

Невзаимное распространение солитонов в хиральной среде¹⁾

А. А. Заболотский²⁾

Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 16 июля 2019 г.

После переработки 5 августа 2019 г.

Принята к публикации 5 августа 2019 г.

Рассматривается эволюция поляризации светового импульса в системе, состоящей из двухуровневых атомов, расположенных на закрученных в пучок симметричных спиральных. Взаимодействие индуцированных диполей в уравнениях Максвелла в приближении ближайших соседей учитывается дополнительными дифференциальными членами третьего порядка. В условиях почти однонаправленного распространения выведено интегрируемое обобщение редуцированных уравнений Максвелла–Блоха. Анализ полученных решений показал, что эволюция импульсов поля критически зависит от направления их распространения или от хиральности среды.

DOI: 10.1134/S0370274X1917003X

1. Введение. Возможность контроля потоков энергии с использованием нелинейных свойств физических системы представляет как теоретический, так и важный практический интерес. Управлять волновыми импульсами, можно создав нелинейный “оптический диод” (ОД), в котором электромагнитные волны передаются по-разному для противоположных направлений распространения. В линейной T -симметричной системе такая возможность запрещена теоремой взаимности [1]. Поэтому изучению нелинейных сред с невзаимными свойствами уделяется особое внимание. Асимметричное распространение волн, вызванное нелинейностью, возникает в разных областях физики, в том числе в нелинейной оптике. Так называемый полностью ОД был предсказан в [2, 3], а затем реализован экспериментально в [4]. В качестве сред для создания ОД предложено использовать левосторонние метаматериалы [5], квазипериодические системы [6], связанные нелинейные полости [7] или PT -симметричные волноводы [1].

Нелинейные явления, связанные с эволюцией ультракоротких импульсов света в прямолинейных средах, содержащих резонансные атомы или молекулы, интенсивно исследуются, в том числе в рамках полностью интегрируемых уравнений, см., например, [8–10]. Если расстояние между атомами много меньше длины волны, то диполь-дипольное взаимодействие (ДДВ) может оказывать существенное влияние на формирование локализованных возбуждений в ди-

польным средах и на многие другие как линейные, так и нелинейные процессы. В одномерных и двумерных структурах, например, в магнетиках, жидких кристаллах, эффекты, ассоциированные с ДДВ, и геометрические факторы играют критическую роль [11]. Оптические хиральные среды с ДДВ могут быть сформированы на основе спирального расположения резонансных атомов, см., например, [12].

В данной работе в рамках выведенной интегрируемой модели показано, что ДДВ может приводить к нарушению условия взаимности распространения оптических солитонов в среде с атомами, расположенными на спиральных цепочках.

2. Вывод основной системы уравнений. Для $4\pi N_a d_a^2 / \hbar \omega_a \leq 1$, где N_a, d_a, ω_a – плотность двухуровневых атомов или молекул, дипольный момент, частота перехода, соответственно, применимо приближение однонаправленного распространения (ОР) света в протяженной одномерной среде, [13]. В большинстве двухуровневых сред для используемых в экспериментах характерных значений дипольных моментов применение приближения ОР возможно при достаточно большой плотности $N_a \sim 10^{-18} \text{ см}^{-3}$. Для цепочки атомов, лежащих на кривой $\gamma(\mathbf{s})$, энергия взаимодействия поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{s})$ с поляризацией среды $\mathbf{P}_m(\mathbf{s}) = \sum_n g_d(\mathbf{s} - \mathbf{s}_n) \boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_n)$ пропорциональна $-\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{P}_m$, где $\mathbf{s}_n = a\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \dots - 2 - 1, 0, 1, 2, \dots$ – координата атома на кривой, $\boldsymbol{\rho}$ – индуцированная поляризация одного атома и g_d – коэффициент взаимодействия. Близкое расположение атомов приводит к нелокальному взаимодействию. Для упрощения модели воспользуемся приближением ближайших соседей, которое уже длительное время применяется к

¹⁾См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

подобным молекулярным цепочкам, см., например, [14, 15]. В обоснование применения подхода отметим, что здесь рассматривается масштаб меньше длины волны, т.е. поле диполя спадает как куб расстояния. Импульсы поля считаем сверхкороткими, т.е. возбуждением достаточно далеких соседних атомов можно пренебречь. В рамках приближения ближайших соседей получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m(s_n) \approx & g_d(0)\boldsymbol{\rho}(\gamma(s_n)) + \\ & + g_d(s_n - s_{n-1})\boldsymbol{\rho}(\gamma(s_{n-1})) + \\ & + g_d(s_n - s_{n+1})\boldsymbol{\rho}(\gamma(s_{n+1})). \end{aligned} \quad (1)$$

Пространственное положение атомов показано на рис. 1. Они нанизаны на длинные нити, образующие

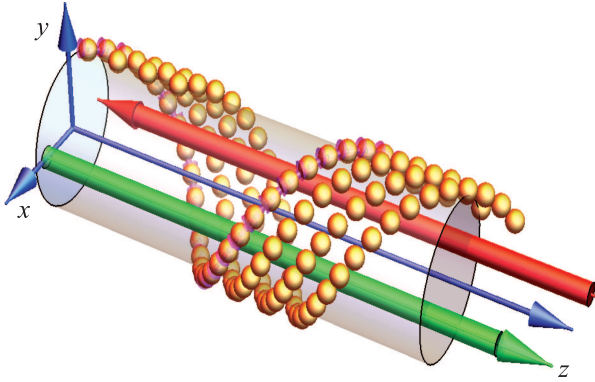


Рис. 1. (Цветной онлайн) Вид хиральной среды. Направление распространения импульсов параллельно оси z показано стрелками. Шарами показаны атомы, расположенные на спиралях

пакет длинных симметричных спиралей, закрученных вокруг оси z . Импульсы поля \mathbf{E} распространяются вдоль и против направления оси z . В декартовых координатах $\mathbf{e}_{x,y,z}$ спираль $\gamma(s)$ имеет вид

$$\gamma(s) = \mathcal{R}[\mathbf{e}_x \cos(k_h s) + \mathbf{e}_y \sin(k_h s)] + \mathbf{e}_z \mathcal{C} \frac{s}{\mathcal{L}}, \quad (2)$$

где $k_h = 2\pi/\mathcal{L}$, \mathcal{R} и \mathcal{P} – радиус и шаг спирали, соответственно, и $\mathcal{C} = \pm 1$ – хиральность спирали, $\mathcal{L} = \sqrt{\mathcal{P}^2 + 4\pi^2 \mathcal{R}^2}$. Здесь кривизна $\mathcal{C}_h = 4\pi^2 \mathcal{R}/\mathcal{L}^2$, а также кручение $\mathcal{T}_h = 2\pi \mathcal{C} \mathcal{P}/\mathcal{L}^2$ – константы. Считаем, что $s_n - s_{n-1} \ll \mathcal{R}, \mathcal{P}$. Разность проекций положений атомов в спирали на продольную координату z имеет вид $z_n - z_{n-1} = (s_n - s_{n-1}) \mathcal{C} \mathcal{P}/\mathcal{L} \equiv a \mathcal{C} \mathcal{P}/\mathcal{L}$.

Для учета влияния полей индуцированных диполей соседних атомов перейдем к вращающейся системе координат $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{P}$, $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{E}$. Где

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} \cos(k_h s) & \sin(k_h s) \\ -\sin(k_h s) & \cos(k_h s) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

При смещении на $s \rightarrow s \pm a$ происходит вращение поляризации $\mathbf{P}(s) \rightarrow \hat{M}(s)^{-1} \hat{M}(s \pm a) \mathbf{P}(s \pm a) = \hat{M}(\pm a) \mathbf{P}(s \pm a)$. Используя это свойство, находим из (1) с учетом проекции на ось z

$$\begin{aligned} & \left[\hat{M}(a) \mathbf{P}(s+a) + \hat{M}(-a) \mathbf{P}(s-a) \right] = \\ & = 2\mathbf{P}(s) + \begin{bmatrix} 0 & 2a\mathcal{T}_h \\ -2a\mathcal{T}_h & 0 \end{bmatrix} \partial_z \mathbf{P}(z) + \\ & + a^2 \partial_s^2 \mathbf{P}(s) + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрируемость модели позволяет выявить основные определяющие эффект нелинейности, выявить необходимые начальные условия и протестировать результаты численного анализа более общей и реалистичной модели. При нахождении интегрируемого случая, помимо стандартных условий, таких как отсутствие потерь и одномерное приближение, полагаем, что кривизной спирали и второй производной по s в правой части (4) можно пренебречь. При этом среда не обладает двухосной анизотропией и, как следствие, z -компонента поля может быть положена равной нулю. Уравнения Максвелла, описывающие эволюцию двухкомпонентного электрического поля, которое распространяется вдоль или против оси z , см. рис. 1, с учетом (1) и (4) приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \left[\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp} = \frac{4\pi N_a d_a}{c^2} \times \\ & \times \partial_t^2 \left[(1 + 2g_0) + \gamma_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z \right] \mathbf{P}_{\perp}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma_c = g_0 a^2 \mathcal{C} \mathcal{P}/\mathcal{L}$ и c – скорость света в среде. Здесь $g_0 = g_d(\pm a)$, $g_d(0) = 1$. $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp} = \{\mathcal{E}_x(z, t), \mathcal{E}_y(z, t)\}$, $\mathbf{P}_{\perp} = \{P_x(z, t), P_y(z, t)\}$.

Приближение ОР отвечает формальным условиям:

$$\partial_z = -\epsilon \partial_{ct} + \partial_{\chi}, \quad \partial_{\chi} \ll \partial_t, \partial_z, \quad (6)$$

где $\epsilon = 1$ отвечает направлению распространения поля от $z = -\infty$ до $z = \infty$, а $\epsilon = -1$ – наоборот. При выполнении условий (6) уравнения (5) представимы в виде

$$\frac{\partial E}{\partial \chi} = q \frac{\partial S}{\partial \varsigma} - ib \frac{\partial^2 S}{\partial \varsigma^2}, \quad (7)$$

где $E = E_x + iE_y$, $S = P_x + iP_y$, $E_{x,y} = d_0 \mathcal{E}_{x,y}/(\hbar\omega)$, $q = -1$, $\varsigma = t\omega$, $\epsilon = \epsilon \mathcal{C}$,

$$b = \frac{\epsilon g_0 \omega}{(1 + 2g_0) \mathcal{L} c}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\hbar c^2}{4\pi N_a d_a^2 \omega_0 (1 + 2g_0)} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \epsilon \frac{\partial}{c \partial t} \right). \quad (9)$$

С учетом нормировки уравнения Блоха для двухуровневой среды с частотой перехода ω имеют вид [16]

$$\partial_\zeta S = iS - iES_z, \quad (10)$$

$$\partial_\zeta S_z = \frac{1}{2}(ES^* - E^*S). \quad (11)$$

Отметим, что уравнения (10), (11) инвариантны относительно вращения, описываемого матрицей (3).

Редуцированные уравнения Максвелла–Блоха (РУМБ) (7) и (10), (11) являются условиями совместности следующих линейных систем:

$$\partial_\zeta \psi = \begin{bmatrix} -i\lambda & \gamma_x E \\ \tilde{\gamma}_x E^* & i\lambda \end{bmatrix} \psi, \quad (12)$$

$$\partial_\chi \psi =$$

$$\begin{bmatrix} i \frac{\lambda(2b\lambda - q)}{2\lambda + 1} S_z & \gamma_x \left[\frac{b+q}{2\lambda+1} S - bES_z \right] \\ \tilde{\gamma}_x \left[\frac{b+q}{2\lambda+1} S^* - bE^*S_z \right] & -i \frac{\lambda(2b\lambda - q)}{2\lambda + 1} S_z \end{bmatrix} \psi. \quad (13)$$

Здесь $\gamma_x = \varepsilon\lambda\sqrt{|b|}$, $\tilde{\gamma}_x = -[\lambda - q/(2b)]\sqrt{|b|}$.

Обозначим $\lambda = \eta + f$, $f = q/(4b)$ и $G = \sqrt{|b|}Ee^{i2f\zeta}$. Произведем замены $\psi = \Psi e^{-i\sigma_3 f\zeta}$ (σ_3 – матрица Паули) и $G(\tau) = F(\tau)F_3^{-1}(\tau)$, $F_3 = \sqrt{1 - \varepsilon|F|^2}$, где τ – новая переменная, такая что $d\zeta = F_3(\tau) d\tau$. Умножив систему уравнений (12) на F_3 , получаем

$$\partial_\tau \Psi = \begin{bmatrix} -i\eta F_3 & \varepsilon(\eta + f)F \\ -(\eta - f)F^* & i\eta F_3 \end{bmatrix} \Psi. \quad (14)$$

В работе [17] для системы (14), названной W-спектральной проблемой, приведен аппарат построения солитонных решений. Спектральные проблемы, близкие (14), применялись при решении уравнений хирального поля, двухволнового взаимодействия и Ландау–Лифшица, см. ссылки в [17].

Эффект невзаимного распространения продемонстрируем на простейшем, но нетривиальном солитонном решении. Для начально краевых данных: $E_{\pm\infty} = 0$, $\chi = 0$, $S_z(\chi) = -1$, $P(\chi) = 0$, находим солитонное решение, см. детали в дополнительном материале,

$$F_3(\tau) = \frac{|\cosh(\theta + i\delta)|^2 - \varepsilon\kappa^2}{|\cosh(\theta + i\delta)|^2 + \varepsilon\kappa^2}, \quad (15)$$

$$F(\tau) = \frac{2\kappa \cosh(\theta + i\delta) e^{2i\theta_2}}{|\cosh(\theta + i\delta)|^2 + \varepsilon\kappa^2}. \quad (16)$$

Здесь $\theta = \theta_1 + i\theta_2$,

$$\theta_1 = 2\text{Im}(\eta) [\tau - bw_0(\chi - \chi_1)], \quad (17)$$

$$\theta_2 = -\frac{2b - q}{2}w_0(\chi - \chi_2), \quad (18)$$

$$\frac{f + \eta^*}{f + \eta} = e^{-2i\delta}, \quad \kappa = \frac{\text{Im}(\eta)}{|f + \eta|}, \quad (19)$$

и $\chi_{1,2}$ – константы, определяемые из начальных условий. Для $\eta = i\eta_1$, $\eta_1 \in \mathbb{R}$ имеем $w_0 = (16b^2\eta_1^2 + q^2) / [16b^2\eta_1^2 + (q - 2b)^2]$.

Функцию $\tau(t)$ находим в неявном виде, интегрируя равенство $F_3(\tau)d\tau = \omega dt$,

$$\frac{A \arctan \left\{ \frac{\sqrt{2}[\cos(2\delta) + 2\varepsilon\kappa^2 - 1] \tanh(2\eta_1(\tau - \tau_0))}{\sqrt{1 - 8\varepsilon\kappa^2 \cos(2\delta) - \cos(4\delta) - 8\kappa^4}} \right\}}{\sqrt{1 - 8\varepsilon\kappa^2 \cos(2\delta) - \cos(4\delta) - 8\kappa^4}} + \tau = \omega t, \quad (20)$$

где $A = \sqrt{8\varepsilon\kappa^2}/\eta_1$, $\tau_0 = bw_0(\chi - \chi_1)$.

Временная зависимость амплитуды солитона $|G(t)| = |F|/F_3$ показана на рис. 2 для

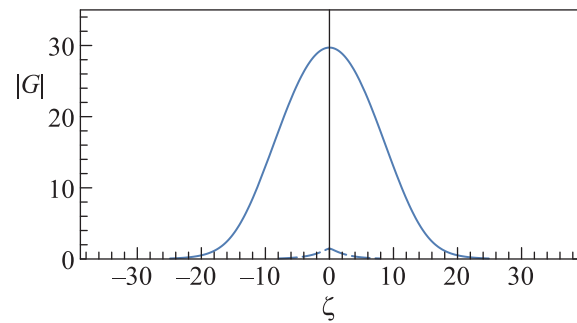


Рис. 2. (Цветной онлайн) Формы импульсов поля $|G(\zeta)|$, распространяющихся вдоль ($\varepsilon = 1$) и против оси z ($\varepsilon = -1$), показанны сплошной и пунктирной линиями, соответственно, для $\eta = 0.2$, $f = 0.21$. Единицы произвольны

$\chi = \chi_0$, $\eta_1 = 1, \dots$. Амплитуда импульса поля критическим образом зависит от знака ε , т.е. либо от направления распространения, либо от хиральности \mathcal{C} , см. рис. 2. Отношение амплитуд растет с одновременным ростом η_1 и f и уменьшается при увеличении $|f - \eta_1|$. Численный анализ показал, что вклад второй производной $\partial_s^2 p(s)$ в правой части (1), которой пренебрегли при выводе модели, может существенным образом влиять на эволюцию и форму импульсов поля. Однако, этим вкладом можно пренебречь при условии, что $\partial_z \ll 2\mathcal{T}_h$ или для $2\lambda_{\text{light}} \gg \mathcal{L}$, где λ_{light} – длина волны света, отвечающая энергии перехода атома, т.е. для достаточно большого числа колец спирали на длине волны.

В работе предложена нелинейная хиральная оптическая среда с нарушенной относительно обращения направления распространения импульсов симметрией, представляющая собой ОД. Критическую роль играет относительное положение каждого атома, так как эффект невзаимного распространения обусловлен локальной анизотропией индуцирован-

ной поляризации. Отметим отличие от моделей двухуровневой среды, в которых применялось квазистатическое приближение и вклад поляризации учитывался введением локального поля Лоренца. Последнее является результатом усреднения на размерах, много больших расстояния между атомами, см., например, [18, 19], т.е. локальные геометрические эффекты не учитываются. Другой существенной особенностью уравнений РУМБ (7), (10), (11) является применение при их выводе приближения ОР вместо приближения медленных огибающих. Это позволяет применять РУМБ для моделирования свойств микро- и наноразмерных ОД, действующих на масштабах порядка и меньше длины волны.

Показанное на рис. 2 солитонное решение РУМБ демонстрирует качественное изменение формы и параметров солитона при изменении знака ε или знака C . Физический механизм действия ОД основан на взаимодействии индуцированных диполей в среде с кручением $T_h \neq 0$. Отметим некоторую аналогию с эффектом невязимости в гиротропных магнитных средах [20]. Формально, знаки $\varepsilon \pm 1$ отвечают интегрируемым моделям с разными свойствами симметрии решений спектральной задачи (14), т.е. эволюция прямой и обратной волн описываются разными системами уравнений. Для некоторых начальных данных свойства симметрии приводят к появлению особенностей в решениях (15), (16) и форме импульса поля $|G|$. Это проявляется в различной динамике прямого и обратного распространения импульсов поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант #18-02-00379 и Министерства науки и высшего образования РФ, грант #АААА-А17-117060810014-9.

1. V. N. Konotop, J. Yang, and D. A. Zezyulin, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035002 (2016).
2. M. Scalora, J. P. Dowling, C. M. Bowden, and M. J. Bloemer, *J. Appl. Phys.* **76**(4), 2023 (1994).
3. M. D. Tocci, M. J. Bloemer, M. Scalora, J. P. Dowling, and C. M. Bowden, *Appl. Phys. Lett.* **66**(18), 2324 (1995).
4. K. Gallo, G. Assanto, K. R. Parameswaran, and M. M. Fejer, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 314 (2001).
5. M. W. Feise, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **71**(3), 037602 (2005).
6. F. Biancalana, *J. Appl. Phys.* **104**(9), 093113 (2008).
7. V. Grigoriev and F. Biancalana, *Opt. Lett.* **36**(11), 2131 (2011).
8. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Springer-Verlag (1984).
9. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (1999).
10. A. A. Zabolotskii, *Eur. Phys. J. Special Topics* **173**, 193 (2009).
11. S. Sternberg, *Curvature in mathematics and physics*, Dover Publications, Inc, Mineola, N.Y. (2012).
12. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **154**, 526 (2018).
13. J. K. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972).
14. J. M. Hyman, D. W. McLaughlin, and A. C. Scott, *Physica D, Nonlinear Phenomena* **3**, 23 (1981).
15. Yu. B. Gaididei, K. O. Rasmussen, and P. L. Christiansen, *Phys. Rev. E* **52**(3), 2951 (1995).
16. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical resonances and two-level atoms*, Wiley and Sons, N.Y. (1975).
17. H. Steudel and R. Meinel, *Physica D* **87**, 127 (1995).
18. M. C. Benedict, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, *Phys. Rev. A* **43**, 3845 (1991).
19. C. M. Bowden and J. P. Dowling, *Phys. Rev. A* **47**, 1247 (1993).
20. А. П. Пятаков, А. К. Звездин, *УФН* **182**, 593 (2012).