

## СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ И СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ В 2 + 1-КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМ МАССОВЫМ ЧЛЕНОМ

*Я.И.Коган*

В 2 + 1-калибровочной теории с топологическим массовым членом при некоторых значениях параметров возникает притяжение между одноименно заряженными фермионами. Обсуждается структура сверхпроводящего состояния.

Рассмотрим 2 + 1-калибровочную теорию с топологическим массовым членом (членом Черна–Саймонса), пусть для простоты это будет абелева теория (фотоны) с одним типом фермионов (электроны). лагранжиан которой <sup>1, 2</sup>:

$$L = -\frac{1}{4\gamma} F_{\mu\nu}^2 + \frac{H}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} A_\lambda + \bar{\psi}(i\not{\partial} - A)\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (1)$$

Топологический член можно рассматривать как затравочный, так и индуцированный<sup>3-5</sup>, в этом случае он возникает в однопетлевом приближении при интегрировании по тяжелым фермионам с массами  $M_i$  много больше всех характерных импульсов в (1) и

$$H_{ind} = \frac{1}{4\pi} \sum_i M_i / |M_i| = n/4\pi, \quad n = N^+ - N^- \quad (2)$$

Заметим, что в неабелевом случае допустимы ровно такие значения  $H$ .

1. Наличие топологического члена приводит к тому, что у фотона возникает масса  $\mu = \gamma H$ , а в пропагаторе возникает дополнительная поперечная структура  $\sim \epsilon_{\mu\nu\lambda} p_\lambda$ :

$$G_{\mu\nu}(p) = \frac{\mu}{H} \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^2 - \mu^2} - \frac{i}{H} \frac{\mu^2}{p^2 (p^2 - \mu^2)} \epsilon_{\mu\nu\lambda} p_\lambda + \alpha p_\mu p_\nu \quad (3)$$

наличие которой приводит к важному факту: покоящийся заряд является источником не только электрического, но и магнитного поля, потенциалы и напряженность, отвечающие точечному заряду (здесь и далее  $e = 1$ ), суть:

$$A_0 = \Phi = \frac{1}{H} \frac{\mu}{p^2 + \mu^2}, \quad A_i = \frac{i\mu^2}{H p^2 (p^2 + \mu^2)} \epsilon_{ij} p_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (4)$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} F_{ij} = \frac{\mu^2}{H} \frac{1}{p^2 + \mu^2} = \mu\Phi$$

в импульсном представлении ( $p_\mu = (0, \mathbf{p})$ ), и

$$F(\mathbf{r}) = \mu\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mu^2}{2\pi H} K_0(\mu r) \quad (5)$$

в координатном.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух электронов, описываемое в нерелятивистском приближении (законность приближения оправдана найденным решением) уравнением Паули для частицы с приведенной массой  $m/2$  во внешнем электрическом и магнитном полях:

$$\left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{m} + \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{m} F(\mathbf{r}) \right] \Psi = \epsilon \Psi \quad (6)$$

Подставляя (4), (5) в (6) и переходя к  $\Psi(\mathbf{r}, \theta) = \Psi_l(r) \exp(i l \theta)$  получаем

$$-\frac{1}{m} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi_l}{dr} \right) + \left[ \frac{(l - c(r))^2}{m r^2} - \left( \frac{\mu}{m} - 1 \right) \frac{\mu}{2\pi H} K_0(\mu r) \right] \Psi_l = \epsilon_l \Psi_l \quad (7)$$

$$c(r) = r A_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi H} (1 - \mu r K_1(\mu r)), \quad (8)$$

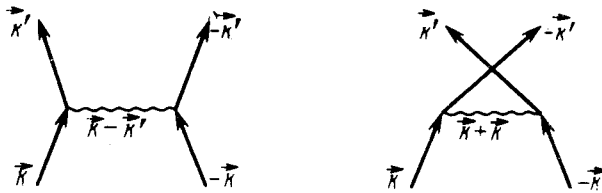
где в силу ферми-статистики  $l = 2k + 1$ . Если существует несколько типов фермионов, то допустимы и четные значения момента в парах образованных разными фермионами. При  $\mu/m > 1$  магнитное притяжение сильнее электрического отталкивания и мы получаем возможность образования связанного состояния. Если  $H \ll 1$ , то имеем случай сильной связи, когда заведомо существуют уровни энергии для нескольких низших значений  $l$ , однако в более интересном случае индуцированного (или неабелевого)  $H$  (см (2))

возникает слабая связь  $\frac{m}{2} \int U(r) r dr = \frac{\mu - m}{\mu} n^{-1} < 1$  и в случае постоянного момента связанное состояние существует только в  $s$ -волне<sup>6</sup>. Но как видно из (7), (8) эффективный момент зависит от расстояния, вследствие этого в некотором интервале значений  $H$  существует связанное состояние и в интересующем нас случае  $l = 1$  ( $p$ -волна). Пусть  $H_0 = (2\pi)^{-1} (n = 2, \text{ см. (2)})$ , тогда центробежный барьер на больших расстояниях полностью

исчезает (это известная трансмутация спина, см. <sup>7, 8</sup>) и мы имеем дело с эффективным  $s$ -волновым уравнением с потенциалом

$$U(r) = \frac{\mu^2}{m} \left[ K_1^2(\mu r) - \frac{\mu - m}{\mu} K_0(\mu r) \right], \quad (9)$$

в котором существует связанное состояние, грубая оценка для энергии связи дает (вывод и общий анализ спектра будет опубликован в подробной статье)  $\epsilon \sim \sim \mu^2/m \exp(-c(\mu/\mu - m)^2)$ ,  $c \sim 1$  при условии  $\mu - m \ll \mu$ . Очевидно, что связанное состояние продолжает существовать и в некотором интервале значений  $H$ , пока центробежная энергия меньше энергии связи при  $H_0 = (2\pi)^{-1}$ .



2. Перейдем от двухчастичной к многочастичной задаче, пусть имеется энергия Ферми  $\epsilon_F$  и предположим, что основное состояние при нулевой температуре описывается волновой функцией типа БКШ:

$$|\Phi\rangle = \prod_i |\psi_{k_i}\rangle, \quad |\psi_{\mathbf{k}}\rangle = U_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle + V_{\mathbf{k}} |0\rangle.$$

тогда получаем стандартное уравнение для щели, отличающееся от обычного только отсутствием спиновой структуры:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}'}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}'}|^2}}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{2m} - \epsilon_F, \quad (10)$$

где потенциал  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  определяется диаграммами рисунка, относительный знак которых разный из-за ферми-статистики (в отличие от стандартного случая, когда антисимметрия обеспечивалась спиновой частью волновой функции пары). После несложных вычислений для интересующей нас области импульсов получаем:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = - \frac{\mu(\mu - m)}{mH} \left[ \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + \mu^2} - \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2 + \mu^2} \right] = - \frac{4(\mu - m)}{m\mu^3 H} (\mathbf{k}\mathbf{k}') \quad (11)$$

при  $|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'| \ll \mu$ , множитель  $(\mathbf{k}\mathbf{k}')$  отражает факт спаривания в  $p$ -волне, аналогично случаю сверхтекучего  $\text{He}^3$ .

Подставляя (11) в (10) получаем уравнение для щели

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{2(\mu - m)}{m\mu^3 H} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}'}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}'}|^2}}, \quad (12)$$

имеющее комплексное решение  $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0(K_1 + iK_2)$ , для  $\Delta_0$  имеем:

$$1 = \frac{2(\mu - m)}{m\mu^3 H} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\sqrt{\Delta_0^2 k^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2}}, \quad k^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \quad (13)$$

и в случае слабой связи  $\mu - m/\mu \ll 1$  получаем

$$\Delta_0 \sim \epsilon_F / k_F \exp(-\pi H \mu^2 / 2(\mu - m) \epsilon_F). \quad (14)$$

Заметим, что слабая связь является естественной, так как радиационные поправки к массе фермиона из-за второго члена в пропагаторе (3) всегда порядка  $\mu/H$  и вследствие этого иметь  $m \ll \mu$  практически невозможно.

3. Обсудим теперь реализацию рассмотренного сценария в реальных квазидвумерных системах. Эффективный лагранжиан  $2 + 1$ -теории получается редукцией из  $3 + 1$ , размерный параметр  $\gamma$  (заряд  $2 + 1$ -теории) по порядку величины совпадает с  $e^2 a^{-1}$ ,  $e$  — обычный электрический заряд,  $a$  — расстояние между плоскостями. Однако, при редукции свободного фермионного лагранжиана всегда появляются пары фермионов с противоположными по знаку массами, вследствие (2)  $H_{ind} = 0$  <sup>3-5</sup>. Это спаривание — следствие  $P$ - и  $T$ -симметрии исходной модели. Для получения  $P$  и  $T$  нечетного топологического массового члена необходимо нарушить эти симметрии в исходной  $3 + 1$ -системе, например, введением магнитного поля  $\mathcal{H}$  перпендикулярно плоскости редукции (или в более общем случае — введение магнитного упорядочивания). При этом возникает магнитная добавка к массе электрона  $\mu\mathcal{H}$ ,  $\mu$  — здесь магнитный момент, одного знака для обоих фермионов, таким образом возникают  $2 + 1$ -фермионы с массами  $\pm M + \mu\mathcal{H}$  и при больших  $\mathcal{H}$  возникает  $H_{ind}$ . Заметим, что и найденное связанное состояние в (7) также  $P$  и  $T$  нечетно — оно существует только для  $l = +1$ , но не  $-1$  (о  $P$  и  $T$  нарушении см, также <sup>10</sup>).

Представляет интерес понять, имеет ли предложенная схема отношение к ВТСП и ее связь с моделями антиферромагнитного порядка в CuO-керамиках <sup>11</sup>. Подробное изложение полученных результатов будет опубликовано.

#### Литература

1. *Shonfeld J.* Nucl. Phys. B, 1981, 185, 157.
2. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Phys. Rev. Lett., 1982, 48, 975.; Ann. Phys., N.Y., 1982, 140, 372.
3. *Niemi A., Semenoff G.* Phys. Rev. Lett., 1983, 51, 277.
4. *Redlich A.* Phys. Rev. Lett., 1984, 52, 18.
5. *Коган Я.И., Морозов А.Ю.* Preprint ИТЕР-104, 106, 1984; ЖЭТФ, 1985, 88; ЯФ, 1985, 41, 1080.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, М.: Наука, 1974.
7. *Wilczek F.* Phys. Rev. Lett., 1982, 48, 1144; 49, 957; *Wilczek F., Zee A.* Phys. Rev. Lett., 1983, 51, 2250.
8. *Polyakov A.M.* Mod. Phys. Lett. A, 1988, 3, 325.
9. Сверхтекучесть гелия-3. Под ред. И.М.Халатникова. М.: Мир, 1977.
10. *March-Russel J., Wilczek F.* Preprint HUTP-88/A 045.
11. *Anderson P.W.* Science, 1987, B 235, 1196; *Wiegmann P.B.* Phys. Rev. Lett., 1988, 60, 821; *Dzyaloshinskii I.E., Polyakov A.M., Wiegmann P.B.* Phys. Lett. A, 1988, 127, 112.

Институт теоретической и  
экспериментальной физики

Поступила в редакцию  
16 января 1989 г.