Обобщенные формфакторы Сакса и возможность их измерения в процессах без переворота и с переворотом спина протона

М. В. Галынский[+1)], *Р. Е. Герасимов*[*×]

[+] *Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны НАНБ, 220109 Минск, Беларусь*

[*] *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[×] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 8 октября 2019 г.
После переработки 28 октября 2019 г.
Принята к публикации 30 октября 2019 г.

Проведен расчет дифференциального сечения процесса упругого рассеяния электрона на протоне с учетом вклада двухфотонного обмена и массы электрона в рамках феноменологического описания электромагнитных взаимодействий электрона с протоном. Расчеты проведены на основе последовательного вычисления матричных элементов протонного тока в диагональном спиновом базисе, что позволило естественным образом получить выражения для обобщенных формфакторов Сакса. Предложен новый метод их независимого измерения в упругом процессе $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в случае, когда начальный покоящийся протон полностью поляризован вдоль направления движения конечного протона.

DOI: 10.1134/S0370274X19220132

Введение. Изучение электромагнитных формфакторов протона (ФФП), являющихся важными характеристиками этой фундаментальной частицы, позволяет углубить понимание структуры протона и свойства взаимодействий составляющих его кварков. Эксперименты по изучению электрического G_E и магнитного G_M ФФП, так называемых формфакторов Сакса (ФФС), ведутся с середины 1950-х гг. [1, 2] в реакции упругого рассеяния электрона на протоне. В случае неполяризованных электронов и протонов все экспериментальные данные о поведении ФФП были получены с использованием формулы Розенблюта [1] для дифференциального сечения упругого процесса $ep \to ep$ в лабораторной системе отсчета (ЛСО), где начальный протон покоится:

$$\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \frac{\alpha^2 E_2 \cos^2(\theta_e/2)}{4E_1^3 \sin^4(\theta_e/2)} \frac{1}{1+\tau_p} \left(G_E^2 + \frac{\tau_p}{\varepsilon} G_M^2\right). \quad (1)$$

Здесь $\tau_p = Q^2/4M^2, Q^2 = -q^2 = 4E_1 E_2 \sin^2(\theta_e/2)$ – квадрат переданного протону импульса; M – масса протона; E_1, E_2, θ_e – соответственно, энергии начального и конечного электронов и угол рассеяния электрона; ε – степень линейной поляризации виртуального фотона [3–6] с областью изменений $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $\varepsilon = [1 + 2(1+\tau_p)\tan^2(\theta_e/2)]^{-1}$; $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры. Формула Розенблюта (1) получена в приближении механизма однофотонного обмена (ОФО), при этом масса электрона положена равной нулю.

При больших значениях Q^2, как это следует из формулы Розенблюта, основной вклад в сечение процесса $ep \to ep$ дает член, пропорциональный G_M^2, что приводит к уменьшению точности выделения вклада G_E^2. Вследствие этого использование формулы Розенблюта для экспериментального измерения G_E и G_M приводит к значительным неопределенностям при значениях $Q^2 \geqslant 1$ ГэВ^2. Метод измерения ФФС, основанный на использовании формулы (1), в литературе принято называть техникой (методом) Розенблюта (ТР). С помощью ТР было установлена экспериментальная зависимость G_E и G_M от Q^2, которая вплоть до $Q^2 \approx 6$ ГэВ^2 хорошо описывается дипольным приближением

$$G_E = G_M/\mu_p = G_D(Q^2) \approx (1 + Q^2/\,0.71)^{-2}, \quad (2)$$

при этом для отношения $R \equiv \mu_p G_E/G_M$ выполняется приближенное равенство $R \approx 1$, где μ_p – магнитный момент протона, $\mu_p = 2.79$.

В работе Ахиезера и Рекало [4] был предложен метод измерения отношения ФФС, основанный на явлении передачи поляризации от продольно поляризованного начального электрона к конечному протону. Он основан на формуле, полученной в [4] для отношения формфакторов G_E и G_M через отношение поперечной P_t и продольной P_l поляризаций рассеянного протона:

[1)] e-mail: galynski@sosny.bas-net.by

$$R \equiv \frac{\mu_p G_E}{G_M} = -\frac{P_t}{P_l}\frac{E_1+E_2}{2M}\tan\left(\frac{\theta_e}{2}\right). \qquad (3)$$

Прецизионные эксперименты, основанные на использовании формулы (3), были проведены в Лаборатории им. Т. Джефферсона (JLab, США) [7–12] в области $0.5 \leqslant Q^2\,(\text{ГэВ}^2) \leqslant 8.5$, в которой при $0.5 \leqslant Q^2\,(\text{ГэВ}^2) \leqslant 5.6$, как оказалось, для отношения R с ростом Q^2 имеет место линейное убывание

$$R = 1 - 0.13\,(Q^2 - 0.04) \approx 1 - Q^2/8, \qquad (4)$$

что свидетельствует о более быстром убывании G_E по сравнению с G_M. Отметим, что в формулах (2) и (4) Q^2 выражены в единицах ГэВ^2.

Повторные, более точные измерения отношения $\mu G_E/G_M$ [11–13], лишь подтвердили расхождение с результатами, полученными с помощью ТР. Подробное изложение современного состояния этой проблемы имеется в обзорах [14, 15].

Для разрешения возникшего противоречия было высказано предположение, что расхождение в экспериментах может быть вызвано пренебрежением в соответствующем анализе вкладом двухфотонного обмена (ДФО), что привело к большому количеству теоретических работ [16–22], см. [23, 24], а также обзоры [25, 26] и приведенную там литературу.

В настоящее время в мире известны три эксперимента, в которых было проведено измерение вклада ДФО в сечение упругого процесса $ep \to ep$. Это эксперимент на накопительном кольце VEPP-3 в Новосибирске [27], эксперимент EG5 CLAS в JLab [28] и эксперимент OLYMPUS [29] на ускорителе DORIS в DESY. Предварительные результаты работ [27–29] показали, что учет вклада ДФО, как и следовало ожидать, может устранить противоречия до значений Q^2 не более 2–3 ГэВ^2.

В связи со значительными расхождениями в результатах измерений отношения ФФС на основе двух экспериментальных методов было бы очень важным провести измерения и другими независимыми способами. В работе [30] в однофотонном приближении (ОФП) был предложен новый метод экспериментального измерения квадратов ФФС, в котором G_E^2 и G_M^2 могут быть определены независимо друг от друга прямыми измерениями сечений без переворота и с переворотом спина протона в упругом процессе $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в случае, когда начальный (покоящийся) протон полностью поляризован вдоль направлении движения рассеянного протона. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы показать, что метод, предложенный в [30], работает и в двухфотонном приближении (ДФП) и позволяет измерить аналогичным образом квадраты модулей обобщенных ФФС $|\mathcal{G}_E|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$. Предлагаемый метод, как оказалось, возможен вследствие тождественности поляризационной структуры сечений процесса $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в ОФП и ДФП. Расчет сечения в ДФП проведен с использованием метода вычисления матричных элементов (МЭ) процессов квантовой электродинамики (КЭД) в диагональном спиновом базисе (ДСБ) [31], в котором реализуется малая группа Лоренца [32, 33], общая для системы двух частиц с разными импульсами. Использование ДСБ позволило естественным образом определить обобщенные ФФС на стадии вычисления МЭ протонного тока. При этом сечение процесса $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в произвольной системе отсчета (ПСО) содержит только $|\mathcal{G}_E|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$, т.е. “диагонализируется”, если использовать терминологию авторов работы [20].

Диагональный спиновый базис. В ДСБ спиновые 4-векторы s_1 и s_2 протонов с 4-импульсами q_1 и q_2 ($s_1 q_1 = s_2 q_2 = 0$, $s_1^2 = s_2^2 = -1, q_1^2 = q_2^2 = M^2$) или, соответственно, с 4-скоростями $v_1 = q_1/M$ и $v_2 = q_2/M$, имеют вид [31]:

$$s_1 = -\frac{(v_1 v_2)v_1 - v_2}{\sqrt{(v_1 v_2)^2 - 1}}, \;\; s_2 = \frac{(v_1 v_2)v_2 - v_1}{\sqrt{(v_1 v_2)^2 - 1}}. \qquad (5)$$

Очевидно, что спиновые 4-векторы (5) не изменяются при преобразованиях малой группы Лоренца, общей для частиц с 4-импульсами q_1 и q_2.

Рассмотрим спиновые векторы ДСБ (5) в ЛСО. В общем случае спиновый 4-вектор s частицы со спином 1/2 и 4-импульсом q имеет вид

$$s = (s_0, \mathbf{s}), \;\; s_0 = \mathbf{vc}, \;\; \mathbf{s} = \mathbf{c} + \frac{(\mathbf{cv})\mathbf{v}}{1+v_0}, \qquad (6)$$

где трехмерный вектор $\mathbf{c}$, называемый осью спиновых проекций, является произвольно направленным вектором единичной длины ($\mathbf{c}^2 = 1$).

В ЛСО, где $q_1 = (M, \mathbf{0})$, $q_2 = (q_{20}, \mathbf{q}_2)$, спиновые 4-векторы ДСБ s_1 и s_2 (5) имеют вид

$$s_1 = (0, \mathbf{n}_2), \;\; s_2 = (|\mathbf{v}_2|, v_{20}\,\mathbf{n}_2), \; \mathbf{n}_2 = \mathbf{q}_2/|\mathbf{q}_2|. \qquad (7)$$

Это означает, что в ЛСО оси спиновых проекций $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ у начальной и конечной частиц совпадают с направлением движения конечной частицы

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{q}_2/|\mathbf{q}_2|. \qquad (8)$$

Для системы двух частиц с разными импульсами $q_1 = (q_{10}, \mathbf{q}_1)$ (до взаимодействия) и $q_2 = (q_{20}, \mathbf{q}_2)$ (после взаимодействия) возможность одновременного проектирования спинов на одно общее направление в ПСО определяется трехмерным вектором [32]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{q}_2/q_{20} - \mathbf{q}_1/q_{10}. \tag{9}$$

Этот результат получен в рамках векторной параметризации малой группы Лоренца L_{q_1,q_2}, общей для системы двух частиц с 4-импульсами q_1 и q_2 $(L_{q_1q_2}q_1 = q_1, L_{q_1q_2}q_2 = q_2)$ [32, 33].

Поскольку трехмерный вектор $\mathbf{a}$ (9) есть разность двух векторов, а геометрический образ разности двух векторов есть диагональ параллелограмма, то это и стало причиной введения названия "ДСБ".

Совпадение малых групп Лоренца для частиц с 4-импульсами q_1 и q_2 в ДСБ (5) обуславливает ряд его замечательных свойств. Одно из них заключается в том, что в ДСБ (5) операторы проекции спина σ_1 и σ_2, а также повышающие и понижающие спиновые операторы $\sigma_1^{\pm\delta}$ и $\sigma_2^{\pm\delta}$ у этих частиц совпадают и имеют вид [34, 35]:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \gamma^5 \hat{s_1}\hat{v_1} = \gamma^5 \hat{s_2}\hat{v_2} = \gamma^5 \hat{b}_0\hat{b}_3, \tag{10}$$

$$\sigma^{\pm\delta} = \sigma_1^{\pm\delta} = \sigma_2^{\pm\delta} = -1/2\,\gamma^5\,\hat{b}_{\pm\delta}, \tag{11}$$

$$\sigma u^\delta(q_i) = \delta u^\delta(q_i), \sigma^{\pm\delta}u^{\mp\delta}(q_i) = u^{\pm\delta}(q_i). \tag{12}$$

Здесь $u^\delta(q_i)=u^\delta(q_i, s_i)$ – биспиноры состояний частиц $(i = 1, 2)$; произвольный 4-вектор со шляпкой $\hat{a}$ есть дираковский оператор, $\hat{a} = a_\mu\gamma^\mu$, γ^μ и γ^5 – матрицы Дирака; $b_{\pm\delta}$ – круговые 4-векторы, $b_{\pm\delta} = b_1 \pm i\,\delta b_2$, $\delta = \pm 1$, $b_{\pm\delta}^{\,2} = 0$, $b_{\pm\delta}b_{\mp\delta} = -2$.

В выражениях (10), (11) для построения спиновых операторов использована тетрада ортонормированных 4-векторов b_A $(A = 0, 1, 2, 3)$:

$$b_0 = q_+/\sqrt{q_+^2},\ b_3 = q_-/\sqrt{-q_-^2}, \tag{13}$$
$$(b_1)_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\sigma} b_0^\nu b_3^\kappa b_2^\sigma,\ (b_2)_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\sigma} q_1^\nu q_2^\kappa r^\sigma/\rho,$$

где $q_+ = q_2 + q_1$, $q_- = q_2 - q_1$, $\varepsilon_{\mu\nu\kappa\sigma}$ – тензор Леви-Чивита $(\varepsilon_{1230} = 1)$; r – 4-импульс частицы, участвующей в реакции, отличный от q_1 и q_2; ρ определяется из условий нормировки $b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = -b_0^2 = -1$. Совпадение спиновых операторов в ДСБ (5) позволяет в ковариантном виде разделить взаимодействия без переворота и с переворотом спина частиц, участвующих в реакции, и тем самым проследить за динамикой спинового взаимодействия.

Метод вычисления МЭ процессов КЭД в ДСБ. Амплитуды процессов КЭД в канале рассеяния имеют вид

$$M^{\pm\delta,\delta} = \overline{u}^{\pm\delta}(q_2)Q_{in}u^\delta(q_1), \tag{14}$$

где $u^\delta(q_i)=u^\delta(q_i, s_i)$ – биспиноры начального и конечного состояний фермионов, нормированные условием $\overline{u}^\delta(q_i)\,u^\delta(q_i) = 2M$, $q_i^2 = M^2$ $(i = 1, 2)$; Q_{in} – оператор взаимодействий.

Расчет МЭ вида (14) может быть сведен к операции вычисления шпура от произведения операторов:

$$M^{\pm\delta,\delta} = \mathrm{Tr}(P_{21}^{\pm\delta,\delta}Q_{in}), \tag{15}$$
$$P_{21}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(q_1)\overline{u}^{\pm\delta}(q_2). \tag{16}$$

Для нахождения операторов $P_{21}^{\pm\delta,\delta}$ (16) известен ряд методов [35, 36]. В используемом подходе [35], в отличие, например, от [36], построение $P_{21}^{\pm\delta,\delta}$ сводится к нахождению операторов T_{21} и T_{12}, таких, что

$$u^\delta(q_2) = T_{21}u^\delta(q_1),\ u^\delta(q_1) = T_{12}u^\delta(q_2), \tag{17}$$

при этом $T_{12} = T_{21}^{-1}$, $T_{21}T_{12} = 1$.

В результате для оператора $P_{21}^{\delta,\delta}$ (16) имеем:

$$P_{21}^{\delta,\delta} = u^\delta(q_1)\,\overline{u}^\delta(q_1)\,T_{12} = \tau_1^\delta\,T_{12} = T_{12}\,\tau_2^\delta, \tag{18}$$

где $\tau_i^\delta=u^\delta(q_i)\,\overline{u}^\delta(q_i)$ – проективные операторы состояний частиц с 4-импульсами q_i и спиновыми 4-векторами s_i $(q_is_i = 0, s_i^2 = -1,\ i = 1, 2)$:

$$\tau_i^\delta = 1/2\,(\,\hat{q}_i + M)(\,1 - \delta\gamma^5\hat{s}_i). \tag{19}$$

Оператор $P_{21}^{-\delta,\delta}$ (16) есть произведение операторов $\sigma^{+\delta}$ (11) и $P_{21}^{-\delta,-\delta}$ (18):

$$P_{21}^{-\delta,\delta} = \sigma^{+\delta}P_{21}^{-\delta,-\delta} = \sigma^{+\delta}\tau_1^{-\delta}T_{12} = \sigma^{+\delta}T_{12}\tau_2^{-\delta}. \tag{20}$$

В ДСБ (5) T_{21} и T_{12} совпадают и имеют вид [35]:

$$T_{21} = T_{12} = \hat{b}_0.$$

В результате для операторов $P_{21}^{\pm\delta,\delta}$ (16) имеем [35]:

$$P_{21}^{\delta,\delta} = (\hat{q}_1 + M)\,\hat{b}_\delta\,\hat{b}_0\,\hat{b}_\delta^*/4, \tag{21}$$
$$P_{21}^{-\delta,\delta} = \delta(\hat{q}_1 + M)\,\hat{b}_\delta\,\hat{b}_3/2, \tag{22}$$

где $b_\delta^* = b_{-\delta} = b_1 - i\delta b_2, b_\delta b_\delta^* = -2, b_\delta^2 = b_\delta^{*2} = 0$.

Общую структуру зависимости квадратов модулей МЭ (14) от поляризаций частиц в некоторых случаях можно установить, исходя из их общего вида, используя свойства симметрий электромагнитных взаимодействий. Чтобы в этом убедиться, перепишем МЭ (14) в наиболее общем виде

$$M(\delta_1, \delta_2) \equiv M^{\pm\delta_2,\delta_1} = \overline{u}^{\pm\delta_2}(q_2)Q_{in}u^{\delta_1}(q_1). \tag{23}$$

Введем поляризационные множители ω_+ и ω_-:

$$\omega_+ = (1 + \delta_1\delta_2)/2,\ \omega_- = (1 - \delta_1\delta_2)/2, \tag{24}$$

которые при $\delta_{1,2} = \pm 1$ обладают свойствами:

$$\omega_\pm^2 = \omega_\pm,\ \omega_\pm\omega_\mp = 0. \tag{25}$$

Для МЭ (23) справедливы соотношения

$$M(\delta_1,\delta_2)=\omega_+ M^{+\delta_2,\delta_1}+\omega_- M^{-\delta_2,\delta_1}. \quad (26)$$

В силу свойств поляризационных множителей $\omega_\pm$ (24) при $\delta_{1,2}=\pm 1$, имеем

$$|M(\delta_1,\delta_2)|^2=\omega_+|M^{+\delta_2,\delta_1}|^2+\omega_-|M^{-\delta_2,\delta_1}|^2. \quad (27)$$

В рассматриваемом процессе $e\vec{p}\to e\vec{p}$, когда электроны неполяризованы, спиновые корреляции в (27), за исключением тех, что имеются в $\omega_\pm$, в силу сохранения пространственной четности должны отсутствовать. Это означает, что $|M^{\pm\delta_2,\delta_1}|^2$ не зависят от δ_1 и δ_2, а усредненный и просуммированный по поляризациям квадрат модуля МЭ (23) имеет вид:

$$\overline{|M(\delta_1,\delta_2)|^2}=|M^{\uparrow\uparrow}|^2+|M^{\downarrow\uparrow}|^2\,. \quad (28)$$

МЭ протонного тока в ОФП. Матричные элементы упругого процесса $e\vec{p}\to e\vec{p}$

$$e(p_1)+p(q_1,s_1)\to e(p_2)+p(q_2,s_2) \quad (29)$$

есть произведение электронного и протонного токов

$$M_{ep\to ep}=4\pi\alpha T/q^2, \quad (30)$$
$$T\equiv T^{\pm\delta,\delta}=(J_e)^\mu (J_p^{\pm\delta,\delta})_\mu. \quad (31)$$

Токи $(J_e)_\mu$ и $(J_p)^\mu$ в приближении ОФО имеют вид:

$$(J_e)^\mu=\overline{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1), \quad (32)$$
$$(J_p)_\mu=\overline{u}(q_2)\Gamma_\mu^{1\gamma}(q^2)u(q_1), \quad (33)$$
$$\Gamma_\mu^{1\gamma}(q^2)=F_1\gamma_\mu+\frac{F_2}{4M}(\,\hat{q}\gamma_\mu-\gamma_\mu\hat{q}\,), \quad (34)$$

где $u(p_i)$ и $u(q_i)$ – биспиноры электронов и протонов с 4-импульсами p_i и q_i, $p_i^2=m^2$, $q_i^2=M^2$, $\overline{u}(p_i)u(p_i)=2m$, $\overline{u}(q_i)u(q_i)=2M$ $(i=1,2)$; F_1 и F_2 – дираковский и паулиевский ФФП, $q=q_-=q_2-q_1$ – 4-импульс, переданный протону; s_1 и s_2 – 4-векторы поляризации начального и конечного протонов.

Сечение процесса $e\vec{p}\to e\vec{p}$ имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d|t|}=\frac{\pi\alpha^2}{4I^2}\,\frac{|T|^2}{q^4}, \quad (35)$$

где $I^2=(p_1q_1)^2-m^2M^2, |t|=Q^2=-q^2$.

МЭ протонного тока (33), вычисленные в ДСБ (5) с помощью (15), (21), (22), имеют вид [31, 35]:

$$(J_p^{\delta,\delta})_\mu=2M\,G_E(b_0)_\mu, \quad (36)$$
$$(J_p^{-\delta,\delta})_\mu=-2\,\delta M\,\sqrt{\tau_p}\,G_M(b_\delta)_\mu, \quad (37)$$

где G_E и G_M – формфакторы Сакса (ФФС):

$$G_E=F_1-\tau_p\,F_2\,,\; G_M=F_1+F_2. \quad (38)$$

Следовательно, в МЭ протонного тока, отвечающих переходам без переворота (36) и с переворотом спина протона (37) в ДСБ, имеет место факторизация ФФС G_E и G_M, что придает им фундаментальный физический смысл, как величинам, определяющим вероятность перехода протона без переворота и с переворотом спина в случае, когда оси спиновых проекций совпадают и имеют вид (9).

С помощью МЭ протонного тока $J_p^{\pm\delta,\delta}$ (33) расчет квадратов модулей амплитуд $|T^{\pm\delta,\delta}|^2$ (31) в случае неполяризованных электронов сводится к вычислению шпуров от произведения операторов:

$$|T^{\pm\delta,\delta}|^2=2\cdot\mathrm{Tr}(\tau_2^e\gamma_\mu\tau_1^e\gamma_\nu\,)(J_p^{\pm\delta,\delta})^\mu(J_p^{\pm\delta,\delta *})^\nu, \quad (39)$$

где символ “$*$” обозначает комплексное сопряжение, τ_i^e – проективные операторы электронов $(i=1,2)$:

$$\tau_i^e=1/2\,(\,\hat{p}_i+m). \quad (40)$$

Величина $|T|^2$, определяющая сечение (35) процесса $e\vec{p}\to e\vec{p}$, согласно (27), имеет вид:

$$|T_{\delta_1,\delta_2}|^2=\omega_+|T^{+\delta,\,\delta}|^2+\omega_-|T^{-\delta,\,\delta}|^2. \quad (41)$$

В случае неполяризованных частиц усредненный по спинам квадрат модуля амплитуд $\overline{|T|^2}$ имеет вид:

$$\overline{|T|^2}=|T^{+\delta,\,\delta}|^2+|T^{-\delta,\,\delta}|^2. \quad (42)$$

Сечение процесса $e\vec{p}\to e\vec{p}$ в ОФП. С помощью МЭ (36), (37) расчет величин $|T|^2$ (31) сводится к вычислению шпуров:

$$|T^{+\delta,\,\delta}|^2=4M^2\,G_E^2\,\mathrm{Tr}((\hat{p}_2+m)\hat{b}_0(\hat{p}_1+m)\hat{b}_0)/2,$$
$$|T^{-\delta,\,\delta}|^2=4M^2\tau_p G_M^2\,\mathrm{Tr}((\hat{p}_2+m)\hat{b}_\delta(\hat{p}_1+m)\hat{b}_\delta^*)/2.$$

В результате простых вычислений имеем:

$$|T^{+\delta,\,\delta}|^2=\frac{G_E^2}{1+\tau_p}\,Y_1,\;\; |T^{-\delta,\,\delta}|^2=\frac{\tau_p\,G_M^2}{1+\tau_p}\,Y_2, \quad (43)$$
$$Y_1=(p_+q_+)^2+q_+^2q_-^2\,, \quad (44)$$
$$Y_2=(p_+q_+)^2-q_+^2(q_-^2+4m^2), \quad (45)$$

где $p_+=p_1+p_2$, $q_+=q_1+q_2$, $q_-=q_2-q_1=q$.

Отметим, что величины $|T^{\pm\delta,\,\delta}|^2$ (43) не зависят от поляризаций протонов, как и отмечалось выше.

В результате для дифференциального сечения процесса $e\vec{p}\to e\vec{p}$ в ДСБ в ПСО имеем

$$\frac{d\sigma_{\delta_1,\delta_2}}{d|t|}=\frac{\pi\alpha^2}{4I^2(1+\tau_p)}\left(\omega_+G_E^2Y_1+\omega_-\tau_pG_M^2Y_2\right)\frac{1}{q^4}. \quad (46)$$

Полагая в формуле (46) $\delta_2=0$ и удваивая результат, получаем выражение для сечения процесса

$ep \to ep$ в ПСО для случая, когда все участвующие в процессе частицы являются неполяризованными:

$$\frac{d\sigma}{d|t|} = \frac{\pi\alpha^2}{4I^2\,(1+\tau_p)}\,(\,G_E^2\,Y_1 + \tau_p\,G_M^2\,Y_2\,)\,\frac{1}{q^4}. \quad (47)$$

Это выражение совпадает с формулой (34.3.3) в [37].

Полученные выражения для Y_1 и Y_2 удобно выразить через переменные Мандельштама:

$$s = (p_1+q_1)^2,\ t = (q_2-q_1)^2,\ u = (q_2-p_1)^2.$$

Обращая связь, получим:

$$p_+q_+ = s-u,\ q_+^2 = 4M^2 - t,\ q_-^2 = t,\ \tau_p = -t/4M^2,$$

откуда имеем

$$Y_1 = (s-u)^2 + (4M^2 - t)\,t, \quad (48)$$

$$Y_2 = (s-u)^2 - (4M^2-t)(t+4m^2). \quad (49)$$

Выражение $4I^2$ в (35) в терминах s,t,u имеет вид:

$$4I^2 = (s-(M+m)^2)(s-(M-m)^2) = \lambda(s,m^2,M^2),$$

где $\lambda(s,m^2,M^2)$ – функция Челлена.

Сечение (47), выраженное через s,t,u, совпадает с формулой (139.4) в [38].

Ведем обозначения для величин Y_3 и Y_4, которые потребуются ниже в случае ДФО:

$$Y_3 = (p_+q_+)^2 + q_+^2(q_-^2 - 4m^2), \quad (50)$$

$$Y_4 = (p_+q_+)^2 + q_+^2(q_-^2 + 4m^2), \quad (51)$$

а также для переменных ε_1, ε_2, имеющих отношение к поляризации виртуального фотона

$$\varepsilon = \frac{Y_1}{Y_2},\ \varepsilon_1 = \frac{Y_3}{Y_2},\ \varepsilon_2 = \frac{Y_4}{Y_2}. \quad (52)$$

В случае, когда $m^2 \to 0$, имеем:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{(p_+q_+)^2 + q_+^2 q_-^2}{(p_+q_+)^2 - q_+^2 q_-^2}, \quad (53)$$

откуда нетрудно получить выражение для степени линейной поляризации виртуального фотона ε в ЛСО, которая была определена на первой странице.

МЭ протонного тока в ДФП. МЭ протонного тока в приближении ДФО имеют вид:

$$(J_p)_\mu^{2\gamma} = \overline{u}(q_2)\Gamma_\mu^{2\gamma}(q^2)u(q_1), \quad (54)$$

где для $\Gamma_\mu^{2\gamma}(q^2)$ будем использовать два эквивалентных представления [16–22]

$$\Gamma_\mu^{2\gamma}(q^2) = H_1\gamma_\mu + \frac{H_2}{4M}(\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{q}) + \frac{\hat{p}_+(q_+)_\mu}{4M^2}H_3, \quad (55)$$

$$\Gamma_\mu^{2\gamma}(q^2) = H_M\gamma_\mu - \frac{(q_+)_\mu}{2M}\,H_2 + \frac{\hat{p}_+(q_+)_\mu}{4M^2}\,H_3. \quad (56)$$

Здесь для комплексных ФФП использованы обозначения H_M, H_1 H_2 и H_3 для того, чтобы иметь прямую связь со стандартными ФФП G_M, F_1 и F_2 в борновском приближении:

$$H_1^{1\gamma} = F_1, H_2^{1\gamma} = F_2, H_M^{1\gamma} = G_M, H_3^{1\gamma} = 0. \quad (57)$$

МЭ протонного тока (54), вычисленные с использованием формул (15), (21), (22), (55), имеют вид:

$$(J_p^{\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = 2M\Big(H_1 - \tau_p H_2 + \nu H_3\Big)(b_0)_\mu, \quad (58)$$

$$(J_p^{-\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = -2\delta M\sqrt{\tau_p}\,\times$$
$$\times\Big((H_1+H_2)(b_\delta)_\mu + \frac{p_+b_\delta}{4M^2}H_3(q_+)_\mu\Big). \quad (59)$$

МЭ протонного тока (54), вычисленные с использование формул (15), (21), (22), (56), имеют вид:

$$(J_p^{\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = 2M\Big(H_M - \tau_1 H_2 + \nu H_3\Big)(b_0)_\mu, \quad (60)$$

$$(J_p^{-\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = -2\delta M\sqrt{\tau_p}\Big(H_M(b_\delta)_\mu + \frac{p_+b_\delta}{4M^2}H_3(q_+)_\mu\Big), \quad (61)$$

где

$$\tau_1 = \frac{q_+^2}{4M^2} = 1+\tau_p, \tau_p = \frac{Q^2}{4M^2}, \nu = \frac{p_+q_+}{4M^2} = \frac{s-u}{4M^2}.$$

Сравнивая МЭ протонного тока (58) и (60), получаем выражение для “обобщенного” электрического формфактора $\mathcal{G}_E$, введенного в [19–21]:

$$\mathcal{G}_E \equiv H_E + \nu H_3, \quad (62)$$

$$H_E \equiv H_1 - \tau_p H_2 = H_M - \tau_1 H_2, \quad (63)$$

$$H_M \equiv H_1 + H_2. \quad (64)$$

При этом формфакторы H_E и H_M естественным образом переходит в G_E и G_M в случае ОФО:

$$H_E^{1\gamma} = H_1^{1\gamma} - \tau_p H_2^{1\gamma} = H_M^{1\gamma} - \tau_1 H_2^{1\gamma} =$$
$$= F_1 - \tau_p F_2 = G_M - (1+\tau_p)F_2 = G_E.$$

В результате МЭ (58) и (60) можно переписать в следующем виде

$$(J_p^{\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = 2M\mathcal{G}_E(b_0)_\mu. \quad (65)$$

Это выражение аналогично (36) в ОФП, и поэтому $\mathcal{G}_E$ имеет все основания называться обобщенным электрическим ФФП. В случае ДФО роль обобщенного магнитного ФФС выполняет $\mathcal{G}_M$ [19, 20]:

$$\mathcal{G}_M = H_M + \varepsilon\nu H_3 = H_1 + H_2 + \varepsilon\nu H_3. \quad (66)$$

В терминах $\mathcal{G}_M$ выражение (61) принимает вид:

$$(J_p^{-\delta,\delta})_\mu^{2\gamma} = -2\delta M\sqrt{\tau_p}\,\times$$
$$\times\Big((\mathcal{G}_M - \varepsilon\nu H_3)(b_\delta)_\mu + \frac{p_+ b_\delta}{4M^2}H_3(q_+)_\mu\Big). \quad (67)$$

Отметим, что для МЭ (61), (67) характерно наличие множителя $\sqrt{\tau_p}$, который обеспечивает доминирующий вклад в сечение процесса переходов протона с переворотом спина при $\tau_p \gg 1$; в ОФП они переходят в (37).

Сечение процесса $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в ДФП. Квадраты модулей амплитуд $|T^{\pm\delta,\delta}|^2$ (31), рассчитанные по общей формуле (39) в ПСО с учетом массы электронов с помощью МЭ (65), (67) в ДФП в случае неполяризованных электронов имеют вид:

$$|T^{+\delta,\delta}|^2 = \frac{|\mathcal{G}_E|^2}{(1+\tau_p)}Y_1, \quad (68)$$

$$|T^{-\delta,\delta}|^2 = \frac{\tau_p Y_2}{(1+\tau_p)}\Big(|\mathcal{G}_M|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\tau_p(1+\tau_p)|H_3|^2\Big). \quad (69)$$

В случае, когда массой электрона можно пренебречь, справедливы соотношения:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\nu^2 - \tau_p(1+\tau_p)}{\nu^2 + \tau_p(1+\tau_p)}. \quad (70)$$

В результате для выражения (69) при $m^2 = 0$ имеем

$$|T^{-\delta,\delta}|^2 = \frac{\tau_p Y_2}{(1+\tau_p)}\left(|\mathcal{G}_M|^2 + \varepsilon^2\,\tau_p(1+\tau_p)\,|H_3|^2\right). \quad (71)$$

Приведем полезное соотношение между ε, ν и τ_p

$$\nu^2 = \tau_p(1+\tau_p)\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad (72)$$

которое позволяет привести член, содержащий $|H_3|^2$ в (71) к виду, полученному в [20]

$$|T^{-\delta,\delta}|^2 = \frac{\tau_p Y_2}{(1+\tau_p)}\left(|\mathcal{G}_M|^2 + \varepsilon^2\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,|\nu H_3|^2\right). \quad (73)$$

Поскольку вклад амплитуды $|H_3|$ исчезает в борновском приближении и является малым порядка $O(\alpha)$, то последними членами в (69), (71) можно пренебречь. В результате для сечения в ДФП имеем выражение, аналогичное (46), в котором ФФС G_E и G_M заменяются на обобщенные формфакторы $\mathcal{G}_E$ и $\mathcal{G}_M$

$$\frac{d\sigma_{\delta_1,\delta_2}}{d|t|} =$$
$$= \frac{\pi\alpha^2}{4I^2(1+\tau_p)}\left(\omega_+|\mathcal{G}_E|^2 Y_1 + \omega_-\tau_p|\mathcal{G}_M|^2 Y_2\right)\frac{1}{q^4}. \quad (74)$$

В системе покоя начального протона имеем:

$$\frac{d\sigma_{\delta_1,\delta_2}}{d\Omega_e} = \omega_+\sigma^{\uparrow\uparrow} + \omega_-\sigma^{\downarrow\uparrow}, \quad (75)$$

$$\sigma^{\uparrow\uparrow} = \sigma_M\,|\mathcal{G}_E|^2, \;\; \sigma^{\downarrow\uparrow} = \sigma_M\frac{\tau_p}{\varepsilon}\,|\mathcal{G}_M|^2, \quad (76)$$

где

$$\sigma_M = \frac{\alpha^2 E_2\cos^2(\theta_e/2)}{4E_1^3\sin^4(\theta_e/2)}\frac{1}{1+\tau_p}. \quad (77)$$

В формуле (75) δ_1 и δ_2, входящие в $\omega_\pm$, являются удвоенными значениями проекций спина начального и конечного протонов на общую ось спиновых проекций **c** (8), при этом $-1 \leqslant \delta_{1,2} \leqslant 1$. Из выражения (75) следует, что если рассеяние электрона на протоне происходит без переворота спина протона ($\delta_1 = 1, \delta_2 = 1$), то вклад в сечение дает только слагаемое, содержащее $|\mathcal{G}_E|^2$, поскольку поляризационные множители ω_+ и ω_- при $|\mathcal{G}_E|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$ равны единице ($\omega_+ = 1$) и нулю ($\omega_- = 0$). Если рассеяние происходит с переворотом спина протона ($\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$), то вклад в сечение дает только слагаемое, содержащее $|\mathcal{G}_M|^2$, поскольку поляризационные множители ω_+ и ω_- при $|\mathcal{G}_E|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$ равны нулю ($\omega_+ = 0$) и единице ($\omega_- = 1$).

В случае неполяризованных электронов и протонов из выражения (75) получаем сечение Розенблюта в ДФП, обозначаемое $\sigma_R = d\sigma/d\Omega_e$:

$$\sigma_R = \sigma^{\uparrow\uparrow} + \sigma^{\downarrow\uparrow}. \quad (78)$$

Следовательно, физический смысл разбиения формулы (78) на сумму двух слагаемых, содержащих только $|\mathcal{G}_E|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$, заключается в том, что оно является суммой сечений без переворота и с переворотом спина протона в случае, когда начальный покоящийся протон полностью поляризован вдоль направления движения конечного протона.

Заключение. В работе проведен расчет дифференциального сечения процесса упругого рассеяния электрона на протоне $e\vec{p} \to e\vec{p}$ в произвольной системе отсчета с учетом вклада ДФО и массы электронов в рамках феноменологического описания электромагнитных взаимодействий электрона с протоном в случае, когда начальный и конечный протоны поляризованы и имеют общую ось спиновых проекций. Полученное выражение для сечения процесса в ЛСО (75) может быть использовано для измерения квадратов модулей обобщенных ФФС $|\mathcal{G}_M|^2$ и $|\mathcal{G}_M|^2$ в процессах без переворота и с переворотом спина протона в случае, когда начальный покоящийся протон полностью поляризован вдоль направления движения конечного протона.

Авторы выражают благодарность В. С. Фадину за полезные обсуждения результатов работы. Участие в работе Р. Е. Герасимова поддержано грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 19-02-00690.

---

1. M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. **79**, 615 (1950).
2. R. Hofstadter, F. Bumiller, and M. Yearian, Rev. Mod. Phys. **30**, 482 (1958).
3. N. Dombey, Rev. Mod. Phys. **41**, 236 (1969).
4. А. И. Ахиезер, М. П. Рекало, ЭЧАЯ **4**, 662 (1973).
5. А. И. Ахиезер, М. П. Рекало, *Электродинамика адронов*, Наукова думка, Киев (1977), 497 с.
6. М. В. Галынский, М. И. Левчук, ЯФ **60**(11), 2028 (1997).
7. M. K. Jones, K. A. Aniol, F. T. Baker et al. (The Jefferson Lab Hall A Collaboration), Phys. Rev. Lett. **84**, 1398 (2000).
8. O. Gayou, K. Wijesooriya, A. Afanasev et al. (The Jefferson Lab Hall A Collaboration), Phys. Rev. C **64**, 038202 (2001).
9. O. Gayou, E. J. Brash, M. K. Jones et al. (The Jefferson Lab Hall A Collaboration), Phys. Rev. Lett. **88**, 092301 (2002).
10. V. Punjabi, C. F. Perdrisat, K. A. Aniol et al. (The Jefferson Lab Hall A Collaboration), Phys. Rev. C **71**, 055202 (2005).
11. A. Puckett, J. Brash, O. Gayou et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **104**, 242301 (2010).
12. A. J. R. Puckett, E. J. Brash, O. Gayou et al. (The Jefferson Lab Hall A Collaboration), Phys. Rev. C **85**, 045203 (2012).
13. I. A. Qattan, J. Arrington, R. E. Segel et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **94**, 142301 (2005).
14. C. F. Perdrisat, V. Punjabi, and M. Vanderhaeghen, Prog. Part. Nucl. Phys. **59**, 694 (2007).
15. S. Pacetti, R. Baldini Ferroli, and E. Tomasi-Gustafsson, Phys. Rept. **550–551**, 1 (2015).
16. P. A. M. Guichon and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. Lett. **91**, 142303 (2003).
17. A. V. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson, Y.-Ch. Chen, and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D. **72**, 013008 (2005).
18. J. Arrington, W. Melnitchouk, and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **76**, 035205 (2007).
19. D. Borisyuk and A. Kobushkin, Phys. Rev. C **75**, 038202 (2007).
20. D. Borisyuk and A. Kobushkin, Phys. Rev. C **78**, 025208 (2008).
21. D. Borisyuk and A. Kobushkin, Phys. Rev. D **83**, 057501 (2011).
22. N. Kivel and M. Vanderhaeghen, JHEP **04**, 029 (2013).
23. M. Meziane, J. Brash, R. Gilman et al. (GEp2γ Collaboration), Phys. Rev. Lett. **106**, 132501 (2011).
24. A. J. R. Puckett, E. J. Brash, M. K. Jones et al. (Collaboration), Phys. Rev. C **96**, 055203 (2017).
25. C. E. Carlson and M. Vanderhaeghen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 171 (2007).
26. J. Arrington, P. G. Blunden, and W. Melnitchouk, Prog. Part. Nucl. Phys. **66**, 782 (2011).
27. I. A. Rachek, J. Arrington, V. F. Dmitriev et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **114**, 062005 (2015).
28. D. Adikaram, D. Rimal, L. B. Weinstein, et al. (CLAS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **114**, 062003 (2015).
29. B. S. Henderson, L. D. Ice, D. Khaneft et al. (OLYMPUS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **118**, 092501 (2017).
30. М. В. Галынский, Письма в ЖЭТФ **109**(1), 3 (2019).
31. С. М. Сикач, Весцi АН БССР, Сер. фiз.-мат. навук **2**, 84 (1984).
32. Ф. И. Федоров, ТМФ **2**(3), 343 (1970).
33. Ф. И. Федоров, *Группа Лоренца*, Наука, М. (1979), 384 с.
34. М. В. Галынский, Л. Ф. Жирков, С. М. Сикач, Ф. И. Федоров, ЖЭТФ **95**, 1921 (1989).
35. М. В. Галынский, С. М. Сикач, ЭЧАЯ **29** (5), 1133 (1998).
36. C. Lorcé, Phys. Rev. D **97**, 016005 (2018).
37. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1969), 624 с.
38. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989), 724 с.