Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 5, стр. 251 – 254 *10 марта 1989 г.*

ФОРМУЛА ДЛЯ ВИЛЬСОНОВСКОЙ ПЕТЛИ

Д.И.Дьяконов, В.Ю.Петров

Выводится новая формула для упорядоченной по контуру экспоненты от янг-миллсовского поля. Она может быть представлена в виде функционального интеграла по всем калибровочным преобразованиям данного поля. Попутно получен оператор эволюции для действия Весса – Зумино.

Упорядоченная по контуру экспонента от янг-миллсовского поля (в дальнейшем P-экспонента) часто используется в калибровочной теории. Однако аналитические вычисления с P-экспонентой сложны из-за того, что практически невозможно вычислить ее в общем виде, например, в поле ансамбля инстантонов или меронов и т. п. Хотя бы по этой причине желательно иметь для нее альтернативные представления.

Рассмотрим P-экспоненту вдоль заданной кривой $x_\mu(t)$. Начальной и конечной точкам сопоставим значения параметра t_1 и t_2. Для простоты мы ограничимся неабелевой группой SU_2. Пусть T^a $(a = 1,2,3)$ – генераторы группы SU_2 в данном представлении T, $T^a T^a = T(T+1)$. Обозначим $A(t) \equiv A^a_\mu T^a dx_\mu/dt$ касательную к кривой компоненту янг-миллсовского поля. Определим P-компоненту

$$W_{\alpha\beta}(t_2, t_1) = [P\exp i \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} A^a_\mu T^a dx_\mu]_{\alpha\beta} = [P\exp i \int_{t_1}^{t_2} A(t)dt]_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

как решение уравнения

$$[i\frac{d}{dt} + A(t)]_{\gamma\alpha}\psi_\alpha(t) = 0:$$

$$\psi_\alpha(t_2) = W_{\alpha\beta}(t_2, t_1)\psi_\beta(t_1). \qquad (2)$$

Разложение P- экспоненты в ряд по степеням поля имеет вид:

$$W_{\alpha\beta}(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n \left[iA(\tau_1) \cdots iA(\tau_n) \right]_{\alpha\beta} , \qquad (3)$$

где $t_2 \geqslant \tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n \geqslant t_1$. Потенциал $A(t)$ вдоль заданной кривой всегда можно представить в виде "чистой калибровки".

$$A_{\alpha\beta}(t) = iD^T_{\alpha\gamma}(U(t)) \frac{d}{dt} D^T_{\gamma\beta}(U^+(t)), \qquad (4)$$

где $D^T(U)$ – матрица конечных вращений (функция Вигнера) в представлении T; в частности, в спинорном представлении $D^{1/2}_{\alpha\beta}(U) = U_{\alpha\beta}$. Из уравнения (2) следует, что P- экспонента (1) есть

$$W_{\alpha\beta}(t_2, t_1) = D^T_{\alpha\gamma}(U(t_2)) D^T_{\gamma\beta}(U^+(t_1)) = D^T_{\alpha\beta}(U(t_2)U^+(t_1)). \qquad (5)$$

Искомая формула для P-экспоненты (1) представляет собой функциональный интеграл по всем калибровочным преобразованиям $S(t)$ поля $A(t)$, спроектированный затем в матричное представление α, β :

$$W_{\alpha\beta}(t_2, t_1) =$$

$$= \int\int dS_1 dS_2 (2T+1) D^T_{\alpha T}(S_2^+) D^T_{T\beta}(S_1) \int_{S(t_1)=S_1}^{S(t_2)=S_2} DS(t) \exp\{ iT \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Tr} \tau_3 (SAS^+ + i\dot{S}S^+) \}. \qquad (6)$$

Здесь подразумевается, что $A(T)$ записано в спинорном представлении, $A = A^a \tau_a/2$, τ_a – матрицы Паули, $S(t)$ – унитарная 2×2 матрица калибровочного преобразования. Интегралы по $dS_{1,2}$ – нормированные на единицу интегралы по мере Хаара группы SU_2.

Для доказательства формулы (6) возьмем, не теряя общности, потенциал в форме "чистой калибровки" (ср. с (4)) : $A(t) = iU(t)\dot{U}^+(t)$. Тогда правая часть (6) должна иметь вид (5). Подинтегральное выражение в экспоненте (6) перепишем как $SAS^+ + i\dot{S}S^+ = iR\dot{R}^+$, где $R = SU$. Делая сдвижку в интегралах по мере Хаара, $dS = d(SU) = dR$, мы можем переписать формулу (6) как

$$W_{\alpha\beta}(t_2, t_1) = \int\int dR_1 dR_2 (2T+1) D^T_{\alpha T}(U(t_2)R_2^+) D^T_{T\beta}(R_1 U^+(t_1)) Z(R_2, R_1), \qquad (7)$$

$$Z(R_2, R_1) = \int_{R_1}^{R_2} DR(t) \exp\{ iT \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Tr}(iR\dot{R}^+ \tau_3) \}. \qquad (8)$$

Функциональный интеграл (8) представляет собой оператор эволюции волчка с действием Весса – Зумино, но без обычного "кинетического члена", квадратичного по производным по времени. Более общая задача об эволюции симметричного волчка с действием Весса – Зумина была рассмотрена в работе [1]. Чтобы воспользоваться ее результатами введем в (8) квадратичные по производным по времени члены с малыми моментами инерции I, которые затем устремим к нулю. Итак, рассмотрим вместо (8) оператор эволюции

$$Z_{Reg}(R_2, R_1) = \int_{R_1}^{R_2} DR(t) \exp\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{I_\perp}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{I_{\parallel}}{2}\Omega_3^2 + T\Omega_3 \right] \}, \qquad (9)$$

где $\Omega_a = i\mathrm{Tr}(R\dot{R}^+\tau_a)$ – угловые скорости волчка. Запишем (9) в виде суммы по промежуточным состояниям волчка:

$$Z_{Reg}(R_2, R_1) = \sum_{J,m,k} (2J+1)\, D^{J\,*}_{mk}(R_1) D^{J}_{mk}(R_2) \exp[-i(t_2-t_1)E_{Jm}] , \tag{10}$$

где, согласно формуле (1.34) работы [1],

$$E_{Jm} = \frac{J(J+1)-m^2}{2I_\perp} + \frac{(m-T)^2}{2I_\parallel} , \qquad |m| \leqslant J . \tag{11}$$

При стремлении моментов инерции $I_{\perp,\parallel}$ к нулю в сумме (10) выживает единственное промежуточное состояние с низшей энергией ($m = J = T$). Остающийся экспоненциальный множитель от низшей энергии можно убрать соответствующей нормировкой интеграла (9), поскольку это отвечает общему сдвигу шкалы энергии. В результате мы получаем для исходного оператора эволюции (8):

От

$$Z(R_2, R_1) = (2T+1) \sum_k D^{T\,*}_{Tk}(R_1) D^{T}_{Tk}(R_2) = (2T+1) D^{T}_{TT}(R_2 R_1^+) . \tag{12}$$

Отметим, что представление и проекции момента фиксируются коэффициентом T перед членом Весса – Зумино в (8), поэтому данный оператор эволюции зависит только от относительной ориентации волчка в начальный и конечный моменты времени, и не зависит от временного интервала $t_2 - t_1$. Результат (12) нетрудно получить и непосредственно, понимая функциональный интеграл (8) как предел бесконечного числа обычных интегралов в дискретных точках. Однако и при этом выводе необходима регуляризация для обеспечения гладкости $R(t)$ в соседних точках, поскольку интеграл (8) не фейнмановского типа.

Подставляя (12) в (7) и интегрируя по концевым матрицам $R_{1,2}$, мы сразу приходим к выражению для P-экспоненты в форме (5), что и требовалось доказать.

Для вильсоновской петли, то есть следа от P-экспоненты по замкнутому контуру мы получаем более простое выражение, также следующее из (12):

$$\mathrm{Tr}\, P \exp i\oint A^a_\mu T^a dx_\mu = \int DS(t) \exp\left\{ iT \int dt\, \mathrm{Tr}\, \tau_3 (SAS^+ + i\dot{S}S^+) \right\} , \tag{13}$$

где t параметризует данную замкнутую кривую. Заметим, что матрицу τ_3 можно заменить здесь на любую другую матрицу Паули. Калибровочная инвариантность (13) очевидна. То, что янг-миллсовское поле стоит просто в экспоненте (без упорядочения), существенно упрощает усреднение вильсоновской петли в заданном ансамбле внешних полей. Подчеркнем, что вся зависимость от представления сводится к общему множителю T в экспоненте.

Введем единичный вектор $n_a(t) = (1/2)\,\mathrm{Tr}\, S\tau_a S^+ \tau_3$. Первое слагаемое в (13) перепишется как $A^a n_a$, а второе можно записать в более стандартной форме члена Весса – Зумино (см. [1]):

$$S_{WZ} = \frac{1}{2} \int d^2t\, \epsilon_{\mu\nu}\, \epsilon_{abc}\, n_a \partial_\mu n_b \partial_\nu n_c , \tag{14}$$

где интегрирование ведется по любой площадке внутри контура. Поэтому вильсоновскую петлю можно представить в виде

$$\mathrm{Tr}\, P \exp i\oint A^a_\mu T^a dx_\mu = \int D\mathbf{n}(t) \exp iT\left[\int dt (A\mathbf{n}) + S_{WZ} \right] . \tag{15}$$

В таком виде формула становится почти очевидной: P-экспонента, как следует из ее определения (2), представляет собой оператор эволюции "спина" $\mathbf{n}$ в зависящем от времени "магнитном поле" $\mathbf{A}(t)$. При этом член Весса – Зумино фиксирует представление, которому принадлежит данный спин.

В частном случае $\mathbf{A}(t) = \text{const}$ мы получаем, что интеграл с действием Весса –Зумино дает формулу для характера представления T:

$$\int D\mathbf{n}(t) \exp iT \left[\int dt\,(\mathbf{An}) + S_{WZ} \right] = \sum_{m=-T}^{T} \exp im|\mathbf{A}|\,l, \qquad (16)$$

где l – длина кривой. Эта формула была получена недавно в работе [2].

Мы признательны А.Ю.Морозову, П.В.Побылице и С.Л.Шаташвили за полезные обсуждения.

Литература

1. *Дьяконов Д.И., Петров В.Ю.* Препринт ЛИЯФ-967, 1984; Элементарные частицы (Материал 12 школы ИТЭФ, 1984), М.: Энергоатомиздат, 1985, **2**, 50.
2. *Alekseev A., Faddeev L., Shatashvili S.* To be published in J. Geometry and Physics.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 января 1989 г.