*Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 6, стр. 305 – 308* *25 марта 1989 г.*

# БОЗОНИЗАЦИЯ И МНОГОПЕТЛЕВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ВЕССА – ЗУМИНО – ВИТТЕНА

*А.Морозов*

Рассматривается представление алгебры Каца – Муди в терминах свободных полей.

1. Для нахождения многопетлевых корреляторов в двумерной конформной теории необходимо выразить их через корреляторы каких-то **свободных** полей на римановой поверхности. Несколько условно такую процедуру будем называть бозонизацией [1)]. Пока что бозонизация изучается в основном в случае минимальных моделей, которые сводятся к теории свободных скалярных полей со значениями в окружности [2, 3]. Для перехода к конформным теориям общего вида полезно рассмотреть модель Весса – Зумино – Виттена (ВЗВ) [4, 5], так как, по-видимому, все нетривиальные конформные теории могут быть получены из нее с помощью ГКО-проекции (Годдарда–Кента–Олива) [6].

2. Для простоты начнем со случая модели ВЗВ, связанной с алгеброй Каца–Муди $SU(2)_k$. Тогда токи могут быть записаны через три свободных поля $\chi$, $W$, $\phi$, причем $\chi$ и $W$ – бозонные 0- и 1-дифференциалы, а $\phi$ – скалярное поле со значениями в окружности [7]:

$$\begin{aligned} J_+ &= W \\ H &= 2\chi W + \sqrt{2}q\,\partial\phi \\ J_- &= \chi^2 W + \sqrt{2}q\chi\partial\phi + (2-q^2)\partial\chi \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Операторные разложения выглядят следующим образом: $W(z)\chi(0) = +1/z + \ldots$, $\phi(z)\phi(0) = + \log z + \ldots$; $J_\pm(z)H(0) = \pm 2J_\pm/z + \ldots$, $J_+(z)J_-(0) = -k/z^2 + H/z + \ldots$, $H(z)H(0) = +2k/z^2 + \ldots$ Центральный заряд алгебры Каца–Муди равен $k = -2 + q^2$, а тензор энергии-импульса

$$T = \frac{1}{2(k+2)} : J_+J_- + J_-J_+ - \frac{1}{2}H^2 := -W\partial\chi - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2q}\partial^2\phi \,. \tag{2}$$

Центральный заряд $c = \dfrac{3k}{k+2} = 3 - \dfrac{6}{q^2}$, причем $c_{W\chi} = +2$, а $c_\phi = 1 - \dfrac{6}{q^2}$.

---

1) Отметим, что в литературе этот термин иногда используется в более общем смысле – при перезаписи теории через бозонные поля, которые не являются свободными (тензор энергии-импульса не квадратичен) см., например, [1]. Такая формулировка, однако, не позволяет непосредственно вычислять корреляторы.

Радиус окружности, в которой принимает значения $\phi$, пропорционален $q$. При целых $q^2$ модель является рациональной конформной теорией и может быть задана с помощью действия

$$k\mathrm{Tr}[\int_{d^2\xi} |g^{-1}\partial g|^2 + \int_{d^3\xi} (g^{-1}dg)^3]. \tag{3}$$

Корреляторы в этой теории строятся из произведений корреляторов свободных полей $\phi$ и $W\chi$. Корреляторы полей $\phi$ на поверхности любого рода описаны, например, в [3, 8]. Они выражаются через бидифференциалы Прима и тета-функции $\Theta_{k+2}$ уровня $k+2$ (т. е. с матрицей периодов, умноженной на $2(k+2)$). Мы опускаем здесь эти известные формулы.

Корреляторы бозонных полей $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(1-j)}$ со спинами $j$ и $1$-$j$ и с тензором энергии-импульса $T_{\beta\gamma} = -j\beta\partial\gamma + (j-1)\gamma\partial\beta$ менее тривиальны, чем корреляторы для грассмановых $b, c$ -систем [8, 9]. Они устроены следующим образом [10]. Прежде всего, бозонные поля $\beta, \gamma$ могут быть представлены локально как произведения [11] $\beta^{(j)} = \partial\xi^{(0)}e^{-u}$; $\gamma^{(1-j)} = \eta^{(1)}e^{+u}$, где $u$ — бозонное поле со значениями в окружности, а $\xi, \eta$ — антикоммутирующие поля со спинами 0 и 1; $T_{\xi\eta} = \eta\partial\xi$; $T_u = -\frac{1}{2}(\partial u)^2 - (2j-1)\partial^2 u$. Тогда [10]

$$\langle \xi(x_0)\ldots\xi(x_n)\eta(y_1)\ldots\eta(y_n)e^{a_1 u(z_1)}\ldots e^{a_m u(z_m)}\rangle(\det\bar{\partial}_0)^{-1/2} \sim$$

$$\sim \frac{\prod_{i<j} E(x_i, x_j) \prod_{i<j} E(y_i, y_j)\delta(\Sigma a - (2j-1)(p-1))}{\Pi E(x_i, y_j) \prod_{k<l} E(z_k, z_l)^{a_k a_l}\Pi\sigma(z_k)^{(2j-1)a_k}} \times$$
$$\times \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta(-y_i + \Sigma x - \Sigma y + \Sigma az - (2j-1)\Delta_*)}{\prod_{i=0}^{n} \theta(-x_i + \Sigma x - \Sigma y + \Sigma az - (2j-1)\Delta_*)} \tag{4}$$

($E(x, y)$ — бидифференциал Прима, $\sigma(z)$ — сечение тривиального расслоения, $\theta$ — обычная тета-функция на римановой поверхности; подробнее см. в [10]. В нашем случае $j = 1$ и $\beta^{(1)} = W$, $\gamma^{(0)} = \chi$.

Эти формулы доставляют исходный материал для построения конформных блоков в модели ВЗВ $SU(2)_k$. Сами конформные блоки являются определенными линейными комбинациями описанных корреляторов ( причем в число линейных комбинаций входят интегралы по нестягиваемым контурам от операторов единичной размерности, в случае рода 0 эти интегралы сводятся к обобщенным гипергеометрическим функциям подробнее см. [2, 3].

3. Описанная конструкция легко обобщается на случай модели ВЗВ с произвольной алгеброй $G$ или ее ГКО-проекции. Исходным для построения бозонизации вида (1) является представление группы $G$ в алгебре векторных полей на пространстве $G/H$. При этом $\chi_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} G/H$) являются координатами на $G/H$, а $W_\alpha \sim \partial/\partial\chi_\alpha$. Чтобы получить (1) надо разрешить $W_\alpha$ и $\chi_\alpha$ зависеть от $z, \bar{z}$ и построить центральное расширение.

Самой модели ВЗВ с центральным зарядом $c = \frac{kD}{k+C_v} = D(1 - \frac{C_v}{k+C_v})$ отвечает выбор однородного пространства $G/H$ размерности $D-r$ ($D$ и $r$ — размерность и ранг алгебры $G$). Тогда независимые свободные поля $\chi_\alpha$, $W_\alpha$ (по-прежнему являющиеся бозонными 0- и 1-дифференциалами) сопоставляются положительным корням алгебры Ли $G$, $\alpha \in \Sigma_+$, а скалярные поля $\phi_i(i = 1, \ldots, r)$ со значениями в окружностях — картановским генераторам. Ток, отвечающий картановскому вектору $\vec{\mu}$, имеет простой вид:

$$H_\mu = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \langle \mu, \alpha \rangle \chi_\alpha W_\alpha + q \vec{\mu} \partial \vec{\phi}. \tag{5}$$

Центральный заряд алгебры равен поэтому

$$k = - C_v + q^2. \tag{6}$$

$\left( \langle \mu, \nu \rangle C_v \equiv \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \langle \mu, \alpha \rangle \langle \alpha, \nu \rangle \right)$, а тензор энергии–импульса полей $\chi_\alpha$, $W_\alpha$ и $\phi_i$ имеет вид:

$$T = \frac{1}{2(k + C_v)} : \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \left( J_\alpha J_{-\alpha} + J_{-\alpha} J_\alpha - \frac{1}{C_v} H_\alpha H_\alpha \right) : = - \sum_{\alpha \in \Sigma_+} W_\alpha \partial \chi_\alpha - \frac{1}{2} (\partial \vec{\phi})^2 -$$

$$- \frac{1}{2q} \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \vec{\alpha}\, \partial^2 \vec{\phi}\ . \tag{7}$$

Центральный заряд $c = D - \dfrac{DC_v}{k + C_v}$ складывается из $c_{W_\alpha, \chi_\alpha} = +2$, из $c_{\vec{\phi}} = +1$ для всех $\vec{\phi}$, ортогональных к вектору $\vec{\rho} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \vec{\alpha}$, и из центрального заряда поля $\vec{\phi}_A$, коллинеарного этому вектору, который равен $1 - \dfrac{12 \vec{\rho}^{\,2}}{q^2} = 1 - \dfrac{DC_v}{k + C_v}$. 1-петлевые характеры $\chi \sim \eta(q)^D (\theta_{k + C_v})^r \theta^{D - r}$.

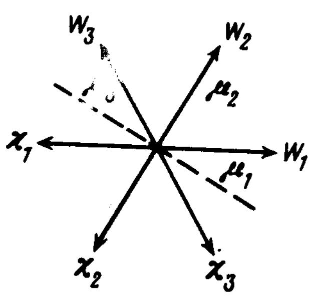


Диаграмма корней алгебры $SU(3)$

Остальные токи, являющиеся генераторами Каца–Муди, $j_{\pm\alpha}$ для $\alpha \in \Sigma_+$, выглядят довольно громоздко. Например, в случае $SU(3)_k$ (см. рис.):

$$J_1 = W_1 - a\chi_3 W_2 \tag{8}$$

$$J_2 = W_2$$

$$J_3 = W_3 + b\chi_1 W_3$$

$$J_{-1} = \chi_1^2 W_1 + b\chi_1\chi_2 W_2 - b\chi_1\chi_3 W_3 + \chi_2 W_3 + ab\chi_1^2 \chi_3 W_2 + (2 + b - q^2)\partial\chi_1 + \\ + q\chi_1 \vec{\alpha}_1 \partial\vec{\phi}$$

$$J_{-2} = \chi_1\chi_2 W_1 + \chi_2^2 W_2 + \chi_2\chi_3 W_3 + a\chi_1^2\chi_3 W_1 - b\chi_1\chi_3^2 W_3 + ab\chi_1^2\chi_3^2 W_2 + \\ + (3 - q^2)\partial\chi_2 + q\chi_2\vec{\alpha}_2\partial\vec{\phi} + a(2 - q^2)\chi_3\partial\chi_1 - b(2 - q^2)\chi_1\partial\chi_3 + q\chi_1\chi_3(a\vec{\alpha}_1 - b\vec{\alpha}_3)\partial\vec{\phi}$$

$$J_{-3} = -a\chi_1\chi_3 W_1 + a\chi_2\chi_3 W_2 + \chi_3^2 W_3 - \chi_2 W_1 - ab\chi_1\chi_3^2 W_2 + (2 + a - q^2)\partial\chi_3 + q\chi_3\vec{\alpha}_3\partial\vec{\phi}$$

$$H_1 = 2\chi_1 W_1 + \chi_2 W_2 - \chi_3 W_3 + q\vec{\alpha}_1 \partial\vec{\phi}$$

$$H_2 = \chi_1 W_1 + 2\chi_2 W_2 + \chi_3 W_3 + q\vec{\alpha}_2 \partial\vec{\phi}$$

$$H_3 = -\chi_1 W_1 + \chi_2 W_2 + 2\chi_3 W_3 + q\vec{\alpha}_3 \partial\vec{\phi};$$

$$J_{\vec{\alpha}}(z)J_{\vec{\beta}}(0) = N_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\, J_{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}/z + \ldots \quad \text{при} \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}\in\Sigma \ (N_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \pm 1),$$

$$J_\alpha(z)H_\beta(0) = \langle\alpha,\beta\rangle J_\alpha/z + \ldots,$$

$$J_\alpha(z)J_{-\alpha}(0) = -k/z^2 + H_\alpha/z + \ldots, \quad H_\alpha(z)H_\beta(0) = +\langle\alpha,\beta\rangle k/z^2 + 0(1);$$

$$T = -W_1\partial\chi_1 - W_2\partial\chi_2 - W_3\partial\chi_3 - \frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 - \frac{\sqrt{2}}{q}\partial^2\phi_2 . \qquad (9)$$

Центральные заряды: $k = -3+q^2$, $c = \dfrac{8k}{k+3} = 8 - \dfrac{24}{q^2}$. Векторы $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ направлены вдоль трех положительных корней и имеют одинаковую длину $\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \sqrt{2}$. Параметры $a$ и $b$ связаны соотношением

$$a + b = 1, \qquad (10)$$

конкретный выбор $a$ несуществен (представление (8) несколько упрощается, если выбрать $a = 0$, $b = 1$). Формулы (8) отвечают пространству $G/H = SU(3)/U(1)\times U(1)$. Другие выборы $G/H$ связаны с ГКО-проекциями $SU(3)$-модели; при этом число полей $\chi_\alpha$, $W_\alpha$ очевидным образом уменьшается.

Все поля $\chi_\alpha$, $W_\alpha$ и $\phi_i$ свободные и независимые; их корреляторы, необходимые для построения конформных блоков, описаны в п. 2. Отметим, однако, что как и в случае минимальных моделей, отбор правильных линейных комбинаций не вполне тривиален (это относится даже к случаю свободной теории $SU(2)_{k=1}$).

Автор признателен за обсуждения А.Герасимову, В.Доценко, А.Маршакову, А.Миронову, Г.Муру, А.Рослому, В.Фатееву, В.Фоку, С.Шаташвили, А.Шварцу.

### Литература

1. *Li K., Warner N.* Preprint CERN-TH 5047/88; *Griffin P.,Nemeschansky D.* Preprint SLAC-PUB-4666/88; *Kiritsis E.* Preprint CALT, 1988.
2. *Dotzenko V., Fateev V.* Nucl. Phys. B, 1984, **240**, 312. *Jayaraman T., Narain K.* Preprint CERN-TH 5166/88; *Felder G.* Preprint Zurich, 1988.
3. *Gerasimov A. et al.* Preprint ITEP-139/88.
4. *Witten E.* Comm. Math. Phys.,1984, **92**, 455.
5. *Knizhnik V., Zamolodchikov A.* Nucl. Phys. B, 1984, **247**, 83.
6. *Goddard P., Kent A., Olive D.* Phys. Lett. B, 1985, **152**, 88; *Moore G., Seiberg N.* Preprint IASSNS, 1989.
7. *Dotzenko V., Fateev V.* Preprint ITP, 1988; *Alekseev A., Shatashvili S.* Preprint LOMI E-16-88.
8. *Alvarez-Gaume L., Bost J., Moore G. et al.* Comm. Math. Phys.,1987, **112**, 503.
9. *Knizhnik V.* Phys. Lett. B, 1986, **180**, 247.
10. *Verlinde E., Verlinde H.* Phys. Lett. B, 1987, **192**, 95; *Atick J., Sen A.* Preprint SLAC-PUB-4292/88; *Semikhatov A.* Preprint FIAN, 1989; *Morozov A.* Nucl. Phys. B, 1988, **303**, 343.
11. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Nucl. Phys. B, 1986, **271**. 93.

**Институт теоретической и экспериментальной физики**

**Поступила в редакцию 3 февраля 1989 г.**