Письма в ЖЭТФ, том 110, вып. 7, с. 505 – 511

О распаде "изолированного" осциллятора, нелинейно связанного с затухающим осциллятором

А. И. Трубилко[1], А. М. Башаров

Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 196105 С.-Петербург, Россия

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Кафедра математики и математических методов физики Московский физико-технического института 141701 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 19 августа 2019 г.
После переработки 19 августа 2019 г.
Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Представлены механизмы накачки и распада "изолированного" осциллятора, который может нелинейным образом взаимодействовать с соседним осциллятором другой частоты. Показано, что если указанный соседний осциллятор связан с широкополосным термостатным полем, то изолированный осциллятор начинает взаимодействовать с этим термостатным полем. В результате возникает новый канал релаксации, обусловленный квантовой интерференцией взаимодействующих систем, которую затруднительно или невозможно обосновать в рамках традиционных подходов.

DOI: 10.1134/S0370274X19190123

1. Введение. Задача о взаимодействии двух осцилляторов, отвечающих системам различной природы, является одной из фундаментальных в широком классе явлений классической и современной физики. Именно поэтому она привлекательна и для описания явлений и процессов в относительно новых областях квантовой термодинамики и квантовой информатики, в которых на основе квантовой структуры взаимодействующих систем, из первых принципов, выводят основные уравнения. Вопрос о затухании изолированного от термостата осциллятора, но нелинейно связанного с затухающим осциллятором, является актуальным как при изучении оптических явлений, так и в задачах квантовой информации, поскольку запись информации в систему, так или иначе, связана с взаимодействием с макроскопическим прибором [1–3]. В свою очередь, взаимодействие с макроскопическим прибором во многих случаях удобно рассматривать в совокупности с взаимодействием с широкополосным полем, и задача, таким образом, является задачей теории открытых квантовых систем. Классическое решение задачи о взаимодействии осцилляторов, один из которых является затухающим, известно из работы [4] (см. обзор [5]). В квантовом случае затухающий осциллятор удобно представлять как осциллятор, взаимодействующий с широкополосным термостатным полем. Тогда возникает задача о затухании изолированного от термостата осциллятора, связанного с осциллятором, взаимодействующим с термостатом. О такой паре осцилляторов будем говорить как о выделенной паре.

Системы, представляющие собой два нелинейным образом взаимодействующих осциллятора, могут быть реализованы посредством различных физических объектов. Так например, в [6] рассмотрено взаимодействие двух световых резонаторных оптических мод, связанных процессом параметрического взаимодействия в нелинейном кристалле. В работах [7] параметрическое взаимодействие электромагнитных волн осуществляется с помощью фемтосекундного лазерного импульса, порождающего электрон-дырочную плазму в композитной структуре. В [8] в роли такой системы выступает кубит в полупроводниковом метаматериале, взаимодействующий с внутрирезонаторным полем. В [9] такое взаимодействие осуществлено световым давлением оптической моды высокодобротного резонатора, возбуждаемой внешним лазерным полем, на механический осциллятор. В качестве последнего выступает специальная механическая мембрана.

Случай, когда осцилляторы выделенной пары резонансно связаны между собой, решается как в глобальном подходе, поскольку имеем квадратичный по бозевским операторам гамильтониан [10–12], так и локальном подходе, поскольку в условиях марковского взаимодействия с термостатом здесь эффекти-

[1]e-mail: trubilko.andrey@gmail.com

вен метод алгебраической теории возмущений [13], позволяющий, в отличие от глобального подхода, получить простой и наглядный аналитический результат.

Случай, когда осцилляторы выделенной пары нелинейно взаимодействуют друг с другом, не решается аналитически в глобальном подходе. Что касается локального подхода, то такие работы авторам неизвестны. Для применения алгебраической теории возмущений в локальном подходе возникает следующее препятствие, возможно объясняющее отсутствие таких работ.

Метод алгебраической теории возмущений применяется к исходным операторам взаимодействия как между осцилляторами выделенной пары, так и между затухающим осциллятором и термостатом. Они составляют исходный гамильтониан в представлении взаимодействия $V_{\rm ini}(t)$, в котором представлены все слагаемые – как медленно меняющиеся во времени слагаемые $V'_{\rm ini}(t)$, так и быстро меняющиеся во времени (антивращающие) слагаемые $V''_{\rm ini}(t)$, $V_{\rm ini}(t) = V'_{\rm ini}(t) + V''_{\rm ini}(t)$ (один и два штриха отмечают слагаемые, медленно и быстро меняющие во времени). Быстро меняющиеся по времени слагаемые исключаются из дальнейшего рассмотрения преобразованием, генератор которого S состоит только из быстро меняющихся во времени слагаемых, которые определяются исключенными быстро меняющимися слагаемыми исходного гамильтониана. Между тем, при рассмотрении нелинейного взаимодействия между осцилляторами выделенной пары, обычно сразу используют эффективный гамильтониан $V_{NL} = V'(t)$, который не содержит антивращающих слагаемых $V''(t)$. Это оправдано во многих задачах (см., например, [14, 15]), однако в задачах теории открытых систем при использовании в качестве исходного гамильтониана только слагаемых с медленно меняющимися во времени слагаемыми $V'(t)$ не возникает интерференционного взаимодействия $V_{\rm New}(t)$ между изолированным осциллятором и термостатом. Это связано пропорциональностью слагаемых эффективного оператора взаимодействия $V_{\rm New}(t)$ интерференционного канала релаксации выражениям вида $V_{\rm New}(t) \sim \sim [S''_{\rm Thermo}(t), V''(t)]'$, которые определяются интерференцией только быстропеременных слагаемых, где $S_{\rm Thermo}$ – генератор преобразования, исключающий быстропеременные во времени слагаемые из оператора взаимодействия одного из осцилляторов с термостатом. Поэтому исследователи полагают, что “изолированный” осциллятор не может напрямую взаимодействовать с термостатом, с которым взаимодействует другой осциллятор выделенной пары, определяющий $S_{\rm Thermo}$.

В данном сообщении установлено, что изолированный от термостата осциллятор выделенной пары, нелинейно взаимодействующий с другим осциллятором, будет также эффективно напрямую взаимодействовать с его термостатом. Показано, как будет выглядеть эффективный гамильтониан задачи, если использовать в качестве исходного гамильтониан с антивращающими слагаемыми. При помощи алгебраической теории возмущений получен эффективный гамильтониан задачи и в случае нелинейного взаимодействия осцилляторов выделенной пары. Установлено, что наряду с эффективным гамильтонианом нелинейного взаимодействия между осцилляторами выделенной пары, появляется эффективный гамильтониан интерференционной связи “изолированного” от термостата осциллятора с ним же. Таким образом, возникает новый интерференционный канал релаксации для “изолированного” осциллятора, который невозможно получить при использовании в традиционных подходах эффективного гамильтониана нелинейной связи между осцилляторами выделенной пары. Получено кинетическое уравнение для осцилляторов выделенной пары с оператором релаксации “изолированного осциллятора”, который служит основой для рассмотрения термодинамических задач с участием открытой системы из пары нелинейно взаимодействующих друг с другом осцилляторов.

2. Гамильтониан нелинейно взаимодействующих осцилляторов с антивращающими слагаемыми. Осцилляторы разных частот нелинейно взаимодействуют друг с другом в процессах параметрического преобразования частот, удвоения частот и т.п. Основной особенностью такого взаимодействия является высокий порядок эффективного гамильтониана – второй порядок и выше по константам связи. При этом в первом порядке по константам связи имеем обычный гамильтониан нерезонансного взаимодействия осциллятора разных частот, целиком состоящий из антивращающих слагаемых. В анализе нелинейных эффектов этим гамильтонианом (в силу его быстрой зависимости от времени в представлении взаимодействия) всегда пренебрегают. Однако это некорректно в задачах с участием широкополосных полей, в частности, в задачах теории открытых систем. Если последовательно применять алгебраическую теорию возмущений и определять эффективный гамильтониан как оператор, не имеющий в представлении взаимодействия быстроменяющихся слагаемых, то слагаемые эффективного гамильтониана первого порядка алгебраической теории возмущений будут также равны нулю. Однако их исходные операторы определяют генератор преобразования к эффективному гамильтониану алгебраической теории возмущений и в дальнейшем образуют эффективный гамильтониан взаимодействия с упомянутыми широкополосными полями.

Для определенности дальнейших рассуждений будем рассматривать взаимодействие двух осцилляторов, представляющих собой моды соседних одномодовых микрорезонаторов частот ω_i и ω_b. Нижний индекс i (не путать с мнимой единицей) отмечает осциллятор выделенной пары, о котором мы говорим как об “изолированном” (*isolated*) от термостата. Индекс b отмечает осциллятор выделенной пары, напрямую связанный с термостатом. Операторы рождения и уничтожения бозонов всех перечисленных объектов обозначаем, соответственно, c_i^+, c_i; c_b^+, c_b и b_ω^+, b_ω. Внутри каждой пары введенные операторы удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям, а операторы различных пар не коммутируют.

Среди многообразия нелинейных взаимодействий будем рассматривать двухфотонный распад осциллятора, предполагая выполненным соотношение $\omega_i = 2\omega_b$. Взаимодействие осцилляторов, можно считать, происходит на общей границе между микрорезонаторами, которое можно моделировать как совместное воздействие полей на нерезонансные атомы границы [16]. В самой простой ситуации есть только одно широкополосное поле термостата, связанного с осциллятором ω_b. Тогда, без ущерба для общности, можно рассматривать взаимодействие полей микрорезонаторов в приграничной нелинейной среде и воспользоваться макроскопическими представлениями об энергии поля в такой среде, диэлектрическая проницаемость которой нелинейна. В этом случае энергия полей в приграничной области объема V будет пропорциональна V. Энергию полей одной частоты будем относить к энергии изолированных микрорезонаторов, пренебрегая нелинейными добавками при малых V. Тогда энергия взаимодействия $V_{\text{ini}}^{\text{Int}}(t)$ полей разных частот дается выражением (в представлении взаимодействия)

$$V_{\text{ini}}^{\text{Int}}(t) = V_{\text{ini}}^{NR}(t) + V_{\text{ini}}^{NL}(t),$$

$$V^{NR}(t) = \lambda(c_b^+ e^{i\omega_b t} + c_b e^{-i\omega_b t})(c_i^+ e^{2i\omega_b t} + c_i e^{-2i\omega_b t}), \tag{1}$$

$$V_{\text{ini}}^{NL}(t) = \chi[(c_b^+ e^{i\omega_b t} + c_b e^{-i\omega_b t})^2 (c_i^+ e^{2i\omega_b t} + c_i e^{-2i\omega_b t}) + \\ + (c_b^+ e^{i\omega_b t} + c_b e^{-i\omega_b t})(c_i^+ e^{2i\omega_b t} + c_i e^{-2i\omega_b t})^2]. \tag{2}$$

В операторе взаимодействия выделены слагаемые: $V_{\text{ini}}^{NR}(t)$, отвечающее обычному нерезонансному взаимодействию мод соседних микрорезонаторов, и слагаемое $V_{\text{ini}}^{NL}(t)$, определяющее эффективное нелинейное взаимодействие мод при распаде фотона частоты $\omega_i = 2\omega_b$ на два фотона частоты ω_b. Параметры указанных взаимодействий λ и χ соотносятся как $\lambda \gg \chi$, а в дальнейшем будем просто полагать, что χ имеет второй порядок малости по λ, хотя типичны ситуации, когда этот порядок малости выше. Последнее условие позволяет короче получить эффективный гамильтониан задачи и в разложениях алгебраической теории возмущений использовать разложения по параметру λ вместо разложения по параметрам λ и χ.

3. Эффективный гамильтониан нелинейно взаимодействующих осцилляторов, один из которых взаимодействует с термостатом. Пусть теперь один из двух нелинейно связанных осцилляторов, а именно осциллятор ω_b, взаимодействует также с широкополосным квантованным полем, находящимся в стационарном дельта-коррелированном состоянии (термостатом). Такую открытую систему рассматриваем на основе исходного гамильтониана в представлении взаимодействия

$$V_{\text{ini}}(t) = V_{\text{ini}}^{NR}(t) + V_{\text{ini}}^{NL}(t) + V_{\text{ini}}^{\text{Thermo}}(t), \tag{3}$$

где слагаемые $V_{\text{ini}}^{NR}(t)$ и $V_{\text{ini}}^{NL}(t)$ определены выше, а оператор взаимодействия осциллятора с термостатом дается стандартным выражением

$$V_{\text{ini}}^{\text{Thermo}}(t) = \\ = \gamma_b \sum_\omega (c_b e^{-i\omega_b t} + c_b^+ e^{i\omega_b t})(b_\omega e^{-i\omega t} + b_\omega^+ e^{i\omega t}). \tag{4}$$

Здесь γ_b – константа связи с термостатом.

Представленный гамильтониан определяет уравнение Шредингера открытой системы, состоящей из двух нелинейно связанных осцилляторов ω_b и ω_b и его окружения, состоящего из широкополосного термостатного поля, взаимодействующего с осциллятором ω_b. Волновая функция всей системы в представлении взаимодействия (Дирака) имеет стандартный вид

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = V_{\text{ini}}(t)|\Psi(t)\rangle. \tag{5}$$

Отличительной чертой оптических задач, которая отчетливо видна из уравнений (1)–(5), является присутствие в основном уравнении слагаемых быстро и медленно меняющихся во времени. Стандартный подход для упрощения таких уравнений состоит в применении метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [17–19]. В работах

[20,21] разработан алгебраический вариант метода, который и применим к уравнениям (1)–(5).

Пользуясь унитарной симметрией квантовой теории, перейдем к новому представлению при помощи унитарного преобразования $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \exp(-iS(t))|\Psi(t)\rangle$ с генератором $S(t) = S^{+}(t)$. В новом представлении все соотношения, в том числе и уравнение Шредингера, имеют прежний вид. Но помечены знаком "тильда". Согласно общей теории [20] преобразованный гамильтониан $\tilde{V}(t)$ (в уравнении Шредингера для преобразованного волнового вектора) имеет вид

$$\tilde{V}(t) = e^{-iS(t)}V_{\text{ini}}(t)e^{iS(t)} - i\hbar e^{-iS(t)}\frac{d}{dt}e^{iS(t)}.$$

Преобразованный гамильтониан $\tilde{V}(t)$ и генератор преобразования $S(t)$ раскладываем в ряд по константам связи λ и γ_b:

$$\begin{gathered} S(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(1,1)}(t) + \ldots, \\ \widetilde{V}(t) = \widetilde{V}^{(1,0)} + \widetilde{V}^{(0,1)} + \widetilde{V}^{(1,1)}(t) + \ldots \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь левый индекс каждой пары верхних индексов указывает порядок разложения по параметру λ, а правый – по параметру γ_b. С учетом формулы Бейкера–Хаусдорфа получаем стандартные выражения для слагаемых разложений, которые отличаются только с учетом конкретного вида исходного гамильтониана $V_{\text{ini}}(t)$. Для рассматриваемой задачи и операторов (1)–(4) получаем

$$\widetilde{V}^{(1,0)}(t) = \hbar\frac{dS^{(1,0)}(t)}{dt} + V_{\text{ini}}^{NR}(t),$$

$$\widetilde{V}^{(0,1)}(t) = \hbar\frac{dS^{(0,1)}(t)}{dt} + V_{\text{ini}}^{\text{Thermo}}(t),$$

$$\begin{gathered} \widetilde{V}^{(1,1)}(t) = \hbar\frac{dS^{1,1)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), V_{\text{ini}}^{\text{Thermo}}(t)] - \\ - \frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), \widetilde{V}^{(0,1)}(t)] - \frac{i}{2}[[S^{(0,1)}(t), V_{\text{ini}}^{NR}(t)] - \\ - \frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t), \widetilde{V}^{(1,0)}(t)], \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{V}^{(2,0)}(t) = V_{\text{ini}}^{NL}(t) + \hbar\frac{dS^{(2,0)}(t)}{dt} - \\ - \frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), V_{\text{ini}}^{NR}(t)] - \frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), \widetilde{V}^{(1,0)}(t)], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{V}^{(0,2)}(t) = \hbar\frac{dS^{(0,2)}(t)}{dt} - \\ - \frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t), V_{\text{ini}}^{\text{Thermo}}(t)] - \frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t), \widetilde{V}^{(0,1)}(t)]. \end{gathered}$$

Методу усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского в алгебраической теории возмущений отвечает требование отсутствия в преобразованном гамильтониане слагаемых, быстро меняющихся во времени [20, 22]. Медленно меняющиеся во времени слагаемые определяют эффективный гамильтониан задачи V^{Eff}. Ограничимся точностью до второго порядка по константам связи включительно, т.е. $V^{\text{Eff}}(t) = \widetilde{V}^{(1,0)\prime} + \widetilde{V}^{(0,1)\prime}(t) + \widetilde{V}^{(1,1)\prime}(t) + \widetilde{V}^{(2,0)\prime}(t) + \widetilde{V}^{(0,2)\prime}(t)$. Техника вычислений здесь подробно описана в книге [20], поэтому приведем сразу результат – эффективный гамильтониан рассматриваемой задачи дается выражением

$$\begin{gathered} V^{\text{Eff}}(t) = V^{NL}(t) + V_i^{\text{Thermo}}(t) + V_b^{\text{Thermo}}(t), \\ V^{NL}(t) = \chi(c_b^{+2}c_ie^{-i\Delta t} + c_b^2c_i^{+}e^{i\Delta t}), \end{gathered} \tag{8}$$

$$V_b^{\text{Thermo}}(t) = \gamma_b \sum_{\omega\in(\omega_b)} (c_bb_\omega^{+}e^{-i(\omega_b-\omega)t} + c_b^{+}b_\omega e^{i(\omega_b-\omega)t}),$$

$$\begin{gathered} V_i^{\text{Thermo}}(t) = -\frac{\lambda\gamma_b}{2\hbar\omega_b}\sum_{\omega\in(2\omega_b)} c_i^{+}b_\omega e^{-i(\omega-2\omega_b)t} - \\ - \frac{\lambda\gamma_b}{2\hbar\omega_b}\sum_{\omega\in(2\omega_b)} c_ib_\omega^{+}e^{i(\omega-2\omega_b)t}. \end{gathered}$$

Суммирование по частотам происходит в узкой области вокруг соответствующих центральных частот. Эти области обозначены как (ω_b) и $(2\omega_b)$, центральные частоты которых отвечают частотам осцилляторов ω_b и ω_i. Эти области в широкополосном поле представляют собой независимые квантовые шумовые источники, определяющие каналы релаксации и накачки осцилляторов выделенной пары. Ширины указанных областей составляют величину порядка констант релаксации соответствующего канала, которые будут определены в дальнейшем. При этом слагаемые

$$\frac{2\lambda^2}{3\hbar\omega_b}c_b^{+}c_b - \frac{4\lambda^2}{3\hbar\omega_b}c_i^{+}c_i - \frac{\lambda^2}{3\hbar\omega_b},$$

получаемые в выражениях $\widetilde{V}^{(2,0)}(t)$ и $\widetilde{V}^{(0,2)}(t)$, включаем в энергии изолированных осцилляторов выделенной пары. Это приводит к перенормировке частот, с учетом которой введен дефект двухфотонного резонанса $\Delta = \omega_i - 2\omega_b$. Также опущены в силу их малости билинейные слагаемые по операторам широкополосного поля.

Эффективный гамильтониан нелинейно взаимодействующих осцилляторов состоит из оператора их двухфотонного взаимодействия $V^{NL}(t)$ и операторов

$V_i^{\mathrm{Thermo}}(t)$ и $V_b^{\mathrm{Thermo}}(t)$ распада каждого из осцилляторов в свой термостат. Эти каналы распада будут независимыми друг от друга, если начальные состояния термостата и открытой системы не перепутаны, а термостат не находится в сжатом состоянии. При этом канал релаксации осциллятора ω_b, изначально связанного с термостатом, характеризуется более значительным параметром релаксации по сравнению с каналом релаксации осциллятора ω_i, для которого имеется дополнительная малость порядка $\frac{\lambda}{\hbar\omega_b}$. Однако наличие такого канала принципиально, поскольку он определяет время релаксации “изолированного” осциллятора. К тому же нелинейная связь между осцилляторами может иметь еще более высокую степень малости.

4. Кинетическое уравнение для нелинейно взаимодействующих осцилляторов. Характерный билинейный вид операторов $V_i^{\mathrm{Thermo}}(t)$ и $V_b^{\mathrm{Thermo}}(t)$, описывающих взаимодействие с окружением открытой системы из двух осцилляторов выделенной пары, позволяет в марковском приближении сразу сформулировать кинетические уравнения для осцилляторов. Условия марковского приближения и вывод в этих условиях кинетического уравнения на основании квантовых стохастических дифференциальных уравнений неоднократно обсуждались [1, 20, 22]. Здесь уместно подчеркнуть, что использованный нами метод алгебраической теории возмущений эффективно сочетается именно с теорией квантовых стохастических дифференциальных уравнений, поскольку отчетливо разделяет широкополосные поля задачи на шумовые источники, ставя им в соответствие квантовые случайные процессы, которые определяют квантовое стохастическое дифференциальное уравнение для оператора эволюции открытой системы и ее широкополосного окружения.

Кинетическое уравнение для осцилляторов выделенной пары в условиях их нелинейного взаимодействия в представлении взаимодействия имеет самый стандартный вид Линдблада [1, 19, 23–25]

$$\frac{d\rho^S(\bar t)}{d\bar t} + i[\bar V^{NL}(\bar t), \rho^S(\bar t)] = -\hat\Gamma_b\rho^S(\bar t) - \hat\Gamma_i\rho^S(\bar t), \quad (9)$$

$$\hat\Gamma_s\rho^S(\bar t) = -\bar\gamma_s\bar n_s Y^+\rho^S(\bar t)Y_s - \bar\gamma_s Y_s\rho^S(\bar t)(\bar n_s+1)Y_s^+ + \\ + \left(\bar\gamma_s\left(\frac{\bar n_s+1}{2}Y_s^+Y_s + \frac{\bar n_i}{2}Y_sY_s^+\right)\rho^S(\bar t) + \right. \\ \left. + \rho^S(\bar t)\bar\gamma_s\left(\frac{\bar n_s+1}{2}Y_s^+Y_s + \frac{\bar n_s}{2}Y_sY_s^+\right)\right).$$

Здесь индекс s нумерует нелинейно связанные осцилляторы открытой системы ω_i и ω_b, пробегая значения i и b, чертой над символом обозначен безразмерный аналог введенной ранее величины: $\bar t = \omega_c t$, $\bar\gamma_b = \frac{2\pi\gamma_b^2}{\hbar\omega_b^2}$, $\bar\gamma_i = \frac{\pi\lambda^2\gamma_b^2}{2\hbar^2\omega_b^4}$. В константах связи с термостатами учтено их преобразование при получении кинетического уравнения [1, 20, 22]. Операторы уничтожения с учетом перенормировки констант связи с термостатом оказываются равными линдбладовским операторам $Y_b = c_b$, $Y_i = c_i$. Наконец термодинамические параметры – плотности числа фотонов $\bar n_b$ и $\bar n_i$ на единицу безразмерной частоты – определены, соответственно, на частотах ω_b и ω_i, т.е. если среднее от операторов рождении и уничтожения бозонов термостата дельта-коррелированно $\langle b_\omega^+ b_{\omega'}\rangle = n(\omega)\delta(\omega-\omega')$, то $\bar n_b = n(\omega)\omega_b^{-1}$, $\bar n_i = n(\omega_i)\omega_b^{-1}$. Подчеркнем, что эти плотности фотонов отвечают плотностям фотонов интенсивных хаотических бозонных полей, которые могут моделировать различные части спектра бозонного дельта-коррелированного поля, взаимодействующего с осциллятором ω_b.

Отдельно скажем об операторе нелинейного (двухфотонного) взаимодействия между осцилляторами выделенной пары. Его безразмерный вид, отмеченной чертой над символом оператора, такой:

$$\bar V^{NL}(\bar t) = \bar\chi(c_b^{+2}c_i e^{-i\bar\Delta\bar t} + c_b^2 c_i^+ e^{i\bar\Delta\bar t}),$$

где $\bar\Delta = \frac{\omega_i}{\omega_b} - 2$, $\bar\chi = \frac{\chi}{\hbar\omega_b}$. Здесь важно, что вместо рассмотренного случая двухфотонного распада $\omega_i \to 2\omega_b$, под оператором $\bar V^{NL}(\bar t)$ можно понимать и такой эффективный гамильтониан, который описывает другие случаи n-фотонных взаимодействий $\omega_i \to n\omega_b$, $n\omega_i \to \omega_b$. Нетрудно также рассмотреть и другие случаи параметрических взаимодействий и воздействий полей различной природы, но такие процессы нуждаются в отдельном рассмотрении на основе алгебраической теории возмущений, поскольку здесь возможно появление новых интерференционных каналов как накачки, так и релаксации.

5. Обсуждение. С точки зрения теории открытых систем в задачах нелинейного взаимодействия квантовых осцилляторов, когда один из взаимодействующих осцилляторов подвержен взаимодействию с широкополосным полем, и у другого осциллятора возникает свой новый интерференционный канал с этим же широкополосным полем, который эффективно определяется другой областью спектра широкополосного поля, нежели исходный канал. Этот новый канал релаксации и накачки необходимо учитывать в задачах квантовой оптики, поскольку он меняет картину релаксационной динамики осцилляторов выделенной пары. Полученное (в результате применения алгебраической теории возмущение и техники квантовых стохастических дифференциальных уравнений) кинетическое уравнение (9) выглядит как релаксационное уравнение двух независимых бозонных осцилляторов, связанных нелинейным взаимодействием. Каждый из осцилляторов диссипирует как бы в "свой" термостат, что достаточно нетривиально, поскольку изначально один из осцилляторов был изолированным от термостата. Скоростные нормированные константы релаксации каждого из осцилляторов существенно разные, что реализуемо в условиях современных экспериментов, где возможно создание высокодобротных резонаторов для широкого класса частот. Нелинейное взаимодействие, определяемое в конечном итоге в нашей задаче квадратичной нелинейностью среды, определяет нормированную скоростную консатанту взаимодействия, которая в свою очередь много меньше наименьшей из констант релаксации осцилляторов.

Для иллюстрации приведем решение уравнения (9) по теории возмущений, полагая, что параметр нелинейности $\bar{\chi}$ является малым, а температура термостата равна нулю.

Для осциллятора ω_b, изначально взаимодействующего с термостатом, среднее число квантов $n_b(t)$ дается простым выражением

$$n_b(\bar{t}) = n_b(0)\exp(-\bar{\gamma}_b\bar{t}) - 4\frac{\bar{\chi}}{\bar{\gamma}_b-\bar{\gamma}_i}\sqrt{n_b(0)n_i(0)}\times$$
$$\times\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{\gamma}_b+\bar{\gamma}_i)\bar{t}\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\gamma}_b\bar{t}\right)\right).$$

"Изолированный" (первоначально) от термостата осциллятор ω_i демонстрирует следующую динамику среднего числа квантов

$$n_i(\bar{t}) = n_i(0)\exp(-\bar{\gamma}_i\bar{t}) +$$
$$+4\frac{\bar{\chi}}{\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_b}n_b(0)(\exp(-\bar{\gamma}_b\bar{t})-\exp(-\bar{\gamma}_i\bar{t})).$$

Если не учитывать интерференционный канал релаксации, то среднее число квантов "изолированного" осциллятора меняется слабо, пропорционально константе нелинейной связи $n_i(\bar{t}) = n_i(0) + +4\frac{\bar{\chi}}{\bar{\gamma}_b}n_b(0)(1-\exp(-\bar{\gamma}_b\bar{t}))$. При этом возможна накачка "изолированного" осциллятора при отличном от нуля среднем числе квантов соседнего осциллятора. При учете интерференционного канала релаксации при малой нелинейной связи и слабом возбуждении осциллятора ω_b накачка становится невозможной.

Нелинейная связь между осцилляторами выделенной пары также важна в их динамике. Очевидно, что в случае отсутствия нелинейного взаимодействия между осцилляторами их распады происходят независимо друг от друга.

При проявлении нелинейного взаимодействия воздействие осцилляторов друг на друга специфично при учете распада. Если "изолированный" осциллятор находится в вакуумном состоянии, то он может возбуждаться другим осциллятором. При этот второй осциллятор только распадается. Если наоборот, "изолированный" осциллятор возбужден, то, соответственно, только он и распадается. Другой осциллятор при этом остается в вакуумном состоянии.

Нелинейное взаимодействие осцилляторов может изменять скорость распада исследуемого "изолированного" осциллятора. Более того, при определенных условиях, посредством именно нелинейного взаимодействия, может происходить и его возбуждение. Так на рисунке 1 сплошная кривая отвечает распаду изолированного осциллятора в случае, когда нелинейное взаимодействие игнорировано. Пунктирная кривая показывает увеличение среднего числа возбуждений изолированного осциллятора в результате нелинейного взаимодействия. Кроме того, изменяется и вид временной зависимости распада анализируемого осциллятора. Значения параметров на графике выбраны, исходя из используемых при выводе кинетического уравнения приближений.

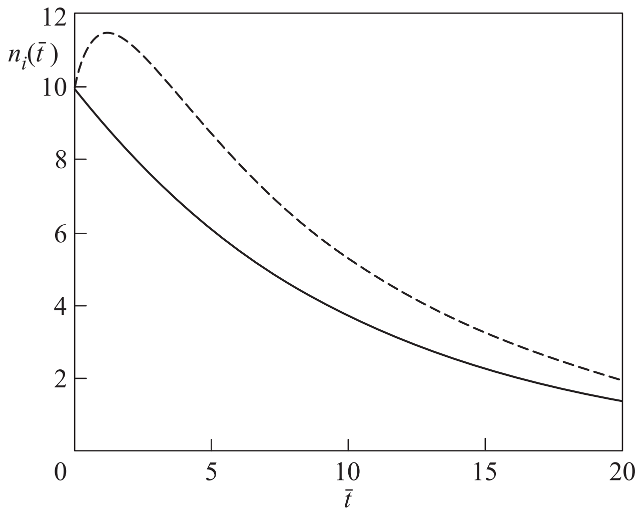

Рис. 1. Зависимость среднего числа возбуждений "изолированного" осциллятора от времени. Сплошная кривая – распад осциллятора без учета нелинейного взаимодействия. Пунктирная кривая – распад с учетом нелинейного взаимодействия в системе. Выбраны следующие начальные условия и параметры $n_b(0) = 100$, $n_i(0) = 10$, $\bar{\gamma}_b = 1$, $\bar{\gamma}_i = 0.1$, $\bar{\chi} = 0.01$

Различные другие особенности динамики открытой системы, состоящей из двух нелинейно связанных осцилляторов, требуют отдельного исследования, но в любом случае установленный в данной статье интерференционный канал распада "изолированного" осциллятора необходимо учитывать и использовать уравнение (9), поскольку его вклад во многом является определяющим в силу малости параметра нелинейной связи. Представленная здесь модель служит основой для дальнейшего описания различных эффектов в сложных составных моделях, когда резонаторные моды взаимодействуют дополнительно с атомами или квантовыми точками [25, 26]. Отметим, что для подобного рода систем необходимо построение кинетического уравнения из первых принципов, не прибегая к какому-либо феноменологическому описанию, чтобы не упустить проявления разного рода интерференционных эффектов, обусловленных квантовой природой взаимодействий, причем не только тонких, таких как в [25], но и лидирующих, как в данной статье.

Авторы выражают благодарность профессору А. И. Маймистову за полезные обсуждения нелинейных взаимодействий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 19-02-00234а).

1. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
2. H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control*, CUP, Cambridge (2009).
3. А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М. (2010).
4. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).
5. M. Lax, Optics Comm. **179**, 463 (2000).
6. P. D. Drummond, K. J. McNeil, and D. F. Walls, Optica Acta **28**, 211 (1981).
7. Yu. E. Lozovik, V. G. Tsvetus, and E. A. Vinogradov, Письма в ЖЭТФ **61**, 711 (1995).
8. S. V. Remizov, D. S. Shapiro, and A. N. Rubtsov, Письма в ЖЭТФ **105**, 110 (2017).
9. E. Verhagen, S. Deleglise, S. Weis, A. Schliesser, and T. J. Kippenberg, Nature **482**, 63 (2012).
10. C. Joshi, P. Ohberg, J. D. Cresser, and E. Andersson, Phys. Rev. A **90**, 063815 (2014).
11. D. F. Walls, Z. Phys. **234**, 231 (1970).
12. А. Е. Теретенков, Матем. заметки **100**, 636 (2016).
13. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, ЖЭТФ **156**, 407 (2019).
14. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, Наука, М. (1980).
15. Y. R. Shen, *The Principle of Nonlinear Optics*, Wiley-Interscience, N.Y. (1984).
16. А. М. Башаров, ЖЭТФ **153**, 375 (2018).
17. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, РХД, М. (2004) (переиздание книги 1937 г.).
18. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИФМЛ, М. (1958).
19. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, М. (1977).
20. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).
21. V. N. Bogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer-Verlag, N.Y. (1991).
22. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).
23. G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **40**, 147 (1975).
24. V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sundarsham, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
25. A. M. Basharov, Phys. Lett. A **376**, 1881 (2012).
26. L. V. Keldysh, V. D. Kulakovskii, S. Reitzenstein, M. N. Makhonin, and A. Forchel, Письма в ЖЭТФ **84**, 584 (2006).