорядочения для треугольной решетки при малых уровнях допирования [49, 50]. Формирование фазы сосуществования киральной сверхпроводимости и 120° структуры в этой области допирования показано в работах [51, 52].

Преимущество данного механизма при поиске майорановских фермионов связано с отказом от создания сложных структур с эффектом близости, поскольку сверхпроводимость и магнитное упорядочение однородно сосуществуют во всем объеме образца благодаря внутренним взаимодействиям.

Для наглядности в рамках простой модели продемонстрируем реализацию нетривиальной топологии, а также появление ММ в фазе сосуществования киральной $d + id$ сверхпроводимости и 120° магнитного упорядочения на треугольной решетке [53]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{SC-NCO}} = & -\mu \sum_{l\sigma} a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} + \sum_{lm\sigma} t_{lm} a_{l\sigma}^\dagger a_{m\sigma} - \\ & - h(\mathbf{Q}) \sum_l \left(\exp(i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l) a_{l\uparrow}^\dagger a_{l\downarrow} + \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l) a_{l\downarrow}^\dagger a_{l\uparrow} \right) + \\ & + \sum_{lm} \left(\Delta_{lm} a_{l\uparrow}^\dagger a_{m\downarrow} + \Delta_{lm}^* a_{m\downarrow}^\dagger a_{l\uparrow} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{l\sigma}$ – оператор уничтожения электрона на узле l (представление Ванье) и проекцией спина σ , μ – химпотенциал, t_{fm} , Δ_{fm} – амплитуды перескоков электронов и сверхпроводящих спариваний, $h(\mathbf{Q})$ – параметр обменного поля, \mathbf{Q} – вектор магнитной структуры.

Гамильтониан (9) обладает электрон-дырочной симметрией и соответствует классу D [54]:

$$\Lambda H(\mathbf{k}) \Lambda = -H^*(-\mathbf{k} + \mathbf{Q}); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $H(\mathbf{k})$ – матрица гамильтониана Боголюбова–де Жена в квазиимпульсном представлении, O и I – нулевая и единичная матрицы.

Прямое следствие симметрии (10) является то, что с каждым значением $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ энергии возбуждений связывается значение $-\varepsilon_n(-\mathbf{k} + \mathbf{Q})$. Рассмотрим точки зоны Бриллюэна, для которых выполняется соотношение $\mathbf{k} = -\mathbf{k} + \mathbf{Q} + \mathbf{G}$, где \mathbf{G} – вектор обратной решетки. Будем называть их РНМ-точками (*particle-hole invariant momentum*) и обозначать через $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$. В топологии тора, при рассмотрении периодических граничных условий вдоль

обоих направлений решетки, имеется четыре РНМ-точки: $\mathbf{K}_{I, \dots, IV} = (-2\pi/3; -2\pi/3); (-2\pi/3; \pi/3); (\pi/3; -2\pi/3); (\pi/3; \pi/3)$.

Индикатором реализации топологически нетривиальной фазы, для которой ожидается формирование ММ, может служить отрицательная фермионная четность основного состояния (впервые на это было указано в [4]). В силу того, что состояния с квазиимпульсами \mathbf{k} и $-\mathbf{k} + \mathbf{Q}$ заполняются совместно и не изменяют четность ОС, достаточно проанализировать заполнение состояний в РНМ-точках. В РНМ-точке \mathbf{K}_I сверхпроводящий параметр порядка обращается в нуль и заполнение одного состояния с энергией $\varepsilon_n(\mathbf{K}_I) < 0$ происходит при условии $h > |\mu + 3t_1 - 6t_2 + 3t_3|$. Состояния в остальных РНМ-точках не заполняются при данном условии. В трех точках \mathbf{K}_{II-IV} гамильтониан сводится к гамильтониану сверхпроводника в однородном магнитном поле, а заполнение состояний происходит совместно при условии $h > \sqrt{(\mu + t_1)^2 + 4 \left(\Delta_{d1}^{(0)} - 2\Delta_{d2}^{(0)} \right)^2}$. Приведенные условия определяют области, в которых ОС представляется в виде суперпозиции состояний с нечетным числом фермионов и реализуется ТНФ.

Как известно [5], топологический \mathbb{Z}_2 инвариант (число Майорана \mathcal{M}) определяется через фермионную четность $P(\mathbf{K})$ основного состояния решетки в топологии тора

$$\mathcal{M} = \prod_{\mathbf{K}} P(\mathbf{K}), \quad (11)$$

где $P(\mathbf{K})$ вычисляется как знак пфаффиана матрицы Боголюбова–де Жена в представлении майорановских операторов. Значению $\mathcal{M} = -1$ отвечает ТНФ. При $\mathcal{M} = 1$ состояние системы топологически тривиальное и ММ не реализуются. Непосредственный расчет \mathcal{M} согласуется с полученными выше условиями реализации ТНФ на основе сравнительно простого анализа четности ОС.

В квазиодномерной системе, при рассмотрении периодических граничных условий вдоль одного из направлений решетки (топология цилиндра), ММ реализуются только при $K_2 = -2\pi/3$ и в тех же параметрических областях, что и ранее. Топологический инвариант в этом случае

$$\mathcal{M}(K_2) = P(K_2, K_1 = -2\pi/3) \cdot P(K_2, K_1 = \pi/3). \quad (12)$$

Линии границ фаз в координатах магнитное поле–химпотенциал с различными значениями числа Майорана показаны на рис. 3 жирными линиями. Вычисления проведены для следующих значений амплитуд сверхпроводящих спариваний: $\Delta_{d1}^{(0)} = 0.05|t_1|$,

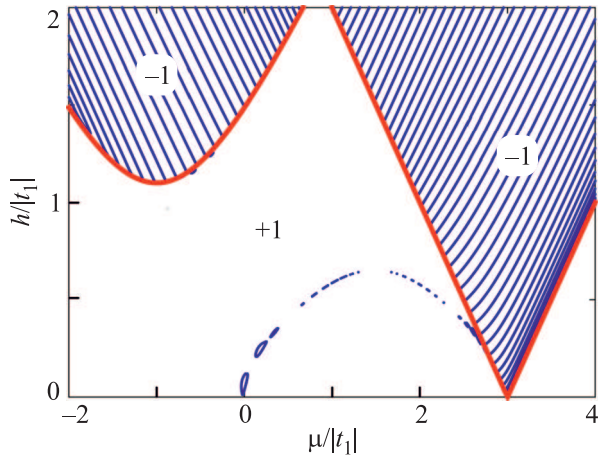


Рис. 3. (Цветной онлайн) Диаграмма состояний треугольной решетки в фазе сосуществования с различными значениями числа Майорана. Границы ТНФ показаны жирными линиями. Тонкими линиям соответствуют значения параметров системы, для которых в топологии цилиндра реализуются возбуждения с нулевой энергией

$\Delta_{d2}^{(0)} = 0.3|t_1|$ при $t_2 = t_3 = 0$. Тонкими линиями на графике (рис. 3) представлены параметрические условия реализации нулевых мод для решетки в топологии цилиндра при $K_2 = -2\pi/3$ с числом узлов $N_1 = 48$ вдоль направления \mathbf{a}_1 . Видно, что основная часть нулевых мод лежит в области параметров, отвечающей ТНФ системы в замкнутой геометрии. С увеличением N_1 все нулевые моды распределяются по областям с $M = -1$. Такие нулевые моды возникают и в других моделях квазиодномерных систем класса симметрии D. В следующих параграфах будет показано, как эти моды могут быть детектированы посредством измерения калорических эффектов и транспортных свойств.

Топологически устойчивые краевые состояния могут реализовываться и при $M = 1$. На их формирование указывают ненулевые значения \mathbb{Z} инварианта для двумерных систем (в том числе при учете взаимодействия), который может быть выражен через функции Грина [55, 25]:

$$\tilde{N}_3 = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2 \text{Sp} \left(G \partial_\mu G^{-1} \times \right. \\ \left. \times G \partial_\nu G^{-1} G \partial_\lambda G^{-1} \right), \quad (13)$$

где $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ – антисимметричный тензор Леви-Чивиты, $\partial_1 = \partial/\partial\omega$, $\partial_2 = \partial/\partial k_1$, $\partial_3 = \partial/\partial k_2$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В рассматриваемой системе невзаимодействующих электронов $G = [i\omega I - H(\mathbf{k})]^{-1}$.

Следует отметить, что при рассмотрении функций Грина кирального сверхпроводника без дальнего магнитного порядка выражение (13) сводится к хорошо известному определению для числа кручений (*winding number*) вектора \mathbf{m} , введенному в (7) и связанному с фазой Берри и числом Черна:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2 \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_1} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_2}. \quad (14)$$

Данное выражение эквивалентно введенному ранее ТИ (8).

В работе [56] для нецентросимметричных сверхпроводников класса симметрии D была установлена связь между \mathbb{Z}_2 -инвариантом (11) и ТИ в 2D случае (13). В рассматриваемой системе с магнитным порядком данное соотношение имеет аналогичный вид:

$$(-1)^{\tilde{N}_3} = M. \quad (15)$$

Отсюда следует, что ММ формируются в ТНФ с нечетным значением \tilde{N}_3 . Если \tilde{N}_3 – четное, то реализуются топологически защищенные краевые состояния, не относящиеся, однако, к майорановскому типу. Это согласуется с расчетом условий возникновения нулевых мод в топологии цилиндра.

Фазовая диаграмма с различными ТНФ в переменных химпотенциал-величина обменного поля приведена на рис. 4. Для каждой области, находя-

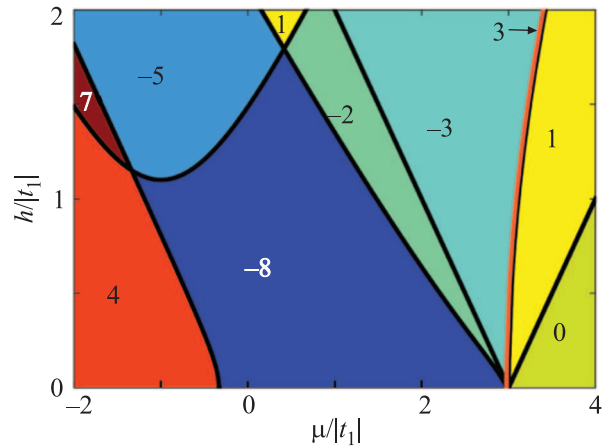


Рис. 4. (Цветной онлайн) Диаграмма топологических фаз со значениями инварианта \tilde{N}_3 (см. формулу (13))

щейся между двух граничных линий, реализуется свое значение ТИ \tilde{N}_3 , отмеченное на диаграмме. Сплошные линии получены из условий на наличие бесщелевых возбуждений в топологии тора. Параметры выбраны те же, что и для рис. 3. Видно, что увеличение химпотенциала приводит к ряду КТП.

Имеются существенные отличия при анализе нулей спектра возбуждений в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного магнитного порядка по сравнению со спектром, получаемым в теории Бардина, Купера, Шриффера (БКШ). Как отмечалось в параграфе 2, спектр БКШ обладает нулевой энергией на границах и в середине гексагональной зоны Бриллюэна только при пересечении химпотенциалом дна или потолка затравочной зоны электронов. В фазе сосуществования за счет обменного поля спектр может иметь нули в этих точках, когда химпотенциал лежит внутри зоны. Такая ситуация реализуется на рис. 4 при переходе из области с $\tilde{N}_3 = -2$ в область с $\tilde{N}_3 = -3$ и при переходе $\tilde{N}_3 = 1 \rightarrow \tilde{N}_3 = 0$, когда щель закрывается в точке K_I . Эта точка соответствует одной из неэквивалентных точек, лежащих на пересечении ребер гексагональной зоны Бриллюэна. В этом случае $\Delta_d(\mathbf{k}) = \Delta_d(-\mathbf{k} + \mathbf{Q}) = 0$. Второй аналогичный переход реализуется между областями с $N_3 = 3$ (данная очень узкая область обозначена жирной линией между областями с $\tilde{N}_3 = -3$ и $\tilde{N}_3 = 1$) и $\tilde{N}_3 = 1$, когда щель в спектре закрывается в точках $(0, 0)$ (центр зоны Бриллюэна) и $(2\pi/3, 2\pi/3)$ (вторая неэквивалентная точка на границе зоны). Для сверхпроводника без магнитного упорядочения пересечение контуром Ферми нодальных точек сверхпроводящего параметра порядка приводит к реализации бесщелевых возбуждений. При учете неколлинеарного магнетизма из-за зависимости спектра также и от $\Delta_d(-\mathbf{k} + \mathbf{Q})$ такое условие не выполняется. Однако существуют условия, когда энергетический спектр обращается в нуль в точках, при которых параметры $\Delta_d(\mathbf{k}), \Delta_d(-\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \neq 0$. Эта ситуация соответствует остальным переходам на рис. 4.

В реальных материалах с фазой сосуществования киральной $d+id$ сверхпроводимости и спинового упорядочения должны учитываться сильные электронные корреляции. В работе [52] мы показали не только устойчивость ММ по отношению к включению электронных взаимодействий, но и определили их структуру в ансамбле фермионов Хаббарда сильнокоррелированных систем. При этом условия реализации ТНФ найдены из решения уравнений самосогласования для параметров порядка.

4. Калорические аномалии и фермионная четность нанопроволоки в сверхпроводящей фазе с нетривиальной топологией. В предыдущем параграфе на примере одной из систем класса симметрии D показано, что для области параметров, где реализуется ТНФ, изменение внешних условий индуцирует осцилляции энергии фермиевского воз-

буждения. Это приводит к немонотонной зависимости термодинамических характеристик, которая может служить средством идентификации ТНФ.

Кандидатами для экспериментального обнаружения ТНФ являются квазиодномерные сверхпроводники [5–7, 29]. Среди таких систем активно изучаются полупроводниковые нанопроволоки с наведенной s-волновой сверхпроводимостью во внешнем магнитном поле – сверхпроводящие нанопроволоки (СН). Их популярность связана с развитой технологией молекулярно-лучевой эпитаксии. Обычно исследуются проволоки InAs или InSb с сильным спин-орбитальным взаимодействием и большими значениями g-факторов ($g_{\text{InAs}} \sim 10\text{--}25$ [57] и $g_{\text{InSb}} \sim 20\text{--}70$ [58]), а также стандартные БКШ сверхпроводники, типа Al, тонкие слои которых (5–10 нм) напыляются на поверхность нанопроволоки [59].

Прогресс в создании таких гибридных структур позволил поставить эксперименты по баллистическому транспорту [29]. Был обнаружен пик дифференциальной проводимости при нулевом напряжении, высота которого в широком интервале магнитных полей равнялась двум квантам проводимости $2G_0$. Это трактовалось на основе реализации ТНФ с майорановскими модами [29]. Однако, такой резонанс может возникать из-за неоднородностей электростатического потенциала и андреевского отражения (АО) на них [60]. Неоднозначность интерпретации результатов таких экспериментов делает актуальной разработку альтернативных методов экспериментальной идентификации ТНФ в СН.

Перспективный подход к проблеме экспериментального обнаружения ТНФ может быть основан на изучении магнетокалорических аномалий [61, 62]. Физическая сторона метода обусловлена сменой фермионной четности основного состояния системы при изменении внешнего параметра.

Рассмотрим СН с гамильтонианом [63]:

$$\mathcal{H}_W = -\frac{1}{2} \sum_{l\sigma} \left[t a_{l\sigma}^+ a_{l+1,\sigma} + \alpha \eta_\sigma a_{l\sigma}^+ a_{l+1,\bar{\sigma}} + h.c. \right] + \sum_l \left[\sum_\sigma \xi_\sigma a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} + \left(\Delta a_{l\uparrow} a_{l\downarrow} - h_x a_{l\uparrow}^+ a_{l\downarrow} + h.c. \right) \right]. \quad (16)$$

Слагаемые первой строки описывают одномерную систему фермионов с интегралом перескоков $t/2$ и параметром спин-орбитального взаимодействия Рашбы $\alpha/2$. Вторая строка соответствует учету наведенного за счет эффекта близости потенциала сверхпроводящего спаривания с амплитудой $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$, а также отсчитанной от химпотенциала μ энергии фермиона на одном узле: $\xi_\sigma = \epsilon_0 - \mu + \eta_\sigma h_z$. Здесь и в (16) $h_{z(x)} = \frac{1}{2} g \mu_B H_{z(x)}$, g – фактор Ланде, μ_B – магнетон

Бора, $H_{z(x)}$ – компоненты внешнего магнитного поля (в данном параграфе полагается: $h_x = 0$, $\theta = 0$); $\eta_\uparrow = 1$, $\eta_\downarrow = -1$.

Простой анализ показывает, что для четного числа узлов в зависимости от параметров СН возможны четыре типа функции ОС ($\hat{G} = \prod_{0 < k < \pi} \hat{R}_k$):

$$\begin{aligned} |\Psi_I\rangle &= \hat{R}_0 \hat{R}_\pi \hat{G} |0\rangle; & |\Psi_{II}\rangle &= \hat{R}_0 a_{\pi\downarrow}^+ \hat{G} |0\rangle; \\ |\Psi_{III}\rangle &= a_{0\downarrow}^+ \hat{R}_\pi \hat{G} |0\rangle; & |\Psi_{IV}\rangle &= a_{0\downarrow}^+ a_{\pi\downarrow}^+ \hat{G} |0\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Входящие сюда квадратичные формы \hat{R}_k , \hat{R}_0 и \hat{R}_π :

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= A_k + B_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ + C_k a_{k\downarrow}^+ a_{-k\uparrow}^+ + D_k a_{-k\uparrow}^+ a_{k\uparrow}^+ + \\ &+ F_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\downarrow}^+ + G_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ a_{k\downarrow}^+ a_{-k\uparrow}^+. \\ \hat{R}_0 &= A_0 + B_0 a_{0\downarrow}^+ a_{0\uparrow}^+; & \hat{R}_\pi &= A_\pi + B_\pi a_{\pi\downarrow}^+ a_{\pi\uparrow}^+ \end{aligned} \quad (18)$$

порождают суперпозицию состояний с четным числом фермионов. Поэтому отрицательная фермионная четность ОС определяется только характером заполнения состояний с $k = 0$ и $k = \pi$.

Функции $|\Psi_I\rangle$ и $|\Psi_{IV}\rangle$ представляются в виде суперпозиции состояний с четным числом фермионов. Соответственно этому число Майорана $\mathcal{M} = +1$. Для функций $|\Psi_{II}\rangle$ и $|\Psi_{III}\rangle$ в суперпозицию входят только состояния с нечетным числом фермионов и $\mathcal{M} = -1$.

Потребовав, чтобы энергия состояний $|\Psi_{II}\rangle$ и $|\Psi_{III}\rangle$ была меньше энергии состояний $|\Psi_I\rangle$ и $|\Psi_{IV}\rangle$, получим неравенства

$$\sqrt{|\Delta|^2 + (\mu - |t|)^2} < |h| < \sqrt{|\Delta|^2 + (\mu + |t|)^2}, \quad (19)$$

которые были получены ранее на основе анализа числа Майорана. При их выполнении параметры СН таковы, что реализуется ТНФ (области II и III рис. 5).

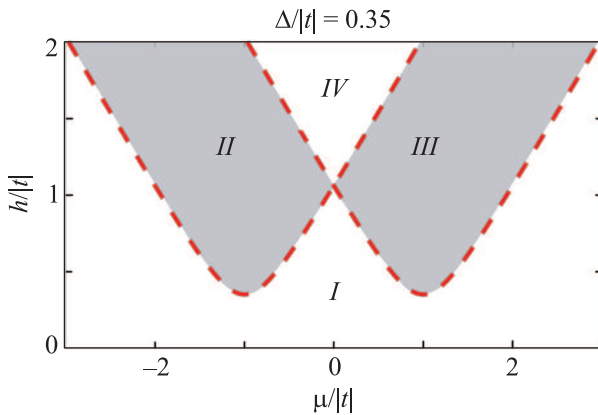


Рис. 5. (Цветной онлайн) Диаграмма топологических фаз СН. Области II и III соответствуют ТНФ ($\mathcal{M} = -1$), а I и IV – тривиальной ТФ ($\mathcal{M} = 1$)

В случае длинных открытых цепочек для области параметров, соответствующей ТНФ в замкнутой геометрии, реализуются топологически защищенные ММ с экспоненциально малой энергией возбуждений $\varepsilon_0 \sim \exp(-N)$. О свойствах такой моды можно судить, рассматривая коэффициенты разложения $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ самосопряженных операторов $b' = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0^+)$ и $b'' = \frac{i}{2}(\alpha_0^+ - \alpha_0)$ по одноузельным майорановским операторам $\gamma_{Al\sigma}$, $\gamma_{Bl\sigma}$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1;\sigma}^N (w_{l\sigma,0} \gamma_{Al\sigma} + z_{l\sigma,0} \gamma_{Bl\sigma}); \\ w_{l\sigma,0} &= e^{-i\theta/2} (u_{l\sigma,0}^* + v_{l\sigma,0}); \\ z_{l\sigma,0} &= e^{-i\theta/2} (u_{l\sigma,0}^* - v_{l\sigma,0}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $u_{l\sigma,0}$ и $v_{l\sigma,0}$ – коэффициенты преобразования Боголюбова. Степень перекрытия распределений $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ экспоненциально мала. При этом реализуется электрическая и спиновая нейтральность ММ, поскольку изменение распределений электронной и спиновой плотности

$$\begin{aligned} \delta n_{l\sigma} &= \langle 1 | a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} | 1 \rangle - \langle 0 | a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} | 0 \rangle = \\ &= |u_{l\sigma,0}|^2 - |v_{l\sigma,0}|^2 = w_{l\sigma,0} z_{l\sigma,0}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\delta s_l^z = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \eta_{\sigma} w_{l\sigma,0} z_{l\sigma,0}; \quad \delta s_l^x = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} w_{l\sigma,0} z_{l\sigma,0}; \quad (22)$$

при переходе СН из основного состояния $|0\rangle$ в состояние с ММ $|1\rangle = \alpha_0^+ |0\rangle$ равно нулю.

При уменьшении длины цепочки распределения $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ начинают значительно перекрываться. Энергия мод, вообще говоря, отлична от нуля, однако, при определенных параметрах могут возникнуть возбуждения с нулевой энергией. Последние, как и для системы (9), реализуются на линиях, ограничивающих затененные области рис. 6. Существенно, что при пересечении таких линий происходит смена фермионной четности ОС, и в системе реализуется квантовый переход. Поэтому линии нулевых мод являются линиями квантовых критических точек (ККТ). Значение фермионной четности P определяется знаком пфаффиана матрицы Боголюбова–де Жена \tilde{H} гамильтониана (16), записанного в представлении майорановских операторов:

$$P = \text{sign} \left(\text{Pf} \left(\tilde{H} \right) \right). \quad (23)$$

Для открытой нанопроволоки результат вычисления фермионной четности позволяет построить фазовую диаграмму, показанную на рис. 6. Затененным

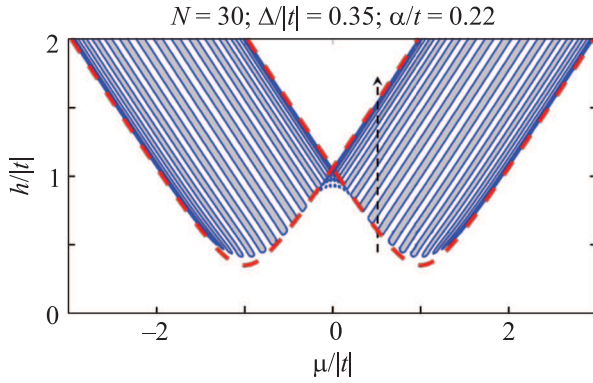


Рис. 6. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма открытой СН. В затененных областях фермионная четность отрицательна. Штриховые линии обозначают границы ТНФ замкнутой СН (см. рис. 5)

областям соответствует значение $P = -1$. На границах этих областей существуют возбуждения с нулевой энергией. Все области с $P = -1$ находятся внутри области ТНФ цепочки в замкнутой геометрии. Поэтому идентификация линий смены фермионной четности с помощью наблюдаемых характеристик в короткой открытой нанопроволоке может служить индикатором той области параметров, для которой в бесконечно длинной открытой СН реализуются ММ.

Известно, что квантовые переходы могут быть детектированы с помощью магнетокалорического эффекта [64, 65], проявляющегося в изменении температуры системы при адиабатическом изменении магнитного поля:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_{S,\mu} = -T \left(\frac{\partial \langle M \rangle / \partial T}{C(T)}\right)_{\mu,h}, \quad (24)$$

где $\langle M \rangle$ и $C(T)$ – удельная намагниченность и удельная теплоемкость, соответственно. Существенно, что при низких температурах производная (24) слева и справа от ККТ имеет разные знаки и расходится в самой точке. Аналогичные утверждения имеют место для электрокалорического эффекта, заключающегося в изменении температуры при адиабатическом изменении электрохимического потенциала.

Соответственно сказанному, при низких температурах калорические эффекты будут проявлять описанное anomalous поведение, как только внешний изменяемый параметр будет находиться в пределах ТНФ замкнутой СН. Это изображено на рис. 7. Пунктирными линиями показаны зависимости калорических эффектов для замкнутой СН, в которой квантовые переходы сопровождаются изменением значения ТИ M . Сплошными линиями отражены аналогичные зависимости для открытой нанопрово-

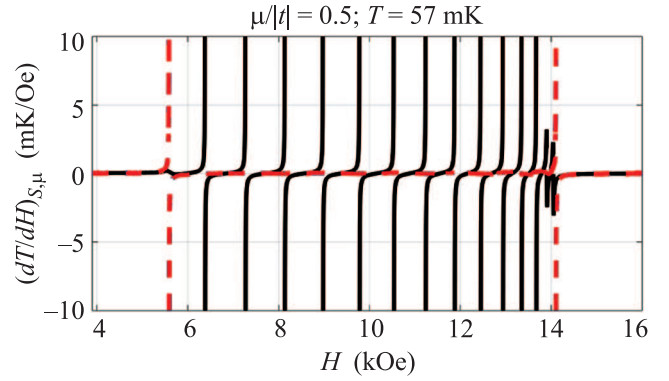


Рис. 7. (Цветной онлайн) Полевая зависимость магнетокалорического эффекта. $T = 10^{-3}|t|$, $\mu = 0.5|t|$, остальные параметры те же, что и на рис. 6. Из сравнения с рис. 6 видно, что anomalous поведение калорического эффекта реализуется в области, соответствующей ТНФ

локи. Наблюдение этих особенностей может указывать на реализацию ТНФ в длинной СН и служить в качестве дополнительного критерия к уже предложенным в литературе тестам (см., например, работы [29, 66]). Представленные эффекты не ограничиваются СН и могут иметь место в других квазиодномерных системах класса симметрии D.

5. Особенности спин-поляризованного транспорта с участием майорановских состояний. Выше отмечалось, что ММ в длинных проволоках характеризуется нулевым средним значением спина. Вместе с тем в ряде работ показывалось, что за переходом в ТНФ можно проследить, наблюдая отдельно за электронной составляющей спиновой поляризации ММ [67–69], либо изучая совокупную спиновую поляризацию всех возбуждений за исключением ММ [70].

Следствием ненулевой электронной (дырочной) спиновой поляризации ММ в процессах транспорта является АО [71] без изменения проекции спина [72, 73] и неколлинеарное АО [74]. Таким образом, существование ММ может быть проверено средствами спин-поляризованной спектроскопии/микроскопии.

В этой связи рассмотрим квантовый транспорт в системе ферромагнетик/СН/ферромагнетик [75]. Гамильтониан системы имеет несколько слагаемых:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_W + \mathcal{H}_T. \quad (25)$$

Первые два описывают левый и правый ферромагнитные однозонные металлические контакты в модели Стонера,

$$\mathcal{H}_i = \sum_{k\sigma} \left[\xi_k - \frac{eV_i}{2} - \eta_\sigma M_i \right] c_{ik\sigma}^+ c_{ik\sigma}, \quad i = L, R,$$

где $c_{ik\sigma}^+$ – оператор рождения электрона в i -ом контакте с квазиимпульсом k , проекцией спинового момента на ось квантования σ и энергией $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ (μ – химический потенциал системы); M_i – энергия молекулярного поля i -ого контакта.

Слагаемое \mathcal{H}_W описывает СН со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы в скошенном магнитном поле ($h_{x,z} \neq 0$) и было введено ранее (16). Последнее слагаемое в (25) есть туннельный гамильтониан \mathcal{H}_T , который описывает взаимодействие между сверхпроводящей проволокой и контактами,

$$\mathcal{H}_T = t_L \sum_{k\sigma} c_{Lk\sigma}^+ a_{1\sigma} + t_R \sum_{p\sigma} c_{Rp\sigma}^+ a_{N\sigma} + h.c., \quad (26)$$

где $t_{L(R)}$ – параметр туннельной связи между левым (правым) контактом и проволокой.

Для анализа транспортных свойств применим метод неравновесных функций Грина [76–78]. Для удобства описания электронных, дырочных и спиновых степеней свободы введем 4-х компонентные операторы Намбу [79, 74], $\psi_{im} = (d_{im\uparrow} \ d_{im\downarrow} \ d_{im\downarrow} \ d_{im\uparrow}^+)^T$, где $d_{im\sigma} = a_{j\sigma}$, $c_{ik\sigma}$. Тогда неравновесные функции Грина записываются как

$$G_{il,jm}(\tau, \tau') = -i \langle T_C \psi_{il}(\tau) \otimes \psi_{jm}^+(\tau') \rangle, \quad (27)$$

где T_C – оператор упорядочения на временном контуре Келдыша. Используя (27), электронный ток в i -ом контакте определяется следующим образом:

$$I_i = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} Tr \left[Re \left\{ \sigma \left(\Sigma_i^r G_{i,i}^< + \Sigma_i^< G_{i,i}^a \right) \right\} \right], \quad (28)$$

где $\sigma = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ – позволяет учесть вклады в ток как от электронного, так и дырочного канала; $\Sigma_i^{r(<)} = T_i^+ g_k^{r(<)} T_i$ – фурье-образ матрицы запаздывающей собственно-энергетической функции (функции “меньше”), которая описывает влияние i -ого контакта на СН; $g_k^{r(<)}$ – фурье-образ матрицы запаздывающей одночастичной функции Грина (функции “меньше”) i -ого контакта. Зависящие от времени матрицы туннельной связи имеют вид $T_i(t) = t_i \cdot \text{diag}(e^{-ieV_i t}, -e^{ieV_i t}, e^{-ieV_i t}, -e^{ieV_i t})$. Далее, $G_{i,i}^{a(<)} = P_i G_W^{a(<)} P_i^+ - i, i$ -ый блок фурье-образа матрицы опережающей функции Грина СН (функции “меньше”), который соответствует ее первому (в случае I_L) или последнему (в случае I_R) узлу. Для получения этих блоков применяются проекционные операторы $P_L = (I \ O)$ и $P_R = (O \ I)$, где I – единичная матрица размером 4×4 , O – нулевой блок размером $4 \times 4N - 4$ [80, 81].

Неравновесные функции Грина СН находятся в рамках решения уравнений Дайсона и Келдыша,

$$G^r = (\omega - H_W - \Sigma^r)^{-1}, \quad G^a = (G^r)^+, \quad (29)$$

$$G^< = G^r \Sigma^< G^a. \quad (30)$$

В формуле (29) H_W описывает СН в пространстве операторов Намбу. Полная собственно-энергетическая функция системы записывается как $\Sigma^n = P_L^+ \Sigma_L^n P_L + P_R^+ \Sigma_R^n P_R$ ($n = r, a, >$). Впоследствии мы будем рассматривать полуметаллические контакты (например, NiMnSb или CrO₂ [82]), которые характеризуются наличием носителей только с одной проекцией спина (основные носители). Тогда, компоненты, относящиеся к i -ому контакту, в рамках широкозонного приближения имеют вид $\Sigma_i^{r,a} = \mp \frac{i}{2} \Gamma_i = \text{const}$, $\Sigma_i^< = (\Sigma_i^a - \Sigma_i^r) F_i$, где $\Gamma_i = 2\pi t_i^2 \rho_i$ – параметр, характеризующий уширение уровней СН за счет связи с подзоной основных носителей i -ого контакта; ρ_i – плотность состояний подзоны основных носителей i -ого контакта; $F_i = \text{diag}(f_{i1}, f_{i2}, f_{i1}, f_{i2})$, где $f_{i1,2}(\omega \pm eV_i/2)$ – функции Ферми-Дирака.

Также в [75] анализировались флуктуации тока, в частности, дробовый шум при нулевой частоте [79, 83]:

$$S_i(0) = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} Tr \left[\sigma \Sigma_i^< \sigma G_{i,i}^> + G_{i,i}^< \sigma \Sigma_i^> \sigma - \sigma [\Sigma_i G_{i,i}]^< \sigma [\Sigma_i G_{i,i}]^> - [G_{i,i} \Sigma_i]^< \sigma [G_{i,i} \Sigma_i]^> \sigma + \sigma [\Sigma_i G_{i,i} \Sigma_i]^> \sigma \hat{G}_{i,i}^< + G_{i,i}^> \sigma [\Sigma_i G_{i,i} \Sigma_i]^< \sigma \right]. \quad (31)$$

Рассмотрим особенности проводящих свойств описанной системы. Будем предполагать, что $V_{L,R} = V$. Тогда, после ряда преобразований формула (28) в случае, например, левого контакта принимает следующий вид:

$$I_L = I_L^{\text{LAR}} + I_L^{\text{CAR}} = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\Gamma_L^2 \left(|G_{1,4}^r|^2 + |G_{4,1}^r|^2 \right) + \Gamma_L \Gamma_R \left(|G_{1,4N}^r|^2 + |G_{4,4N-3}^r|^2 \right) \right] (f_2 - f_1), \quad (32)$$

где $f_{1,2} \equiv n(\omega \pm eV/2)$, $G_{i,j}^r$ – матричные элементы G^r .

В полученном выражении для тока присутствуют две составляющие: 1) локальный ток, $I_L^{\text{LAR}} \sim \Gamma_L^2$, связанный с одноименными процессами АО (LAR – *Local Andreev Reflection*); 2) нелокальный

ток, $I_L^{\text{CAR}} \sim \Gamma_L \Gamma_R$, связанный с процессами перекрестного АО (CAR – *Crossed Andreev Reflection*) [71, 74]. При этом матричные элементы фурье-образа запаздывающей функции Грина, которые отвечают за отмеченные процессы, имеют вид: $G_{1,4}^r = \langle\langle a_{1\uparrow} | a_{1\uparrow} \rangle\rangle$ и $G_{1,4N}^r = \langle\langle a_{1\uparrow} | a_{N\uparrow} \rangle\rangle$. Важно заметить, что андреевские процессы в системе полуметалл/сверхпроводник отсутствуют, если не учитывать процессы переворота спина. Это связано с тем, что ферромагнетик такого типа имеет только одну подзону носителей заряда. Однако, например, если при рассеянии на интерфейсе возможны спин-флип процессы, то АО без изменения проекции спина носителей имеет место [84, 85].

В случае рассматриваемой СН, ненулевой вклад в спин-поляризованный ток от андреевских каналов возникает вследствие спин-орбитального взаимодействия. Продемонстрируем это, рассматривая наиболее простую ситуацию, когда СН состоит из двух узлов ($N = 2$) и $h_x = 0$. Тогда, числители соответствующих функций Грина имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{num} \{G_{1,4}^r\} &= -16\eta_\sigma \Delta \alpha t \xi_{\bar{\sigma}} [\omega (16\eta_\sigma \xi_0 h_z + \Gamma_R^2) + \\ &\quad + 2i\Gamma_R (\Delta^2 + \alpha^2 + t^2 - \omega^2 - \xi_{\bar{\sigma}}^2)], \\ \text{num} \{G_{1,4N}^r\} &= 32\eta_\sigma \Delta \alpha \xi_{\bar{\sigma}} [(\Delta^2 + \alpha^2 + t^2)^2 + \\ &\quad + t^2 (C_{e\bar{\sigma}} C_{h\bar{\sigma}} - \omega (4\omega + i\Gamma)) + \\ &\quad + C_{e\sigma L} C_{h\sigma R} (t^2 + C_{e\bar{\sigma}} C_{h\bar{\sigma}}) - \\ &\quad - C_{e\sigma L} (\alpha^2 C_{e\bar{\sigma}} + \Delta^2 C_{h\bar{\sigma}}) - \\ &\quad - C_{h\sigma R} (\alpha^2 C_{h\bar{\sigma}} + \Delta^2 C_{e\bar{\sigma}})], \\ G_{4,1}^r &= G_{1,4}^r, G_{4,4N-3}^r = -G_{1,4N}^r (L \longleftrightarrow R), \end{aligned} \quad (33)$$

где $C_{e\sigma L(h\sigma R)} = \omega \mp \xi_\sigma + i\Gamma_{L(R)}/2$, $C_{e(h)\bar{\sigma}} = \omega \mp \xi_{\bar{\sigma}}$, $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_R$, $\xi_0 = t - \mu$. Общий для всех гриновских функций знаменатель здесь не приводится по причине громоздкости. Из (33) следует, что локальное и перекрестное АО от интерфейса полуметалл/СН имеют место только, если в СН одновременном присутствуют и сверхпроводящее спаривание, и спин-орбитальное взаимодействие.

В одноконтантной геометрии ($\Gamma_R = 0$) ток определяется только локальными процессами. Тогда, для дальнейшего рассмотрения важно заметить, что в режиме линейного отклика дифференциальная проводимость $G_L = dI_L/dV$ стремится к нулю. Такое поведение согласуется с описанным для случая, когда сверхпроводник (без спин-орбитального взаимодействия) контактирует с полуметаллом, в котором градиент намагниченности перпендикулярен интерфейсу [84, 85]. В свою очередь, в нелокальном режиме вклад в ток от обоих каналов является ненулевым при любых ω .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабо неравновесного режима, $0 < eV/2 < \min(\delta\varepsilon_0)$, где под $\delta\varepsilon_0$ подразумеваются величины максимумов характерной осцилляционной зависимости энергии возбуждения ММ от внешнего магнитного поля. Такая зависимость возникает за счет гибридизации введенных выше распределений $w_{l\sigma,0}$, $z_{l\sigma,0}$ (20) и проявлялась в описанных магнетокалорических аномалиях.

На рисунке 8а изображена зависимость кондактанса левого контакта от x - и z -компонент магнитного поля (карта проводимости), направление которого перпендикулярно вектору поля Рашбы. При фиксированной ориентации \mathbf{H} рост величины поля приводит к увеличению $\delta\varepsilon_0$. При этом $2G_0$ максимумы проводимости, возникающие за счет резонансного локального андреевского отражения на ММ ($G_L^{\text{LAR}} = 2G_0$, $G_L^{\text{CAR}} = 0$) [86], чередуются с минимумами. Далее, как видно, расчеты для различных направлений \mathbf{H} приводят к возникновению концентрических резонансных колец на карте проводимости. Полученные кольца имеют несколько особенностей. Во-первых, их ширина зависит от направления поля. Во-вторых, для некоторой выделенной ориентации подавляются все максимумы кондактанса.

Расчеты показывают, что транспорт спин-поляризованных электронов (дырок) с энергией вблизи уровня Ферми определяется поведением электронной (дырочной) составляющей спиновой поляризации ММ на концах СН, $(\delta s_{1(N)}^z)_e \equiv S_{L(R)}^z = |u_{1(N)\uparrow,0}|^2 - |u_{1(N)\downarrow,0}|^2$ (для достаточно короткой проволоки с $N = 30$: $(\delta s_{1(N)}^z)_e \approx -(\delta s_{1(N)}^z)_h$). На рисунках 8с, d приведены зависимости S_L^z и S_R^z от магнитного поля, соответственно. В нижней полуплоскости $S_{L,R}^z > 0$, так как поле направлено антипараллельно оси z . Как следствие, в этой области кольца проводимости шире.

Из сравнения рис. 8а, с вытекает, что подавление резонансов $G_L(h_x, h_z)$ наблюдается при ориентациях магнитного поля, для которых S_L^z имеет минимум (см. темно-синюю область на рис. 8с). Важно, что при этом $S_{L\uparrow}^z = |u_{1\uparrow,0}|^2 \approx 0$. В результате спин-поляризованный транспорт подавляется и $I_L \approx 0$. В то же время, поляризация на правом конце при тех же ориентациях поля стремится к нулю, причем $S_{R\uparrow}^z \approx -S_{R\downarrow}^z \neq 0$. Последнее означает, что резонансы в проводимости правого контакта, G_R , обусловленные локальным андреевским отражением на ММ, сохраняются, т.е. $I_R \neq 0$ (не показано на рис. 8) [75].

Таким образом, для указанного направления магнитного поля реализуется сильно асимметричный режим транспорта, близкий к одноконтантному, что

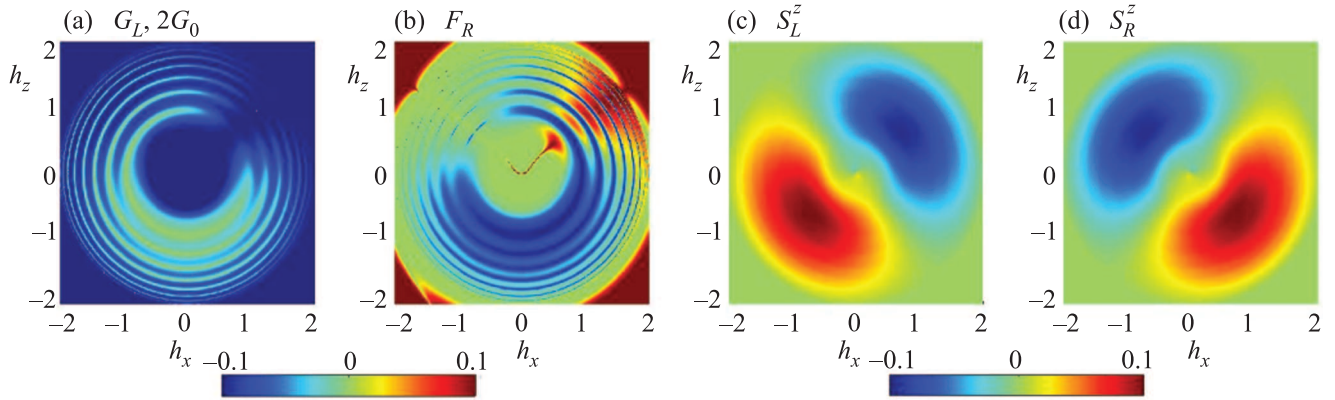


Рис. 8. (Цветной онлайн) Зависимости кондуктанса левого контакта (а) и фактора Фано правого контакта (б) от энергии магнитного поля, а также аналогичные зависимости z -компоненты электронной спиновой поляризации ММ на левом, S_L^z (с), и правом, S_R^z (д), концах СН. Цвет рисунков (а) и (б) ((с) и (д)) расшифровывается на шкале слева (справа). Параметры: $t = 1$, $\mu = 0$, $\Delta = 0.4$, $\alpha = 2$, $N = 30$

также подтверждается поведением фактора Фано правого контакта, $F_R = S_R(0)/2eI_R$, представленном на рис. 8б. Видно, что при $h_x \approx h_z$ величинам магнитного поля, при которых $G_R \approx 2G_0$, соответствуют нулевые значения F_R . Тогда как в промежутках между этими минимумами $F_R \rightarrow 2$. Это указывает на доминирование локального АО в областях со слабой проводимостью [86, 79]. Напротив, во всех других областях, где сохраняется двухконтактный режим и $G_{L,R} \ll 1$, главную роль играют процессы перекрестного АО, как результат $F_R \rightarrow 1$ [87].

Заметим, что наблюдаемое при $h_x \approx h_z$ нарушение симметрии токов (также отмечавшееся при спин-независимом транспорте через МС [88]) характерно именно для слабо неравновесного режима транспорта. Действительно, согласно формулам (33), в одноконтактном режиме приближение линейного отклика дает $G_{L,R} = 0$ и $I_L = -I_R$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для ориентации поля, которая характеризуется соотношением $h_x \approx -h_z$ [75]. В этом случае $I_L \neq 0$, $I_R \approx 0$. В остальных ситуациях $I_L = -I_R$. Таким образом, выполненный анализ показывает, что магнитное поле позволяет управлять направлением спин-поляризованного тока в слабо неравновесной системе полупроводник/СН/сверхпроводник, если устройство находится в ТНФ.

Заключение. Представленные результаты исследований по реализации топологических фаз в конденсированных средах показывают, что учет кулоновского взаимодействия между электронами и неколлинеарного спинового упорядочения приводит

к формированию новых механизмов индуцирования состояний с нетривиальной топологией.

Рассмотрены условия реализации квантовых топологических переходов в киральных $d + id$ сверхпроводниках без магнитного порядка и в фазе сосуществования $d + id$ сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения. В первом случае топологически нетривиальные фазы обладают четным значением топологического индекса. При параметрах, для которых состояние системы является топологически нетривиальным, в случае открытых границ формируются краевые состояния.

При появлении 120° магнитного упорядочения области реализации топологически нетривиальных фаз изменяются, поскольку появляются фазы с нечетным значением топологического инварианта. В таких фазах при рассмотрении открытых систем возникающие краевые состояния являются майорановскими. Наличие множества нулевых мод существенно для экспериментального поиска топологически нетривиальных фаз.

При изучении полупроводниковой нанопроволоки с сильным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенной сверхпроводимостью установлено, что при изменении внешнего магнитного поля в такой системе реализуется anomalous поведение калорических эффектов, если только параметры нанопроволоки соответствуют топологически нетривиальной фазе. Отмеченные особенности обусловлены каскадом квантовых переходов, связанных с изменением фермионной четности основного состояния системы. Этот эффект может использоваться в качестве нового метода экспериментальной идентификации

ции топологически нетривиальной фазы в нанопроволоке.

Проанализированы особенности транспортных характеристик гибридных структур, содержащих сверхпроводящую нанопроволоку в топологической фазе. В частности, для структуры полуметалл/сверхпроводящая проволока/полуметалл возникает нарушение симметрии токов, связанное с реализацией нетривиальной топологической фазы. Этот эффект может быть использован как для детектирования майорановских мод, так и для создания электронных устройств нового поколения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 16-02-00073, 18-32-00443, 19-02-00348), Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда науки в рамках научных проектов: “Проявление кулоновских взаимодействий и эффектов ограниченной геометрии в свойствах топологических краевых состояний наноструктур со спин-орбитальным взаимодействием” (# 18-42-243017), “Контактные явления и магнитный беспорядок в проблеме формирования и детектирования топологически защищенных краевых состояний в полупроводниковых наноструктурах” (# 18-42-243018), “Одноорбитальная эффективная модель ансамбля спин-поляронных квазичастиц в проблеме описания промежуточного состояния и псевдощелевого поведения купратных сверхпроводников” (# 18-42-240014).

С. В. Аксенов и А. О. Злотников выражают благодарность совету по грантам Президента РФ (проекты МК-3722.2018.2, МК-3594.2018.2).

1. M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
2. Ю. Е. Лозовик, *УФН*, **182**, 111 (2012).
3. S. R. Elliott and M. Franz, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 137 (2015).
4. N. Read and D. Green, *Phys. Rev. B* **61** 10267 (2000).
5. A. Yu. Kitaev, *Phys. Usp.* **44**, 131 (2001).
6. J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 040502 (2010).
7. R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 077001 (2010).
8. L. Fidkowski and A. Yu. Kitaev, *Phys. Rev. B* **81**, 134509 (2010).
9. S. Gangadharaiah, B. Braunecker, P. Simon, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 036801 (2011).
10. J. Klinovaja and D. Loss, *Phys. Rev. B* **90**, 045118 (2014).

11. T. Morimoto, A. Furusaki, and Ch. Mudry, *Phys. Rev. B* **92**, 125104 (2015).
12. M.-Y. Yao, L. Miao, N. L. Wang, J. H. Dil, M. Z. Hasan, D. D. Guan, C. L. Gao, C. Liu, D. Qian, and J. Jia, *Phys. Rev. B* **91**, 161411 (2015).
13. Y. Chen and H.-Y. Kee, *Phys. Rev. B* **97**, 085155 (2018).
14. Y. Sato, S. Matsuo, C.-H. Hsu, P. Stano, K. Ueda, Y. Takeshige, H. Kamata, J. S. Lee, B. Shojaei, K. Wickramasinghe, J. Shabani, C. Palmstrom, Y. Tokura, D. Loss, and S. Tarucha, *Phys. Rev. B* **99**, 155304 (2019).
15. J. Jang, D. G. Ferguson, V. Vakaryuk, R. Budakian, S. B. Chung, P. M. Goldbart, and Y. Maeno, *Science* **331**, 186 (2011).
16. C. L. M. Wong and K. T. Law, *Phys. Rev. B* **86**, 184516 (2012).
17. I. Martin and A. F. Morpurgo, *Phys. Rev. B* **85**, 144505 (2012).
18. Y.-M. Lu and Z. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 096403 (2013).
19. Y.-M. Lu, T. Xiang, and D.-H. Lee, *Nature Phys.* **10**, 634 (2014).
20. A. Lau and C. Timm, *Phys. Rev. B* **90**, 024517 (2014).
21. Y. Nakajima, R. Hu, K. Kirshenbaum, A. Hughes, P. Syers, X. Wang, K. Wang, R. Wang, S. R. Saha, D. Pratt, J. W. Lynn, and J. Paglione, *Science Advances* **1**, e1500242 (2015).
22. S. Sasaki and T. Mizushima, *Physica C: Superconductivity and its Applications* **514**, 206 (2015).
23. C. Youmans, A. Ghazaryan, M. Kargarian, and P. Ghaemi, *Phys. Rev. B* **98**, 144517 (2018).
24. S. Zhu, L. Kong, L. Cao et al. (Collaboration), *ArXiv:1904.06124 [Cond-Mat]* (2019).
25. G. E. Volovik and V. M. Yakovenko, *J. Phys. Condens. Matter* **1**, 5263 (1989).
26. C. Wang and T. Senthil, *Phys. Rev. B* **89**, 195124 (2014).
27. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1003 (2012).
28. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 177002 (2010).
29. R. M. Lutchyn, E. P. A. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, and Y. Oreg, *Nat. Rev. Mater.* **3**, 52 (2018).
30. K. Takada, H. Sakurai, E. Takayama-Muromachi, F. Izumi, R. A. Dilanian, and T. Sasaki, *Nature* **422**, 53 (2003).
31. Н. Б. Иванова, С. Г. Овчинников, М. М. Коршунов, И. М. Еремин, Н. В. Казак, *УФН* **179**, 837 (2009).
32. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, Д. М. Дзедзисавили, С. Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 450 (2002).
33. R. O. Zaitsev, *Sov. Phys. JETP* **41**, 100 (1975).

34. R. O. Zaitsev, *Diagram Methods in Theory of Superconductivity and Ferromagnetism*, URSS, Moscow (2004) [in Russian].
35. S. Zhou and Z. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 217002 (2008).
36. W. Kohn and J. M. Luttinger, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 524 (1965).
37. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 525 (1988).
38. М. Ю. Каган, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, *УФН* **185**, 785 (2015).
39. P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **110**, 827 (1958).
40. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, В. А. Мицкан, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 399 (2015).
41. V. V. Val'kov, T. A. Val'kova, and V. A. Mitskan, *JMMM* **440**, 129 (2017).
42. G. E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 492 (1997).
43. B. Braunecker, G. I. Japaridze, J. Klinovaja, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **82**, 045127 (2010).
44. T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **84**, 195442 (2011).
45. M. Kjaergaard, K. Wolms, and K. Flensberg, *Phys. Rev. B* **85**, 020503 (2012).
46. B. Braunecker and P. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 147202 (2013).
47. J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 186805 (2013).
48. В. В. Вальков, А. О. Злотников, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 512 (2016).
49. K. Jiang, S. Zhou, and Z. Wang, *Phys. Rev. B* **90**, 165135 (2014).
50. K. Pasrija and S. Kumar, *Phys. Rev. B* **93**, 195110 (2016).
51. C. Weber, A. Lauchli, F. Mila, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. B* **73**, 014519 (2006).
52. В. В. Вальков, А. О. Злотников, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 769 (2019).
53. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, and M. S. Shustin, *J. Magn. Magn. Mater.* **459**, 112 (2018).
54. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008).
55. K. Ishikawa and T. Matsuyama, *Nucl. Phys. B* **280**, 523 (1987).
56. P. Ghosh, J. D. Sau, S. Tewari, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **82**, 184525 (2010).
57. V. Aleshkin, V. Gavrilenko, A. Ikonnikov, S. Krishtopenko, Yu. G. Sadofyev, and K. E. Spirin, *Semiconductors* **42**, 828 (2008).
58. H. A. Nilsson, P. Caroff, C. Thelander, M. Larsson, J. B. Wagner, L.-E. Wernersson, L. Samuelson, and H. Q. Xu, *Nano Lett.* **9**, 3151 (2009).
59. M. T. Deng, S. Vaitiekėnas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygard, P. Krogstrup, and C. M. Marcus, *Science* **354**, 1557 (2016).
60. C. Moore, C. Zeng, T. D. Stanescu, and S. Tewari, *Phys. Rev. B* **98**, 155314 (2018).
61. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, *Письма в ЖЭТФ* **12**, 762 (2017).
62. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, *ЖЭТФ* **156** (2019).
63. E. M. P. Stoudenmire, J. Alicea, O. A. Starykh, and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* **84**, 014503 (2011).
64. L. Zhu, M. Garst, A. Rosch, and Q. Si, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 066404 (2003).
65. M. Garst and A. Rosch, *Phys. Rev. B* **72**, 205129 (2005).
66. C. Beenakker, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4**, 113 (2013).
67. D. Sticlet, C. Bena, and P. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 096802 (2012).
68. M. Guigou, N. Sedlmayr, J. Aguiar-Hualde, and C. Bena, *Eur. Phys. Lett.* **115**, 47005 (2016).
69. E. Prada, R. Aguado, and P. San-Jose, *Phys. Rev. B* **96**, 085418 (2017).
70. M. Serina, D. Loss, and J. Klinovaja, *Phys. Rev. B* **98**, 035419 (2018).
71. A. F. Andreev, *Sov. Phys. JETP* **19**, 1228 (1964).
72. J. J. He, T. K. Ng, P. A. Lee, and K. T. Law, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 037001 (2014).
73. J. J. He, J. Wu, T.-P. Choy, X.-J. Liu, Y. Tanaka, and K. T. Law, *Nat. Commun.* **5**, 3232 (2014).
74. B. H. Wu, W. Yi, J. C. Cao, and G.-C. Guo, *Phys. Rev. B* **90**, 205435 (2014).
75. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, *J. Magn. Magn. Mater.* **465**, 88 (2018).
76. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1515 (1964).
77. S. Datta, *Electronic Transport in mesoscopic systems*, Cambridge University Press, N.Y. (1995).
78. S. Datta, *Quantum transport: Atom to Transistor*, Cambridge University Press, N.Y. (2005).
79. B. H. Wu and J. C. Cao, *Phys. Rev. B* **85**, 085415 (2012).
80. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, *Low Temp. Phys.* **43**, 436 (2017).
81. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, *J. Magn. Magn. Mater.* **440**, 112 (2017).
82. R. S. Keizer, S. T. B. Goennenwein, T. M. Klapwijk, G. Miao, G. Xiao, and A. Gupta, *Nature* **439**, 825 (2006).
83. V. A. Khlus, *Sov. Phys. JETP* **66**, 1243 (1987).
84. B. Beri, J. N. Kupferschmidt, C. W. J. Beenakker, and P. W. Brouwer, *Phys. Rev. B* **79**, 024517 (2009).
85. J. N. Kupferschmidt and P. W. Brouwer, *Phys. Rev. B* **83**, 014512 (2011).
86. K. T. Law, P. A. Lee, and T. K. Ng, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 237001 (2009).
87. J. Nilsson, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 120403 (2008).
88. Y. Cao, P. Wang, G. Xiong, M. Gong, and X.-Q. Li, *Phys. Rev. B* **86**, 115311 (2012).