Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 4, стр. 185 – 189 *25 февраля 1989 г.*

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К АКСИАЛЬНОЙ АНОМАЛИИ

А.А.Ансельм, А.А.Иогансен

Показано, что аномалия в дивергенции аксиального тока не исчерпывается одной петлей. Неучтенный ранее вклад происходит от диаграмм рассеяния света на свете. Вычислены радиационные поправки для КЭД, неабелевой калибровочной теории и суперсимметричной калибровочной теории.

В течение многих лет считалось, что величина дивергенции аксиального тока определяется одной петлей (теорема Адлера–Бардина [1]). В суперсимметричных теориях эта дивергенция входит в один супермультиплет со следом тензора – энергии импульса, пропорционального β-функции, и поэтому не должна исчерпываться одной петлей. Попыткам разрешения этого парадокса посвящена обширная литература [2 – 15].

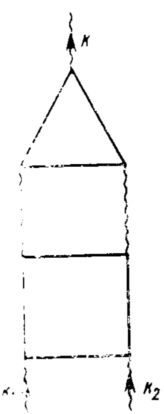

Рис. 1

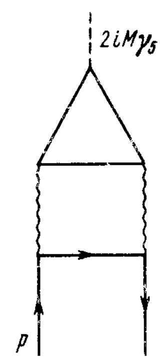

Рис. 2

В настоящей статье мы покажем, что в любой теории, в том числе не суперсимметричной, аномалия аксиального тока имеет многопетлевой характер. Наше наблюдение состоит в том, что диаграммы рассеяния света на свете, отброшенные в [1] на основании размерностных соображений, не могут быть опущены, если масса фермиона равна нулю. В самом деле, диаграмма для аномалии с рассеянием света на свете (рис. 1) была оценена в [1] как $\sim F\tilde{F}(k_1 k_2/m^2)$ (m – масса фермиона), где фактор $k_1 k_2/m^2$ связан с рассеянием света на свете. Если, однако, $m = 0$ (фактически, если $m^2 \ll |k_1^2|, |k_2^2|, |k_1 k_2|$), приведенная оценка несправедлива: амплитуда рассеяния света на свете ~ 1.

Мы провели прямое вычисление диаграмм с рассеянием света на свете типа рис. 1 для КЭД методом фонового поля (background field method). Несмотря на появление в промежуточных выражениях сложных функций внешних импульсов окончательный ответ для амплитуды перехода $\partial_\mu j_\mu^5$ в два фотона имеет очень простой вид:

$$\partial_\mu j_\mu^5 = F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \frac{e_0^2}{8\pi^2} \left(1 - \frac{3e_0^4}{64\pi^4} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}\right). \tag{1}$$

Здесь Λ – ультрафиолетовое обрезание, коэффициент при логарифме не зависит от соотношения между k_1^2, k_2^2 и $k^2 = (k_1 + k_2)^2$. В (1) опущены конечные члены $\sim e_0^4$.

Общий множитель e_0^2 в (1) превращается в перенормированный заряд при включении радиационных поправок во внешние фотонные линии. Зависимость от обрезания в скобке в (1) может быть устранена мультипликативной перенормировкой оператора $\partial_\mu j_\mu^5$. Если умножить обе части (1) на $Z = 1 + Ce_0^2$, и учесть, что $e_0^2 = e^2(k)(1 + (1/12\pi^2) \times e^2(k) \ln \Lambda^2/k^2)$, то при $C = 9/16\pi^2$ зависимость от Λ исчезает. Имеем:

$$(\partial_\mu j_\mu^5)_{ren} = Z(\partial_\mu j_\mu^5) = F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \frac{e^2(k)}{8\pi^2} \left(1 + \frac{9e^2(k)}{16\pi^2}\right). \tag{2}$$

Необходимость перенормировки уравнения (1) вполне естественна, поскольку в него входит несохраняющийся ток j_μ^5 [1)]. Непосредственно перенормировка дивергенции $\partial_\mu j_\mu^5$ определяется в низшем неисчезающем приближении диаграммой рис. 2, где в треугольнике распространяется регуляторное фермионное поле с массой $M \to \infty$. Прямое вычисление диаграммы рис. 2 дает:

$$\partial_\mu j_\mu^5 \to \partial_\mu j_\mu^5 \left(1 - \frac{3e_0^4}{64\pi^4} \ln \Lambda^2/p^2\right), \tag{3}$$

где p – импульс безмассового фермиона. Видно, что как и выражение (1) соотношение (3) требует мультипликативной перенормировки с $Z = 1 + 9e_0^2/16\pi^2$. Совпадение констант Z, найденных из (1) и (3), является проверкой правильности вычисленного нами вклада рассеяния фотона на фотоне.

Интересно проследить, что происходит при $m \neq 0$. При $m^2 \sim k^2$ в однопетлевом приближении амплитуда перехода $\partial_\mu j_\mu^5$ в два фотона равна [16]:

$$\langle 2\gamma | \partial_\mu j_\mu^5 | 0 \rangle = \frac{e_0^2}{8\pi^2} (1 + 2m^2 I_{00}) F\tilde{F},$$

$$I_{00}(k_1, k_2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, [x(1-x)k_1^2 + y(1-y)k_2^2 + 2xy k_1 k_2 - m^2]^{-1}. \tag{4}$$

Прямое вычисление диаграмм типа рис. 1 с $m \neq 0$ дает

$$-\frac{3e_0^4}{64\pi^4} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} (1 + 2m^2 I_{00}) \frac{e_0^2}{8\pi^2} F\tilde{F}. \tag{5}$$

Как и в безмассовом случае весь вклад (5) определяется диаграммами, в которых в треугольнике распространяется регуляторный фермион, а в квадратике – легкий.

---

1) Заметим, что j_μ^5 перенормируется мультипликативно. Имеющий ту же размерность ток K_μ $(\partial_\mu K_\mu = F\tilde{F})$ не может (локально) подмешиваться к j_μ^5, так как является калибровочно неинвариантным.

В уравнении (5) появляется то же выражение $1 + 2m^2 I_{00}$, что и в (4), но в отличие от уравнения (4) оно возникает от интегрирования квадратика, а не треугольника. Это обеспечивает мультипликативную перенормируемость амплитуды. Величина Z при этом не зависит, конечно, от соотношения между m^2 и k^2. При $m^2 \gg k^2$ $1 + 2m^2 I_{00} \to 0$; в (4) это отражает факт сокращения вклада регуляторного и физического фермионов, в (5) – соответствует аргументации Адлера–Бардина о подавлении диаграмм рассеяния света на свете фактором k^2/m^2.

Приведенные выше формулы допускают ренормгрупповое обобщение. Используя стандартную технику (уравнение Калана–Симанзика), легко вывести следующие точные соотношения

$$\partial_\mu j^5_\mu = \frac{e^2(k)}{8\pi^2} F\tilde{F}\varphi(e_0^2, \ln\frac{\Lambda^2}{k^2}) = \frac{e^2(k)}{8\pi^2} F\tilde{F}\varphi(e^2(k), 0)\frac{Z(e^2(k))}{Z(e_0^2)} , \tag{6}$$

где

$$Z(e^2) = \exp\int_0^{e^2} \frac{\gamma(e_1^2)}{\beta(e_1^2)}\, de_1^2 , \tag{7}$$

$\beta(e^2)$ – функция Гелл–Мана–Лоу, $\gamma(e^2)$ – аномальная размерность оператора j^5_μ.

Как известно из анализа Адлера–Бардина [1] двухпетлевая поправка к аномалии отсутствует [2)]. Это означает, что $\varphi(e_0^2, \ln\Lambda^2/k^2) = 1 + O(e_0^4)$. Используя значения $\beta(e^2) = e^4/12\pi^2$ и $\gamma(e^2) = 3e^4/64\pi^4$, мы воспроизводим формулу (2).

Выпишем без вывода обобщение уравнения (2) для случая неабелевой калибровочной теории с группой $SU(N)$ с фермионом, принадлежащим представлению R:

$$(\partial_\mu j^5_\mu)_{ren} = F\tilde{F}\frac{g^2(k)}{8\pi^2} T(R)\left(1 - \frac{3g^2(k)}{4\pi^2}\,\frac{T(R)C_2(R)}{\frac{11}{3}N - \frac{4}{3}T(R)} + \frac{g^2(k)N}{4\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2}k^2 I_{00}\right)\right). \tag{8}$$

Здесь I_{00} дается формулой (4) с $m = 0$. Как видно, выражение для $\partial_\mu j^5_\mu$ не представляется в этом случае числовым рядом по $g^2(k)$. Последний член в (8) связан с глюонным самодействием.

Обратимся теперь к суперсимметричной КЭД. Выше мы вычислили радиационные поправки к вершине испускания двух фотонов из одной точки – величине $F\tilde{F}$. В суперсимметричной теории $F\tilde{F}$ содержится в мнимой части F-члена квадрата супернапряженности $W^\alpha W_\alpha = W^2$. Поэтому теперь необходимо найти радиационные поправки к величине W^2. Рассмотрим производящий функционал J в присутствии внешнего векторного суперполя

$$J = \int DVD\phi_+ D\phi_- \exp iS(V + V_{ext}, \phi_+, \phi_-), \tag{9}$$

$$S = \frac{1}{4g_0^2}\int d^4x\Big(([W^2]_F + [\bar{W}^2]_F) + [\phi_+^+ e^V \phi_+ + \phi_-^+ e^{-V}\phi_-]_D\Big).$$

---

2) Авторы работы [13] связывали этот факт с "двухпредельной техникой ", использованной в [1]. Можно, однако, показать с помощью метода фонового поля, что в действительности двухпетлевая поправка исчезает еще до интегрирования по координатам.

Логарифмическая производная функционала J по $1/g_0^2$ определяет точное значение (включающее все радиационные поправки) величины W^2, проинтегрированной по $d^4xd^2\theta$:

$$\int d^4xd^2\theta\langle W^2\rangle = -4i\partial/\partial(1/g_0^2)\ln J. \qquad (10)$$

Дифференцирование здесь следует понимать несколько условно: в выражении для действия коэффициенты при W^2 и $\overline{W}^2$ надо считать независимыми.

С другой стороны, величина J может быть записана через эффективное действие , зависящее от внешнего поля V_{ext} и характерного импульса, связанного с этим полем:

$$J = e^{iS_{eff}}\ ; \quad S_{eff} = \int d^4x\,\frac{1}{4g^2(k)}\,([W^2_{ext}]_F + \text{э. с.}). \qquad (11)$$

В выражении для S_{eff} мы сохранили только квадратичные по W_{ext} члены. Дифференцируя (11) по $1/g_0^2$, имеем:

$$\langle W^2\rangle = \frac{\partial}{\partial(1/g_0^2)}\,\frac{1}{g^2(k)}\,W^2_{ext} = \frac{g_0^4\,\beta(g^2(k))}{g^4\beta(g_0^2)}\,W^2_{ext} = \frac{\beta(g^2)\beta_1(g_0^2)}{\beta_1(g^2)\beta(g_0^2)}\,W^2_{ext}, \qquad (12)$$

где β и β_1 – точная и однопетлевая β-функции. Мы проверили справедливость (12) в первом приближении по g_0^2 ($\sim g_0^4\ln\frac{\Lambda^2}{k^2}$) прямым вычислением, используя метод суперграфов в фоновом поле [17]. В [14] было отмечено, что регуляризованное выражение для j^5_μ может быть построено различными способами. При одном из способов в величине $\partial_\mu j^5_\mu$ отсутствует двухпетлевая поправка – с этой точностью дивергенция тока как бы удовлетворяет теореме Адлера–Бардина. Однако из-за диаграмм типа рассеяния света на свете (уравнение 12) трехпетлевая поправка $\sim g_0^6\ln\frac{\Lambda^2}{k^2}$ отлична от нуля. После перенормировки, то есть умножения $\partial_\mu j^5_\mu$ на подходящее $Z(g_0^2)$, возникает поправка $\sim g^4(k)$, согласующаяся с появлением полной β-функции в уравнении для $\partial_\mu j^5_\mu$. При другом способе определения тока j^5_μ он входит в один супермультиплет с тензором энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$. В этом случае уже на двухпетлевом уровне авторы [14] нашли поправку $\sim g_0^4$. Это и неудивительно. Действительно, в этом случае ток j^5_μ не требует перенормировки (его аномальная размерность как и $\theta_{\mu\nu}$, равна нулю), поэтому в уравнении (6) отсутствуют функции $Z(g^2(k))$, $Z(g_0^2)$. Однако функция $\varphi(g^2,0)$, зависящая от определения регуляризованного тока, отлична от нуля фактически: $\varphi(g^2(k),0) = \beta(g^2)/\beta_1(g^2)$. Окончательный ответ для величины $\partial_\mu j^5_\mu$ получается тем же самым, что и для первого определения тока.

Анализу физических приложений многотеплевого характера аномалии будет посвящена другая публикация.

Мы благодарны Л.Б.Окуню, М.И.Эйдесу и особенно А.М.Полякову за полезные дискуссии.

Литература

1. *Adler S.L., Bardeen W.A.* Phys. Rev., 1969, **182**, 1517.
2. *Grisaru M.T.* In: Recent developments in gravitation. Eds. S.Deser and M.Levy, N.Y.: Plenum, Press, 1979.
3. *Clark T.E., Piguet O., Sibold K.* Nucl. Phys. B, 1978, **143**, 445; Nucl. Phys. B, 1980, **172**, 201.
4. *Piguet O., Sibold K.* Nucl. Phys. B, 1982, **196**, 428, 447.
5. *Jones D.R.T.* Phys. Lett. B, 1983, **123**, 45.
6. *Grisaru M.T., West P.* Nucl. Phys. B, 1985, **254**, 249.
7. *Вайнштейн А., Захаров В., Новиков В., Шифман М.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **40**, 161.

8. *Jones D.R.T., Mesincescu L.* Phys. Lett. B, 1984, **136**, 283; 1984, **138**, 242.
9. *Breitenlohner P., Maison D., Stelle K.* Phys. Lett. B, 1984, **134**, 63.
10. *Espriu D.* Preprint 57/84, Oxford, 1984.
11. *Казаков Д.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **41**, 272.
12. *Jones D.R.T., Mesincescu L., West P.* Phys. Lett. B, 1985, **151**, 219.
13. *Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* Phys. Lett. B, 1985, **157**, 169.
14. *Grisaru M.T., Milewski B., Zanon D.* Phys. Lett. B, 1985, **157**, 219; Nucl. Phys. B, 1986, **266**, 589.
15. *Shifman M.A., Vainshtein A.I.* Preprint 86-62, Novosibirsk, 1986.
16. *Adler S.L.* Phys. Rev., 1969, **177**, 2426.
17. *Grisaru M.T., Zanon D.* Nucl. Phys. B, 1985, **252**, 578.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 января 1989 г.