Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 4, стр. 181 – 185 *25 февраля 1989 г.*

ОПЕРАТОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ФЕРМИОННЫХ СТРУН НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А.М.Семихатов

Предложен операторный формализм для супердухов замкнутой фермионной струны, обобщающий правила операторной бозонизации бозонных $\beta\gamma$-систем на случай римановых поверхностей произвольного рода. Установлено операторное происхождение нефизических полюсов и найдены глобальные операторные разложения, генерирующие как наивные, так и нефизические полюса.

Результаты [1] по многопетлевым суперструнным вычислениям продемонстрировали значительную сложность физической системы, каковой является фермионная струна. Получение явных физических результатов (в первую очередь о занулении космологической постоянной) остается во многом нерешенной задачей. Применяемые в низших родах методы [2] существенно используют гиперэллиптичность и не допускают обобщения на старшие рода. Желательно поэтому уметь воспроизводить корреляционные функции на римановых поверхностях не "синтетическим" способом, как в [1], а в результате явно осуществляемых манипуляций с простыми составными элементами. Последние можно надеяться изучать по отдельности. Требуется, тем самым, операторный формализм на римановых поверхностях. В отношении супердуховых систем (вклад которых является наиболее существенной частью) существование операторного формализма, явным образом порождающего корреляционные функции, кажется, на первый взгляд, невозможным, поскольку в корреляционных функциях имеются нефизические полюса [1, 3], не следующие из операторных произведений. Нашей целью является показать, что такой формализм, тем не менее, может быть построен в рамках метода, обобщающего на произвольные римановы поверхности операторную "бозонизацию бозонов" [4]. Последняя является довольно тонкой и первостепенно важной конструкцией в локальном случае (в частности, в бозонном представлении строится сохраняющийся ток, отвечающий суперсимметрии). В локальной теории [4] коммутирующие духи γ и сопряженные духи β бозонизуются как

$$\beta = \partial\xi\exp(-\phi), \quad \gamma = \eta\exp\phi, \qquad \xi = \exp\chi, \qquad \eta = \exp(-\chi), \tag{1}$$

где ϕ и χ – два скалярных поля, причем ϕ имеет "неправильный" знак перед двухточечным коррелятором. На римановых поверхностях скаляры не могут быть определены однозначно. Фундаментальными объектами вместо них являются соответствующие токи [5]. В соответствии с этим введем на данной римановой поверхности Σ рода g два тока I и ι со следующими двухточечными корреляторами:

$$\langle 0 | I(u)I(v) | 0 \rangle = -\omega(u, v), \qquad \langle 0 | \iota(u)\iota(v) | 0 \rangle = \omega(u, v). \tag{2}$$

Здесь $|0\rangle$ – бозонный вакуум со свойством $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, и ω – симметричный мероморфный бидифференциал [6]

$$\omega(u, v) = d_u d_v \ln E(u, v), \qquad \oint_{a_i} \omega(\cdot, v) = 0, \qquad \oint_{b_i} \omega(\cdot, v) = \omega_i(v), \tag{3}$$

где E – примформа и ω_i, $i = 1, \dots, g$, – голоморфные дифференциалы [6]. Нормируем токи I и ι условиями нулевых a-периодов.

Ненулевые корреляционные функции на Σ требуют присутствия $(n+1)$ полей ξ и n полей η [1]. Пусть $x_0 \in \Sigma$ – положение "лишней" ξ-вставки. Требуется также $2(g-1)$ $\exp\phi$-вставок. лишних по сравнению с $\exp(-\phi)$-вставками [1]. Пусть z_α, $\alpha = 1, \dots, 2(g-1)$ – точки этих вставок и $\mathcal{P} = \Sigma z_\alpha$ – соответствующий дивизор. Взаимодействие токов I и ι с голоморфной геометрией на Σ описывается следующим операторным "фоном":

$$B(\mathcal{P}, x_0) = [\theta(\mathcal{P} - 2\Delta - \oint_b I + \oint_b \iota)]^{-1} \exp \frac{-1}{\pi i} \sum_{i=1}^{g} \oint_{a_i} \omega_i(u) \int_{x_0}^{u} I \times$$

$$\times \left(\exp \int_{2(g-1)x_0}^{\mathcal{P}} I\right) \prod_{\alpha<\beta} E(z_\alpha, z_\beta)^{-1} \prod_\alpha \sigma(z_\alpha)^{-2} \tag{4}$$

(этот оператор создает из вакуума $|0\rangle$ "одетый" вакуум $B|0\rangle$, соответствующий $\beta\gamma$-системе на Σ). Здесь Δ – риманов класс и σ – $g/2$-дифференциал Фея [6]. В аргументах θ-функций здесь и далее подразумевается отображение Абеля. Операторная часть аргумента – это b-периоды токов I и ι.

Все составные операторы предполагаются нормально упорядоченными в соответствии с

$$:I(u)I(v): = I(u)I(v) + \omega(u, v); \qquad :\iota(u)\iota(v): = \iota(u)\iota(v) - \omega(u, v) \tag{5}$$

и правилом Вика для старших мономов.

Коль скоро фоновый оператор (4) учитывает "лишние" вставки $\xi(x_0)$ и $\prod^{2g-2}\exp\phi(z_\alpha)$, нам остается представить "нейтральные" комбинации вертексных операторов, именно,

$$\widehat{\exp(-\phi(w))\exp\phi(z)} = E(w, z)\left(\frac{E(z, x_0)}{E(w, x_0)}\right)^2 \exp\int_w^z I \tag{6}$$

$$\widehat{\xi(x)\eta(y)} = \frac{1}{E(x, y)} \frac{E(x, x_0)}{E(y, x_0)} \exp\int_y^x \iota \, \frac{\theta(x + x_0 - 2y - \oint_b j + \oint_b \iota)}{\theta(x_0 - y - \oint_b j + \oint_b \iota)}, \tag{7}$$

где обозначено

$$j(u) = I(u) + 2d_u \ln E(x_0, u). \tag{8}$$

Шляпки в левых частях (6) и (7) указывают, что мы не предполагаем существования входящих туда сомножителей по отдельности. Отметим, что в правой части (6) произведение примформ оказывается 1/2-дифференциалом по z и $(-3/2)$-дифференциалом по w, а в (7) – соответственно 1- и 0-дифференциалом по y и x.

Предлагаемая нами схема операторной бозонизации предполагает, что произведение любого числа вставок (6) и (7) существует на фоне оператора B (4), то есть операторы (6) и (7) действуют на одетый вакуум $B\,|\,0\rangle$ (при этом бра-вакуумом остается $\langle 0\,|\,!\,)$.

Выполняя слияние операторов (6) и (7) с фоном B в единое нормально упорядоченное выражение, находим

$$\overbrace{\prod_{m=1}^{p} :\exp(-\phi(w_m))\ \exp\phi(z_m):\ \prod_{l=1}^{n} :\widehat{\xi(x_l)\eta(y_l)}:\ :B:} =$$

$$= \prod_{l=1}^{n} \frac{\theta(-y_l + \sum_{j=0}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j + \Sigma qz - 2\Delta - \oint_b I + \oint_b \iota)}{\theta(-x_i + \sum_{j=0}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j + \Sigma qz - 2\Delta - \oint_b I + \oint_b \iota)}\ \frac{1}{\theta(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) + \Sigma qz - 2\Delta - \oint_b I + \oint_b \iota)} \times$$

$$\times \exp\Big(\int_{2(g-1)x_0}^{\mathcal{P}} I + \sum_{m=1}^{p}\int_{w_m}^{z_m} I\Big) \prod_{l=1}^{n} \exp\int_{y_l}^{x_l}\iota\ \exp\frac{-1}{\pi i}\sum_{i=1}^{n}\oint_{a_i}\omega_i(u)\int_{x_0}^{u} I \cdot \prod_{0<i<j<n} E(x_i, x_j) \times \tag{9}$$

$$\times \prod_{1<i<j<n} E(y_i, y_j) \prod_{\substack{i=0\\ j=1}}^{n} E(x_i, y_j)^{-1} \prod_{k<e} E(z_k, z_e)^{-q_k q_e} \prod_k \sigma(z_k)^{-2q_k},$$

где $\Sigma q_k z_k = \Sigma z_\alpha + \sum_m (z_m - w_m) \equiv \mathcal{P} + \Sigma z - \Sigma w$ и операторное выражение в правой части предполагается нормально упорядоченным.

Корреляционные функции $\beta\gamma$-системы на Σ теперь воспроизводятся применением к (9) $\langle 0\,|\cdots|\,0\rangle$-среднего, что в свою очередь эквивалентно формальному обращению в ноль всех операторных токов в (9), коль скоро выражение (9) было нормально упорядоченным.

Отметим разительные перемены аргументов тэта-функций в (9) по сравнению с таковыми в (4), (6) и (7). Они происходят в результате слияния операторных тэта-функций с операторными экспонентами. Слияния экспонент между собой порождают многочисленные c-числовые множители в (9). Важно, что слияния тэта-функций друг с другом не производят никакого эффекта. Дело в том, что комбинация $\oint_b \iota - \oint_b I$ является "изотропной" в следующем смысле:

$$\langle 0\,|\,(\oint_{b_i}\iota - \oint_{b_i} I)(\oint_{b_j}\iota - \oint_{b_j} I)\,|\,0\rangle = \tau_{ij} - \tau_{ij} = 0\,.$$

Итак, корреляционные функции действительно порождаются слиянием нужного числа операторных вставок с операторным фоном. Займемся отдельно вставками (подразумевая, что они живут на фоне B). Из (6) и (7) получается для $\beta\gamma$-пары

$$\widehat{\beta(u)\gamma(v)} = -\partial_u\,(\widehat{\xi(u)\eta(v)})\,\overbrace{\exp(-\phi(u))\exp\phi(v)} =$$

$$= -\frac{E(v, x_0)}{E(u, x_0)}\Big(\exp\int_v^u \iota\Big)\frac{\theta(x_0 - v - \oint_b j + \oint_b \iota)}{\theta(x_0 - u - \oint_b j + \oint_b \iota)}\exp\int_u^v I\ \cdot \tag{10}$$

$$\cdot\Big[d_u \ln\frac{E(u, x_0)}{E(u, v)} + \iota(u) + \omega_l(u)\partial_l \ln\theta(x_0 - v - \oint_b j + \oint_b \iota)\Big]\,.$$

Отсюда находим, что духовый ток, определенный как

$$j(v) = - \lim_{u \to v} \left(\beta(u)\,\gamma(v) - \frac{1}{u-v} \right)$$

совпадает с выражением (8); аналогично, для $\xi\eta$-тока $i = \xi\eta -$ (сингулярность) получаем

$$i(y) = \iota(y) + d_y (\ln E(x_0, y) - \ln\theta(x_0 - y - \oint_b j + \oint_b \iota)) \,. \tag{11}$$

Он отличается от $\iota(y)$ на операторное слагаемое, зависящее от b-периодов тока j ! Это слагаемое и ответственно за дополнительные нефизические полюса. Действительно, аргумент тэта-функции в (11) меняется в зависимости от других операторных вставок (каждое $\widehat{\exp(-\phi(w))\exp\phi(z)}$ сдвинет его на $z - w$, а $\widehat{\xi(x)\eta(y)}$ – на $x - y$). Таким образом, мы установили операторный механизм, посредством которого ток реагирует на положения нефизических полюсов. Ясно, что нестандартное операторное слагаемое из (11) сохранится и в других выражениях, где участвует ток i : так, имеем правила слияния

$$i(x)i(y) = :i(x)i(y): + \omega(x,y) +$$

$$+ \omega_i(x)\,\omega_j(y)\,\partial_i\partial_j(\ln\theta(x_0 - x + \oint_b \iota - \oint_b j) + \ln\theta(x_0 - y + \oint_b \iota - \oint_b j)) \tag{12}$$

$$j(u)i(v) = :j(u)i(v): + \omega_i(u)\omega_j(v)\ \partial_i\partial_j \ln\theta(x_0 - v - \oint_b j + \oint_b \iota), \tag{13}$$

Из (10) находим также тензор энергии-импульса

$$T(v) = -\frac{1}{2}j(v)^2 - \partial_v j(v) + \frac{1}{12}S(v) + \frac{1}{2}i(v)^2 + \frac{1}{2}\partial_v i(v) + \frac{1}{12}S(v) \tag{14}$$

(где S – проективная связность на Σ [6]), и в операторном произведении TT также появляются дополнительные слагаемые. Мы не будем явно выписывать это достаточно громоздкое выражение; оно непосредственно следует из вышеприведенных формул и

$$T(u)j(v) = :T(u)j(v): + j(u)\,\omega(u,v) + \partial_u\omega(u,v) \,. \tag{15}$$

Можно надеяться, что развитый выше "глобальный" операторный формализм, учитывающий глобальные свойства римановой поверхности в самой структуре рассматриваемых операторов, позволит продвинуться в анализе многопетлевых вкладов [1,3,7]. Наиболее непосредственные приложения – это построение на операторном уровне тока суперсимметрии, $BRST$-заряда и оператора смены представления на произвольных римановых поверхностях. Тем самым описание струн на римановых поверхностях на языке конформной теории приобретает тот же статус, что и в локальном случае [4]. Интересно также обобщить на суперслучай операции сшивания римановых поверхностей и приклеивания ручки [8].

Литература

1. *Verlinde E., Verlinde H.* Phys. Lett. B, 1987, **192**, 95.
2. *Lechtenfeld O., Parkes A.* Phys. Lett. B, 1988, **202**, 75; *Lechtenfeld O.* Nucl. Phys. B, 1988, **309**, 361; *Белавин А.А., Книжник В.Г., Морозов А.Ю., Переломов А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 319; *Книжник В.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 8; *Морозов А., Переломов А.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 125; *Морозов А.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 181.
3. *Atick J.J., Sen A.* Nucl. Phys. B, 1988, **296**, 157.
4. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Nucl. Phys. B, 1986, **271**, 93.

5. *Semikhatov A.M.* Phys. Lett. B, 1988, **212**, 357.
6. *Fay J.D.* Theta functions on Riemann surfaces, LNM 352, 1973.
7. *Atick J. J., Moore G., Sen A.* Nucl. Phys. B, 1988, **308**, 1.
8. *Semikhatov A.M.* Preprint FIAN № 197, 1988.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 декабря 1988 г.