

Взаимное усиление брюнелевских гармоник

В. А. Костин^{+,*}, Н. В. Введенский^{+,*1)}

⁺Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

^{*}Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950 Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2019 г.

После переработки 19 августа 2019 г.

Принята к публикации 29 августа 2019 г.

Предложен и исследован механизм значительного увеличения выхода брюнелевских гармоник – низших нечетных гармоник, генерируемых в плазме в процессе туннельной ионизации атомов и молекул интенсивным лазерным импульсом. Этот механизм основан на взаимном усилении гармоник при параметрическом взаимодействии с полем на основной частоте вследствие вырожденного ионизационного многоволнового смешения, что, как показывают результаты аналитических и численных расчетов, приводит к возможности увеличения на несколько порядков интенсивностей генерируемых гармоник.

DOI: 10.1134/S0370274X19190044

Сильное нелинейное взаимодействие атомов и молекул с интенсивными лазерными полями вызывает генерацию гармоник, спектр которых содержит низкоэнергетическую часть (приблизительно до потенциала ионизации мишени) и высокоэнергетическую часть, содержащую плато (протяженность которого определяется пондеромоторной энергией свободного электрона в лазерном поле) и область резкого затухания интенсивности гармоник [1, 2]. Физический механизм генерации высоких гармоник может быть качественно объяснен на основе трехстадийной модели, включающей ионизацию, ускорение высвободившегося электрона полем и рекомбинацию электрона с испусканием фотона [3]. Хотя этот механизм может также приводить и к генерации низших гармоник (с энергией фотона меньше потенциала ионизации) [4, 5], генерация таких гармоник может быть не связана с рекомбинацией электрона с родительским ионом (как и с другими особенностями внутриатомной динамики) [6–8]. Такая ситуация соответствует условиям достаточно сильных полей, когда, во-первых, реализуется режим туннельной ионизации (приводящей к сравнительно высоким значениям степени ионизации плазмы) и, во-вторых, можно пренебречь влиянием рекомбинации и особенностей структуры атомных уровней на генерацию гармоник и учитывать только динамику свободных электронов в ионизирующем поле. В этом случае генерируемые гармоники могут быть идентифицированы как нечетные гармоники в плотности тока свободных электронов в нестационарной плазме, плотность ко-

торой вследствие резкой зависимости скорости туннельной ионизации от напряженности поля растет скачками на каждом полупериоде. Выход таких гармоник, также называемых брюнелевскими (по имени автора работы [6]), сильно падает как с увеличением номера гармоники, так и с уменьшением интенсивности ионизирующего поля, практически исчезая при переходе от туннельного к многофотонному режиму ионизации [8]. Для таких сравнительно низкоинтенсивных полей оказывается существенным другой механизм генерации низших гармоник, обусловленный нелинейным откликом электронов, находящихся в связанных состояниях нейтральных атомов и ионов [8, 9].

Генерация низших, в частности, брюнелевских, гармоник является одним из наиболее перспективных способов получения интенсивных ультракоротких импульсов когерентного излучения в длинноволновой части вакуумного ультрафиолетового спектрального диапазона (с длинами волн $\sim 100 \dots 200$ нм). Поскольку этим длинам волн соответствуют частоты переходов электронов в возбужденные состояния в атомах и молекулах, такие источники чрезвычайно востребованы для решения широкого круга фундаментальных и прикладных задач, связанных с диагностикой и спектроскопией различных материалов и сред [10, 11]. Так как эффективность генерации гармоник, как правило, достаточно мала (и, кроме того, обычно падает с увеличением номера гармоники), важной и актуальной проблемой для создания соответствующих источников излучения является поиск путей усиления выхода гармоник [12–15].

¹⁾e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru

В настоящей работе предлагается и исследуется новый физический механизм значительного увеличения выхода бронелевских гармоник, который основан на эффекте их взаимного усиления в процессе параметрического взаимодействия с полем накачки на основной частоте вследствие ионизационного многоволнового смешения. Как было показано в предыдущих работах, большое число смешивающихся волн обеспечивается резкой зависимостью вероятности ионизации от напряженности поля, что приводит к возможности эффективной генерации излучения на комбинационных частотах в различных спектральных диапазонах [16–18]. Рассматриваемая в данной работе ситуация представляет собой уникальный, не исследовавшийся ранее, пример вырожденного ионизационного смешения, когда частота генерируемой гармоники может быть множеством различных способов представлена как комбинационная частота поля накачки и других бронелевских гармоник. Этим способам, или фотонным каналам волнового смешения, соответствуют свои вклады в скорость роста поля бронелевских гармоник, различным образом зависящие от амплитуд и фаз других гармоник.

В первой части данной работы рассмотрим двухцветный ионизирующий импульс, состоящий из поля на основной частоте ω_1 и поля его нечетной гармоники с номером $2p + 1$, и найдем плотность тока, возбуждаемого этим импульсом в плазме на частоте другой нечетной гармоники с номером $2q + 1$, $p \neq q$, где $p, q = 1, 2, \dots$. При этом в качестве гармоники $2p + 1$ может выступать как поле бронелевской гармоники, сгенерированной в плазме в результате реализации ионизационного механизма, так и поле (в том числе и достаточно интенсивное) низшей нечетной гармоники, полученной другими методами [19]. Запишем зависимость напряженности электрического поля \mathbf{E} от времени t в виде

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \left[A_1(t)e^{-i\omega_1 t} + A_{2p+1}(t)e^{-i(2p+1)\omega_1 t} \right] \mathbf{x}_0,$$

где $A_l(t) = \mathcal{E}_l(t)e^{-i\varphi_l(t)}$ – медленная комплексная амплитуда одноцветной компоненты поля на частоте $l\omega_1$ с действительной амплитудой $\mathcal{E}_l(t) > 0$ и абсолютной фазой $\varphi_l(t)$, \mathbf{x}_0 – единичный вектор. Рассматриваются только низшие гармоники с частотами, меньшими атомной. Кроме этого, предполагается, что максимальное значение пондеромоторного потенциала $q_e^2 \mathcal{E}_1^2 / 4m_e \omega_1^2$ велико по сравнению с потенциалом ионизации нейтральных частиц газа, здесь q_e и m_e – заряд и масса электрона, соответственно. Указанные условия позволяют считать ионизацию тун-

нельной, а вероятность ионизации в единицу времени $w(|\mathbf{E}(t)|)$ – функцией мгновенного значения модуля напряженности поля. При этом плотность тока свободных электронов $\mathbf{j}(t)$ и плотность плазмы $N(t)$ находятся из уравнений [6, 8, 9, 16–18]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (N_m - N) w(|\mathbf{E}(t)|), \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{q_e^2}{m_e} N \mathbf{E} \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями при $t \rightarrow -\infty$, где N_m – плотность нейтральных частиц до начала ионизации.

Если длительность ионизации τ_i (характерное время создания плазмы [16–18]) велико по сравнению с π/ω_1 , то вероятность ионизации является приближенно периодической функцией t с периодом π/ω_1 , и, вводя $W(t) = w(|\mathbf{E}(t)|)$, удобно записать

$$W(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{2k}(t) e^{-2ik\omega_1 t}, \quad (2)$$

где $W_{2k}(t) = W_{-2k}^*(t)$ – плавные комплекснозначные функции. Здесь $W_0 \equiv \bar{W}$ – усредненная по π/ω_1 вероятность ионизации, которая определяет усредненную плотность плазмы $\bar{N}(t) = N_m \left[1 - e^{-\int_{-\infty}^t \bar{W}(t') dt'} \right]$ в соответствии с уравнением $\partial \bar{N} / \partial t = (N_m - \bar{N}) \bar{W}$. Подставляя разложение (2) в первое из уравнений (1), заменяя в правой части уравнения N на \bar{N} , интегрируя получившееся выражение и вынося медленные (в масштабах периода второй гармоники π/ω_1) огибающие W_{2k} за знак интеграла, получаем

$$N(t) = \bar{N}(t) + \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(t) e^{-2ik\omega_1 t}, \quad (3)$$

где медленные комплексные амплитуды четных гармоник в плотности плазмы $N_{2k}(t)$, $k \geq 1$, даются выражениями

$$N_{2k} \approx \frac{i(N_m - \bar{N}) W_{2k}}{k\omega_1} = \frac{i}{k\omega_1} \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} \frac{W_{2k}}{\bar{W}}.$$

Подставляя разложение (3) во второе из уравнений (1), получаем, что

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \text{Re} \sum_{q=0}^{\infty} \mathbf{F}_{2q+1}(t) e^{-i(2q+1)\omega_1 t},$$

где $\mathbf{F}_{2q+1} = F_{2q+1} \mathbf{x}_0$ – искомые медленные комплексные амплитуды нечетных гармоник в $\partial \mathbf{j} / \partial t$. Для $q \neq 0, p$ имеем

$$F_{2q+1} \approx \frac{i q_e^2}{2m_e \omega_1 \bar{W}} \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} \left(\frac{W_{2q} A_1}{q} + \frac{W_{2q+2} A_1^*}{q+1} + \frac{W_{2q-2p} A_{2p+1}}{q-p} + \frac{W_{2q+2p+2} A_{2p+1}^*}{q+p+1} \right). \quad (4)$$

Чтобы найти $W_{2k}(t)$, воспользуемся следующим приемом. Обозначим фазы одноцветных компонент поля как $\zeta = \omega_1 t + \varphi_1$ и $\eta = (2p+1)\omega_1 t + \varphi_{2p+1}$. Тогда при любом t вероятность ионизации можно рассматривать как значение периодической функции от ζ и η , $W(t) = w(|\mathcal{E}_1(t) \cos \zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t) \cos \eta|)$. Раскладывая ее в двойной ряд Фурье, получим

$$W(t) = \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} W_{\alpha, \beta}(t) e^{-i\alpha\zeta - i\beta\eta}, \quad (5)$$

где коэффициенты Фурье $W_{\alpha, \beta}$ даются интегралом

$$W_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w(|\mathcal{E}_1(t) \cos \zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t) \cos \eta|) \times e^{i\alpha\zeta + i\beta\eta} d\zeta d\eta \quad (6)$$

для четных $\alpha + \beta$ и $W_{\alpha, \beta} \equiv 0$ для нечетных. Сравнивая разложения (2) и (5), получаем

$$W_{2k}(t) = e^{-2ik\varphi_1} \sum_{\beta = -\infty}^{\infty} W_{2k - (2p+1)\beta, \beta}(t) e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \quad (7)$$

где $\psi_{2p+1} = \varphi_{2p+1} - (2p+1)\varphi_1$ – фазовый сдвиг между гармоникой $2p+1$ и полем на основной частоте.

Поскольку $w(E)$ – быстрорастущая функция E , то основной вклад в интеграл (6) дают области, где аргумент w близок к своему максимальному значению: $|\mathcal{E}_1(t) \cos \zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t) \cos \eta| \approx \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_{2p+1}(t)$. Таким образом, в этом интеграле можно использовать приближение $w(E) \approx w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) e^{-n} e^{nE/(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})}$, в котором приближающая функция сохраняет значение и первую производную при $E = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}$ и быстро спадает с уменьшением E , где $n = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) w'(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) / w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) \gg 1$ определяет порядок ионизационного волнового смешения [16–18]. В результате получим

$$W_{\alpha, \beta}(t) \approx \frac{e^{-n} w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})}{2\pi^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\left| \frac{n\mathcal{E}_1 \cos \zeta}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}} + \frac{n\mathcal{E}_{2p+1} \cos \eta}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}} \right|} e^{i\alpha\zeta + i\beta\eta} d\zeta d\eta.$$

Пусть $\mathcal{E}_1 \geq \mathcal{E}_{2p+1}$, тогда область, где величина под модулем отрицательна, дает малый вклад в интеграл (так как значение модуля в экспоненте оказывается малым по сравнению с максимальным значением, равным 1) и знак модуля можно опустить. При этом интервал интегрирования по ζ можно расширить до $(-\pi, \pi)$, так как подынтегральное выражение оказывается пренебрежимо мало в добавленной

области интегрирования. Тем самым сведем $W_{\alpha, \beta}$ к произведению двух табличных интегралов для модифицированных функций Бесселя $I_k(z)$ и получим

$$W_{\alpha, \beta}(t) \approx 2w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) \times e^{-n} I_{\alpha} \left(\frac{n\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}} \right) I_{\beta} \left(\frac{n\mathcal{E}_{2p+1}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}} \right). \quad (8)$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что выражение (8) справедливо и при $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{2p+1}$. Подставим теперь (8) в (7), а (7) в (4) и получим

$$F_{2q+1} \approx \frac{i(2q+1)e^{-i(2q+1)\varphi_1} j_{\text{osc}} w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})}{q(q+1)n} \times e^{-n - \int_{-\infty}^t \bar{W}(t') dt'} \sum_{\beta = -\infty}^{\infty} f_{2q+1, \beta} e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \quad (9)$$

где $\delta = n\mathcal{E}_{2p+1}/(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})$, $j_{\text{osc}} = Nm_e q_e^2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) / m_e \omega_1$ и

$$\bar{W} = 2w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) e^{-n} \times \sum_{\beta = -\infty}^{\infty} I_{(2p+1)\beta}(n - \delta) I_{\beta}(\delta) e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \quad (10)$$

$$f_{2q+1, \beta} = (n - \delta) I'_{2q+1 - (2p+1)\beta}(n - \delta) I_{\beta}(\delta) + \frac{\delta q(q+1)}{(q-p)(q+p+1)} I_{2q+1 - (2p+1)\beta}(n - \delta) I'_{\beta}(\delta) + \left(1 + \frac{\beta p(p+1)(2p+1)}{(q-p)(q+p+1)(2q+1)} \right) \times I_{2q+1 - (2p+1)\beta}(n - \delta) I_{\beta}(\delta). \quad (11)$$

В получившемся выражении (9) происходит суммирование по различным фотонным каналам многоволнового ионизационного смешения, т.е. по различным способам представления частоты $(2q+1)\omega_1$ как комбинации частот ω_1 и $(2p+1)\omega_1$, а величины $f_{2q+1, \beta}$ можно рассматривать как парциальные амплитуды (или “силы”) различных каналов. Величина $|\beta|$ при этом играет роль минимального числа задействованных квантов гармоник $2p+1$. Множественность таких представлений отражает вырожденный характер волнового смешения в рассматриваемом случае (когда основное поле смешивается со своей нечетной гармоникой), что отличает его от работ [16–18], где рассматриваются невырожденные случаи и смешение обеспечивается лишь одним фотонным каналом. Именно это вырождение обуславливает описанные далее более сложные зависимости амплитуды генерируемой бронеелевской гармоникой от параметров ионизирующего импульса (в частности, от фазового сдвига ψ_{2p+1}) и лежит в основе эффекта взаимного усиления гармоник. Обратим внимание на то, что

выражение (10) для усредненной вероятности ионизации усложняется по сравнению с невырожденным случаем и также представляет собой суммирование по различным “фотонным каналам ионизации”, т.е. по различным способам представления нулевой частоты как комбинации ω_1 и $(2p+1)\omega_1$. Важно отметить, что в сумме (10) необходимо учитывать слагаемые с $\beta \neq 0$ уже при достаточно слабых добавочных гармониках. Это, в частности, проявляется в том, что наличие слабых добавочных гармоник может привести к значительному изменению (зависящему от ψ_{2p+1}) усредненной вероятности ионизации. Этот эффект также присущ именно вырожденному случаю и отсутствует в невырожденном, например, при добавлении к полю на основной частоте его четных гармоник.

Как известно, при фиксированном аргументе модифицированные функции Бесселя быстро спадают с ростом порядка; для больших аргументов характерный масштаб спада определяется корнем из аргумента. Поэтому для не слишком больших $n \sim 10 \dots 100$ лишь несколько слагаемых в суммах (9) и (10) оказываются существенными, а формула (11) предоставляет инструмент для оценки того, какие фотонные каналы ионизационного смешения нужно учитывать. При $n\mathcal{E}_{2p+1} \ll 2\mathcal{E}_1$ для соседних нечетных гармоник, когда $q = p \pm 1$, важны лишь каналы с $\beta = 0$ и $\beta = 1$. Канал с $\beta = 0$ – единственный канал, который присутствует и в одноцветном случае, при $\mathcal{E}_{2p+1} = 0$. Для его реализации необходимо $2q+1$ квантов основного поля и ноль квантов гармоники $2p+1$. Для канала с $\beta = 1$ – всего два кванта основного поля и один квант более слабого поля гармоники $2p+1$. При достаточно больших $2q+1$ канал с $\beta = 0$ может оказаться менее существенным даже для очень слабой гармоники $2p+1$, в чем можно убедиться, сопоставив значения соответствующих коэффициентов:

$$f_{2q+1,0} \approx nI'_{2q+1}(n) + I_{2q+1}(n), \quad (12)$$

$$f_{2q+1,1} \approx \left(nI'_2(n) \pm 2\frac{q^2+q+1}{2q+1}I_2(n) \right) \frac{\delta}{2}. \quad (13)$$

Конкуренция между двумя каналами обуславливает зависимость выхода гармоники $2q+1$ от ψ_{2p+1} и амплитуды \mathcal{E}_{2p+1} , $|F_{2q+1}|^2 \propto |f_{2q+1,0} + f_{2q+1,1}e^{-i\psi_{2p+1}}|^2$. При $\mathcal{E}_{2p+1} = E_c$, где

$$E_c \approx \frac{2\mathcal{E}_1}{n} \frac{nI'_{2q+1}(n) + I_{2q+1}(n)}{nI'_2(n) \pm 2\frac{q^2+q+1}{2q+1}I_2(n)}, \quad (14)$$

вклады от обоих каналов сравниваются по модулю. При $\psi_{2p+1} = 0$ происходит удвоение амплитуды гар-

моники $2q+1$ по сравнению с одноцветным случаем, а при $\psi_{2p+1} = \pi$ каналы полностью компенсируют друг друга и генерация гармоники $2q+1$ оказывается подавленной (полагается, что $nE_c/2\mathcal{E}_1 \ll 1$). Чем больше q , тем меньше E_c и при тем более слабых гармониках $2p+1$ канал с $\beta = 1$ начинает доминировать и определять процесс генерации гармоники $2q+1$. Как ясно из представленного вывода, полученные аналитические формулы могут быть использованы и в одноцветном случае. В частности, формула (12) удобна для анализа формы спектра гармоник, например, из нее непосредственно следует, что масштаб спада амплитуд гармоник с увеличением номера определяется \sqrt{n} .

Полученные аналитические результаты подтверждаются численным решением уравнений (1), из которого находился нормированный выход гармоник

$$Y_{2q+1} = \frac{1}{(q_e N_m v_a)^2 \omega_a} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{j}_{2q+1}}{\partial t} \right)^2 dt, \quad (15)$$

где $v_a \approx 2.19 \times 10^8$ см/с и $\omega_a \approx 4.13 \times 10^{16}$ с⁻¹ – атомные единицы скорости и частоты, а \mathbf{j}_{2q+1} получается из \mathbf{j} с помощью идеального полосового фильтра с полосой пропускания от $2q\omega_1$ до $2(q+1)\omega_1$. Использовалась эмпирическая формула для вероятности туннельной ионизации атома водорода [20]

$$w(E) = 4\omega_a \frac{E_a}{E} e^{-\frac{2}{3}\frac{E_a}{E} - 12\frac{E}{E_a}}, \quad (16)$$

где $E_a \approx 5.14 \times 10^9$ В/см – атомная единица поля. Выбирались гауссовы огибающие компонент поля, $\mathcal{E}_l = \sqrt{8\pi S_l/c} e^{-t^2/2\tau^2}$, где S_l – максимальные интенсивности компонент, c – скорость света в вакууме и $\tau = \tau_p/\sqrt{4\ln 2}$, где τ_p – полная длительность по уровню 1/2 от максимальной интенсивности.

На рисунке 1 показаны зависимости максимального и минимального по ψ_{2p+1} выхода гармоники Y_{2q+1} от S_{2p+1} . Как видно, лучше усиливаются гармоники с $q > p$ (рис. 1а–с), при этом усиление может происходить на несколько порядков. Из рисунков 1а, б можно видеть, например, что к увеличению более, чем на порядок выхода 5-й и 7-й гармоник может привести добавление 3-й гармоники с интенсивностью порядка 1% от накачки, а из рис. 1с, – что при добавлении 5-й гармоники усиление 7-й на порядок происходит уже при интенсивностях на 4...5 порядков меньших интенсивности основного поля. Из рисунка 1с также видно, что уже при относительно слабых добавочных гармониках минимальный по ψ_{2p+1} выход Y_{2q+1} превышает уровень, соответствующий отсутствию добавочной гармоники, и усиление имеет место при любых ψ_{2p+1} . Это означает, что

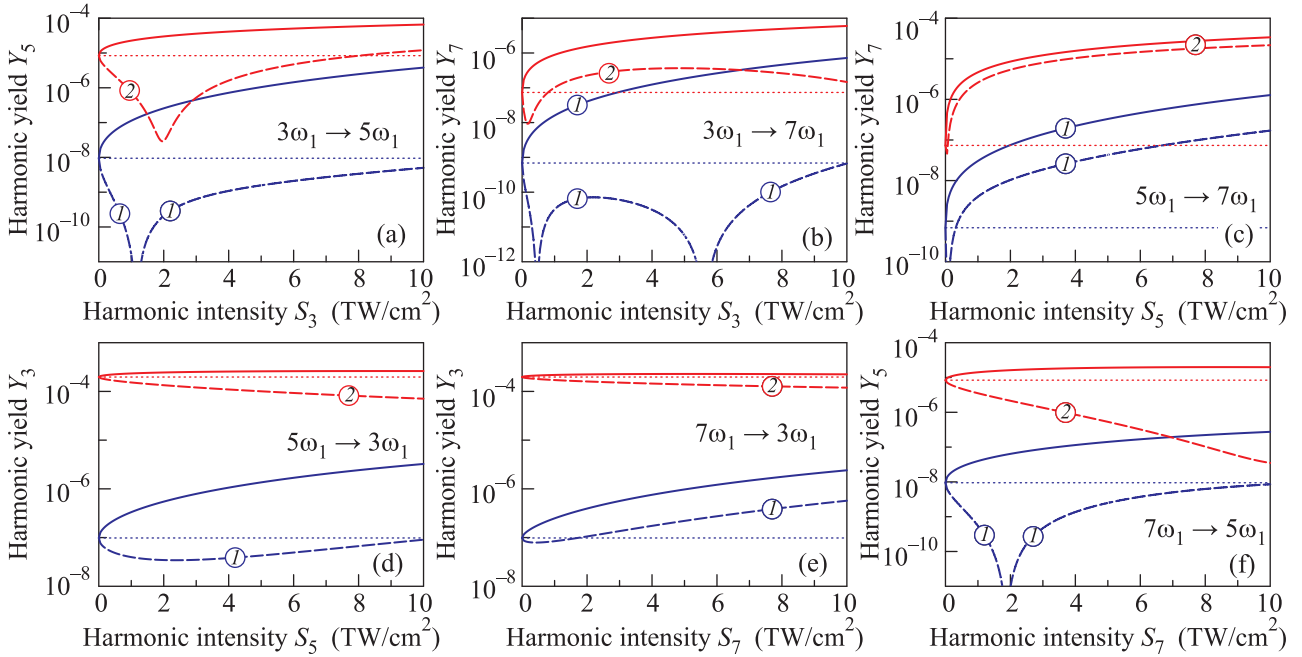


Рис. 1. (Цветной онлайн) Найденные из численного решения уравнений (1), (16) зависимости максимального (сплошные кривые) и минимального (штриховые кривые) по фазовому сдвигу нормированного выхода Y_{2q+1} , даваемого формулой (15), гармоники с номером $2q + 1$ от интенсивности S_{2p+1} гармоники с номером $2p + 1$. Точечные горизонтальные прямые отмечают значения Y_{2q+1} при $S_{2p+1} = 0$. Параметры ионизирующего импульса: длительность $-\tau_p = 50$ фс, интенсивность основного поля $-S_1 = 10^{14}$ Вт/см² (кривые 1) и 3×10^{14} Вт/см² (кривые 2), его абсолютная фаза $-\varphi_1 = 0$, (a) $p = 1, q = 2$, (b) $p = 1, q = 3$, (c) $p = 2, q = 3$, (d) $p = 2, q = 1$, (e) $p = 3, q = 1$, (f) $p = 3, q = 2$

в этом случае становятся не столь существенными требования на обеспечение определенного фазового сдвига и его стабильности, в частности, на фазовый синхронизм между полем на основной частоте и добавочной гармоникой при их совместном распространении на длинные дистанции.

На рисунке 2 изображены зависимости от S_1 максимальных по ψ_{2p+1} коэффициентов усиления $H_{2q+1} = Y_{2q+1}(S_{2p+1} = \varepsilon S_1) / Y_{2q+1}(S_{2p+1} = 0)$ гармоники $2q + 1$ при добавлении гармоники $2p + 1$ с максимальной интенсивностью на уровне $\varepsilon = 10^{-2}$ и 10^{-3} от S_1 . Показаны результаты, полученные как с помощью прямого численного интегрирования уравнений (1) и (16), так и на основе полуаналитических оценок $Y_{2q+1} \approx (2\omega_a)^{-1} (q_e N_m v_a)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{2q+1}|^2 dt$, где F_{2q+1} определяется формулами (9)–(11). При этом в сумме (9) по фотонным каналам β оставлялись лишь два (для соседних гармоник $|q - p| = 1$) или три (для $|q - p| = 2$) канала, а в сумме (10) – лишь каналы с $|\beta| \leq 1$. Как видно, даже в условиях, когда $\delta \gtrsim 1$ и формулы (12) и (13), строго говоря, неприменимы, усиление соседних гармоник (рис. 2а, с, d, f) хорошо интерпретируется влиянием всего двух фотонных каналов. При этом поведение кривых качественно описывается формулами (12) и (13) при $H_{2q+1} \approx$

$\approx (1 + f_{2q+1,1} / f_{2q+1,0})^2$. В частности, с помощью этих формул можно сопоставить между собой уровни платообразных участков кривых при больших интенсивностях. Эти плато соответствуют условиям, когда существенны эффекты истощения нейтральных частиц и финальная степень ионизации близка к единице (при интенсивностях выше 4×10^{14} Вт/см²), при этом значение n почти не зависит от интенсивности и оказывается примерно равным 5. Следует также отметить, что приведенные на рис. 2 графики демонстрируют, что наличие добавочной гармоники $2p + 1$ может сильно увеличить выход гармоники $2q + 1$ в условиях, когда существенно истощение нейтральных частиц и простое увеличение интенсивности основного поля практически не меняет выхода гармоник и лишь приводит к уменьшению эффективности обратно пропорционально интенсивности S_1 (см. вставку на рис. 2е, где показаны выходы брουνелевских гармоник в зависимости от интенсивности основного поля при отсутствии добавочных гармоник).

Во второй части работы рассмотрим вопрос о том, генерируются ли гармоники в таких фазах, чтобы взаимно усиливать друг друга. Для ответа на этот вопрос рассмотрим взаимодействие между полем на основной частоте и соседними нечетными гармониками

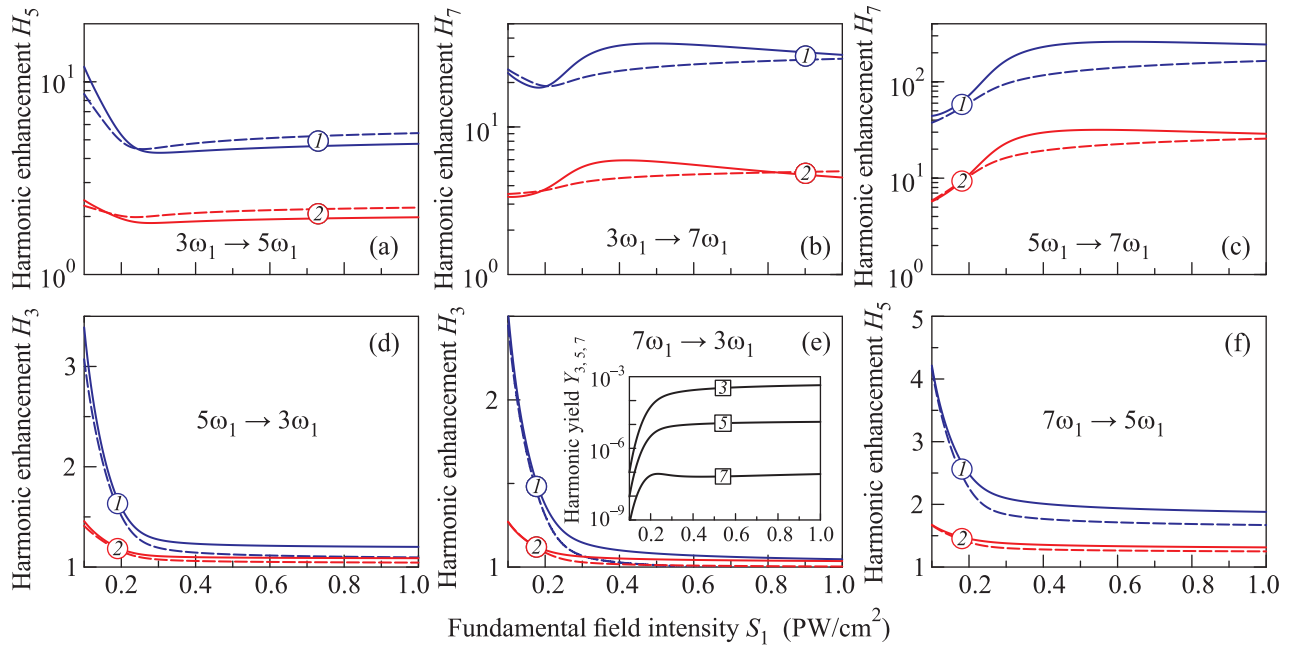


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимости максимального по фазовому сдвигу коэффициента усиления $H_{2q+1} = Y_{2q+1}(S_{2p+1} = \varepsilon S_1)/Y_{2q+1}(S_{2p+1} = 0)$ выхода гармоника $2q+1$ при добавлении гармоника $2p+1$ с максимальной интенсивностью на уровне $\varepsilon = 0.01$ (кривые 1) и 0.001 (кривые 2) от максимальной интенсивности S_1 поля на основной частоте. Сплошные кривые соответствуют нормированным выходам Y_{2q+1} , найденным с помощью формулы (15) из численного решения уравнений (1), (16); штриховые – оценкам нормированных выходов $Y_{2q+1} = (2\omega_a)^{-1}(q_e N_m v_a)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{2q+1}|^2 dt$, полученным с помощью аналитических формул (9)–(11), при этом в ряде (9) оставлялись только два слагаемых с $\beta = 0, 1$ для панелей (a), (c), (d), (f) и три слагаемых с $\beta = 0, 1, 2$ для панелей (b) и (e), а в ряде (10) – только слагаемые с $\beta = -1, 0, 1$. На вставке панели (e) изображены зависимости выхода гармоник Y_{2q+1} от S_1 при отсутствии добавочной гармоника для $q = 1, 2, 3$; отметки в квадратах на кривых показывают номер гармоника $2q+1$. Параметры ионизирующего импульса: длительность $\tau_p = 50$ фс, его абсолютная фаза $\varphi_1 = 0$, (a) $p = 1, q = 2$, (b) $p = 1, q = 3$, (c) $p = 2, q = 3$, (d) $p = 2, q = 1$, (e) $p = 3, q = 1$, (f) $p = 3, q = 2$

ками $2s \pm 1$, где $s = 2, 3, \dots$. Для описания эффектов распространения гармоник в пространстве в пренебрежении дисперсией запишем полное (трехцветное) поле в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{x}_0 \operatorname{Re} [A_1(\xi, z)e^{-i\omega_1 \xi} + A_{2s-1}(\xi, z)e^{-i(2s-1)\omega_1 \xi} + A_{2s+1}(\xi, z)e^{-i(2s+1)\omega_1 \xi}],$$

где $\xi = t - z/c$, z – координата вдоль направления распространения волн. Будем считать, что амплитуда сильного поля на основной частоте меняется слабо при распространении и $\partial A_1/\partial z = 0$. Для полей гармоник можно записать укороченные уравнения [21]

$$\frac{\partial A_{2s\pm 1}}{\partial z} = -\frac{2\pi i}{(2s \pm 1)\omega_1 c} F_{2s\pm 1}.$$

Для нахождения $F_{2s\pm 1}$ используется уравнение (9) с $q = s, p = s - 1$ для верхнего знака и $q = s - 1, p = s$ для нижнего при $\delta \ll 1$. В сумме остаются два сла-

гаемых с $\beta = 0$ и 1 , которые даются формулами (12) и (13). В результате получим линейную систему

$$\frac{\partial A_{2s\pm 1}}{\partial z} = R_{\pm} e^{-i(2s\pm 1)\varphi_1} + Q_{\pm} e^{\mp 2i\varphi_1} A_{2s\mp 1}, \quad (17)$$

где R_{\pm} и Q_{\pm} – положительные константы. Когда $\partial \bar{N}/\partial t$ максимально, можно записать $(4\pi q_e^2/m_e)\partial \bar{N}/\partial t \approx \omega_p^2/\tau_i$ и

$$R_{\pm} \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_1^2 c \tau_i s(s \pm 1)} \frac{I'_{2s\pm 1}(n) + I_{2s\pm 1}(n)/n}{I_0(n)} |A_1|,$$

$$Q_{\pm} \approx \frac{\omega_p^2}{8\omega_1^2 c \tau_i s(s \pm 1)} \left(n + 2 \frac{\pm s^2 + s \pm 1}{2s \pm 1} \right),$$

где $\omega_p = [4\pi N(\xi \rightarrow +\infty)q_e^2/m_e]^{1/2}$ – плазменная частота после прохождения ионизирующего импульса, τ_i – длительность ионизации. Решая уравнения (17) с начальными условиями $A_{2s\pm 1}(z = 0) = 0$, находим, что гармоники генерируются в фазах, обеспечивающих их взаимное параметрическое усиление:

$$e^{i(2s\pm 1)\varphi_1} A_{2s\pm 1} = E_{c\pm} (\cosh \gamma z - 1) + E_{o\pm} \sinh \gamma z,$$

где

$$\gamma = \sqrt{Q_+ Q_-} = \frac{\omega_p^2}{8s\omega_1^2 c \tau_i} \sqrt{\frac{4s^2(n+1)^2 - [n+2(s^2+1)]^2}{(4s^2-1)(s^2-1)}} \quad (18)$$

– пространственный инкремент роста амплитуд гармоник, $E_{c\pm} = R_{\mp}/Q_{\mp}$ – характерные поля (14), при которых сравниваются вклады от двух каналов многоволнового смешения, $E_{o\pm} = R_{\pm}/\gamma$ – характерное поле гармоник $2s \pm 1$, которое генерировалось бы в плазме длины $L = 1/\gamma$ без взаимного усиления гармоник. Для длины волны основного поля 800 нм, длительности ионизации $\tau_i \approx 5$ фс, $n \approx 5$ и плотности плазмы, отвечающей полной ионизации газа атмосферного давления, получаем характерные длины усиления $L \approx 0.5$ мм для 3-й и 5-й гармоник ($s = 2$) и $L \approx 1.5$ мм – для 5-й и 7-й ($s = 3$).

В заключение, как показали результаты аналитических и численных исследований, взаимное усиление низших нечетных (брюнелевских) гармоник в процессе их параметрического взаимодействия с производящим туннельную ионизацию полем накачки может на несколько порядков увеличить их интенсивность и обеспечить также сильную перекачку энергии вверх по спектру, компенсируя спадание амплитуд гармоник с ростом их номеров. При этом вследствие резкой зависимости скорости ионизации от напряженности поля и, соответственно, большого числа смешивающихся волн, данный эффект согласно формуле (18) в случае подавления вызванной дисперсией фазовой рассинхронизации (например, с использованием методов, применяемых при генерации высоких гармоник [2, 21]), может быть достигнут на весьма умеренных (~ 1 мм) трассах взаимодействия.

Работа в части выполнения численных расчетов поддержана Российским научным фондом (грант # 18-72-00103). Аналитические исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 18-02-01150 и 19-52-12053) и фондом “Базис” (грант # 19-1-2-52-1).

1. A. L’Huillier, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **24**, 3315 (1991).
2. В. В. Стрелков, В. Т. Платоненко, А. Ф. Стержантов, М. Ю. Рябикин, *УФН* **186**, 449 (2016).
3. P. V. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1994 (1993).
4. J. A. Hostetter, J. L. Tate, K. J. Schafer, and M. B. Gaarde, *Phys. Rev. A* **82**, 023401 (2010).
5. W.-H. Xiong, J.-W. Geng, J.-Y. Tang, L.-Y. Peng, and Q. Gong, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 233001 (2014).
6. F. Brunel, *J. Opt. Soc. Am. B* **7**, 521 (1990).
7. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. В. Черотов, *ЖЭТФ* **124**, 612 (2003).
8. E. E. Serebryannikov and A. M. Zheltikov, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 043901 (2014).
9. U. Sapaev, A. Husakou, and J. Herrmann, *Opt. Express* **21**, 25582 (2013).
10. M. Chini, X. Wang, Y. Cheng, Y. Wu, D. Zhao, D. A. Telnov, S.-I. Chu, and Z. Chang, *Sci. Rep.* **3**, 1105 (2013).
11. H. Tao, T. K. Allison, T. W. Wright, A. M. Stooke, C. Khurmi, J. van Tilborg, Y. Liu, R. W. Falcone, A. Belkacem, and T. J. Martinez, *J. Chem. Phys.* **134**, 244306 (2011).
12. K. Schiessl, E. Persson, A. Scrinzi, and J. Burgdörfer, *Phys. Rev. A* **74**, 053412 (2006).
13. S. V. Popruzhenko, D. F. Zaretsky, and W. Becker, *Phys. Rev. A* **81**, 063417 (2010).
14. G. Lambert, A. Andreev, J. Gautier, L. Giannessi, V. Malka, A. Petralia, S. Sebban, S. Stremoukhov, F. Tissandier, B. Vodungbo, and P. Zeitoun, *Sci. Rep.* **5**, 7786 (2015).
15. Q.-L. Guo, P.-C. Li, X.-X. Zhou, and S.-I. Chu, *Opt. Commun.* **410**, 262 (2018).
16. V. A. Kostin, I. D. Laryushin, A. A. Silaev, and N. V. Vvedenskii, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 035003 (2016).
17. А. А. Силаев, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 160 (2018).
18. V. A. Kostin and N. V. Vvedenskii, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 065002 (2018).
19. D. Rompotis, T. Gebert, M. Wieland, F. Karimi, and M. Drescher, *Opt. Lett.* **40**, 1675 (2015).
20. X. M. Tong and C. D. Lin, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, 2593 (2005).
21. V. V. Strelkov, *Phys. Rev. A* **93**, 053812 (2016).