

О взаимодействии локализованных решений нелинейного уравнения Клейна–Гордона с переменной массой

Р. К. Салимов⁺¹⁾, Е. Г. Екомасов^{+*×}

⁺ Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

^{*} Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень, Россия

[×] Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск, Россия

Поступила в редакцию 7 декабря 2019 г.

После переработки 20 декабря 2019 г.

Принята к публикации 20 декабря 2019 г.

Исследовалась система из материальных частиц и поля, описываемого нелинейным уравнением Клейна–Гордона. Рассматривалось модифицированное уравнение Клейна–Гордона, сохраняющее решения уравнения Клейна–Гордона с нулевой и ненулевой массами. Частицы создают неоднородности поля и взаимодействуют с ним. Показано, что в данной модели возможны осциллирующие устойчивые локализованные решения. Осциллирующие локализованные решения в данной системе порождают бегущие волны, приводящие к взаимодействию этих решений на больших расстояниях.

DOI: 10.31857/S0370274X20030133

Пространственно локализованные решения нелинейных полей широко используются в современной физике, например, в нелинейной оптике [1, 2], физике конденсированных сред [3], физике частиц и космологии [4, 5]. Свойства некоторых из таких пространственно локализованных уединенных волн позволяют рассматривать их как классические частицеподобные объекты. Примером такого подхода являются скирмионы [6] или кинки уравнения синус-Гордон [7], т.е. топологические стационарные солитоны. В современной нелинейной волновой теории также большое внимание уделяется нахождению локализованных и периодических по времени решений [8–13]. В данной работе предлагается объединение этих подходов.

Одним из свойств солитонов в строгом смысле является сохранение формы при движении и взаимодействии с другими солитонами. При этом область заметного взаимодействия солитонов определяется пространственной областью, в которой солитонное решение отлично от вакуумного решения. Например, для кинков уравнения синус-Гордон эта область стремится к вакуумному решению экспоненциально. Для более полной аналогии между взаимодействующими на больших расстояниях частицами и солитонами интересно рассмотреть модель, в которой кроме частицеподобных локализованных полевых решений существовали бы и дру-

гие решения – переносчики взаимодействия. Для этого предлагается рассмотреть систему из взаимодействующих подвижных неоднородностей уравнений Клейна–Гордона с переменной массой вида

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = F(u)G(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2). \quad (1)$$

Такие уравнения уже рассматривались ранее авторами [13] и интересны тем, что при условии $G(0) = 0$ содержат два типа решений. Для плоских волн $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2 = 0$ они совпадают с уравнением Клейна–Гордона с нулевой массой, а для случая $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2 \neq 0$ их можно интерпретировать как уравнение Клейна–Гордона с ненулевой массой. Хотя уравнение (1) не допускает лагранжева формализма, его можно приблизить к лагранжевым системам выбором функций F и G . Действительно, взяв в качестве функции $G(\eta)$, например функцию вида $\tanh(\eta^2)$, при решениях, достаточно сильно отличающихся от плоских волн, получим для линейной функции $F(u)$ уравнение Клейна–Гордона с ненулевой постоянной массой. При этом для каждого типа решений можно приближенно построить свою функцию Лагранжа или Гамильтона.

Далее для простоты рассмотрим одномерный случай. Для получения частицеподобных решений в уравнение (1) внесем слагаемое вида подвижной прямоугольной притягивающей неоднородности

$$u_{xx} - u_{tt} = F(u)G(u_x^2 - u_t^2) - f(x, x_{\text{def}}) \sin(u), \quad (2)$$

¹⁾e-mail: salemsrkk@yandex.ru

здесь x_{def} – координаты центра подвижной неоднородности.

Зададим также уравнение движения для подвижной неоднородности

$$m(x_{\text{def}})_{tt} = -2 \int \frac{\partial f}{\partial x_{\text{def}}} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) dx. \quad (3)$$

Взаимодействие поля и подвижной неоднородности здесь аналогично рассматриваемому ранее взаимодействию [14]. В данном случае релятивистскими эффектами изменения потенциала взаимодействия, которые вызывали нестабильность подвижной неоднородности в модели [14], пренебрегаем. Но в данной модели также возникает решение для поля, которое будет вызывать в общем случае нестабильность неоднородности. Для случая, когда функция $G(\eta) = \text{const}$, для притягивающей неоднородности f прямоугольного вида численно можно получить локализованное решение для поля u , стремящееся со временем к стационарному. Асимптотическая устойчивость локализованного решения при $G(\eta) = \text{const}$ вызвана существованием гамильтонова формализма. Поэтому естественно предположить, что при отсутствии гамильтонова формализма и минимума энергии, т.е. при $G(\eta) \neq \text{const}$, также не будет и стремления локализованного решения к положению равновесия. Таким образом, в такой системе будут возможны некие колебания локализованных решений. Эти колебания будут в свою очередь вызывать появление бегущих волн, которые можно интерпретировать как переносчики взаимодействия.

Для проверки приведенных выше предположений численно решалась система уравнений вида (2)–(3), здесь θ – функция Хэвисайда и остальные функции имеют вид

$$F(u) = u + u^3 + \alpha u^{\frac{1}{n}}, \quad (4)$$

$$G(u_x^2 - u_t^2) = \tanh(\gamma(u_x^2 - u_t^2)^2), \quad (5)$$

$$f(x, x_{\text{def}}) = \lambda(\theta(x - x_{\text{def}} + l) - \theta(x - x_{\text{def}} - l)). \quad (6)$$

Вид функции $G(\eta)$ выбирался таким образом, чтобы она отличалась от константы в малом диапазоне значений η . При этом предполагалось, что и решение для поля в этом случае будет аналогичным решению при $G = \text{const}$. Нелинейные члены в (4) были выбраны для изучения влияния разного рода нелинейностей на бегущие волны. Прямоугольная неоднородность поля $f(x, x_{\text{def}})$ для существования локализованных решений должна быть достаточно протяженной и глубокой. Локализованные решения наблюдались в диапазоне параметров $\gamma = 100 - 5000$, $\lambda = 10 - 30$, $l = 1$.

Использовалась численная схема Абловица, Крускала, Лейдика [15] для уравнения (2) и алгоритм Верле для уравнения движения неоднородности. Вначале проверялось предположение о существовании осциллирующих решений и отсутствии асимптотически устойчивых решений. Результаты численных экспериментов показывают, что колебания не затухают в течение всего длительного времени наблюдения ($t = 600 - 800$).

При этом расходящиеся колебания периодически подавлялись на периферии локализованного решения. Для этого решение u и его производная по времени u_t при превышении некоторого расстояния от центра неоднородности (равного 6) умножались на экспоненциально затухающую с расстоянием функцию. На рисунке 1 видно, что, несмотря на подав-

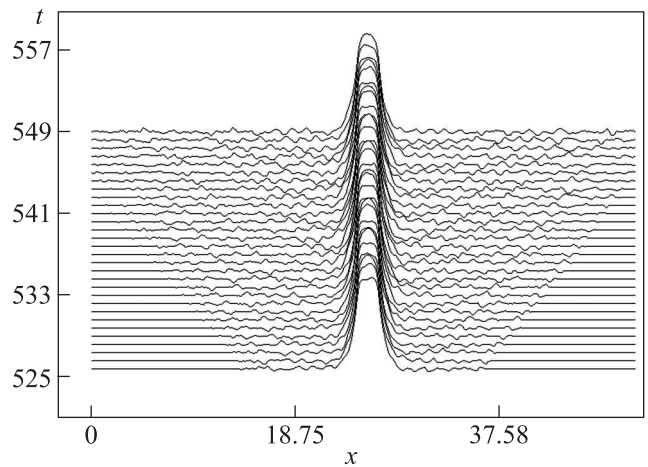


Рис. 1. Линии уровня функции u на больших временах

ление волн на периферии локализованного решения, источником волн является его центральная область. Представлен случай поведения решения при значениях параметров $\lambda = 20$, $\gamma = 2000$, $m = 50$, $\alpha = 0.5$, $n = 11$, $l = 1$.

Далее исследовалось взаимодействие на расстоянии двух таких решений. Решалась система вида

$$u_{xx} - u_{tt} = F(u)G(u_x^2 - u_t^2) - \sum_{i=1,2} f(x, x_{\text{def}}^i) \sin(u), \quad (7)$$

$$m(x_{\text{def}}^i)_{tt} = -2 \int \frac{\partial f}{\partial x_{\text{def}}^i} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) dx. \quad (8)$$

В качестве начальных условий для этого использовались установившиеся решения для одной неоднородности с подавленными на периферии волнами. Далее расходящиеся волны не подавлялись. Одно

из решений в некоторых численных экспериментах умножалось на -1 . В основном, при взаимодействии двух таких неоднородностей как одного, так и разных знаков, фиксировалось отталкивание между ними. Но в некоторых случаях, для решений разных знаков было зафиксировано притяжение, т.е. с течением времени расстояние между подвижными неоднородностями заметно уменьшалось. Например, для параметров $\lambda = 20$, $\gamma = 500$, $m = 50$, $\alpha = 0$, $l = 1$ и первоначальном расстоянии между неоднородностями 15, расстояние между неоднородностями уменьшается до 13.5 для времени $t = 52$ (см. рис. 2). Такое

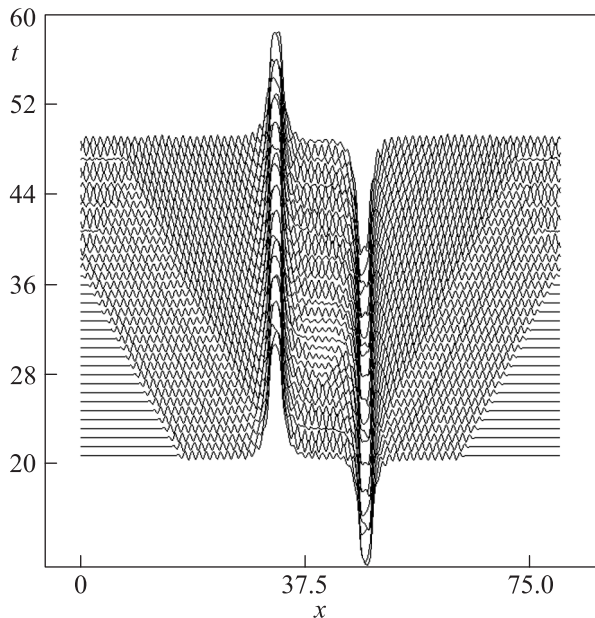


Рис. 2. Притяжение локализованных решений разных знаков

притяжение нельзя объяснить влиянием границ, так как для решений одного знака при тех же условиях наблюдается отталкивание (см. рис. 3).

Здесь нужно отметить, что такое взаимодействие вызвано волнами-переносчиками, так как оно проявляется не сразу, а через некоторое время, сравнимое со временем распространения бегущих волн между локализованными решениями. Еще одним интересным следствием этой модели является нестационарность положения подвижной неоднородности около положения равновесия, вызванная нестационарностью решения для поля. В частности, для случая $\lambda = 20$, $\gamma = 2000$, $m = 50$, $\alpha = 0.5$, $n = 11$, центр неоднородности совершает колебания с амплитудой порядка 10^{-3} . Подобное поведение может быть интересно с точки зрения построения солитонных моделей частиц с ненулевым собственным моментом

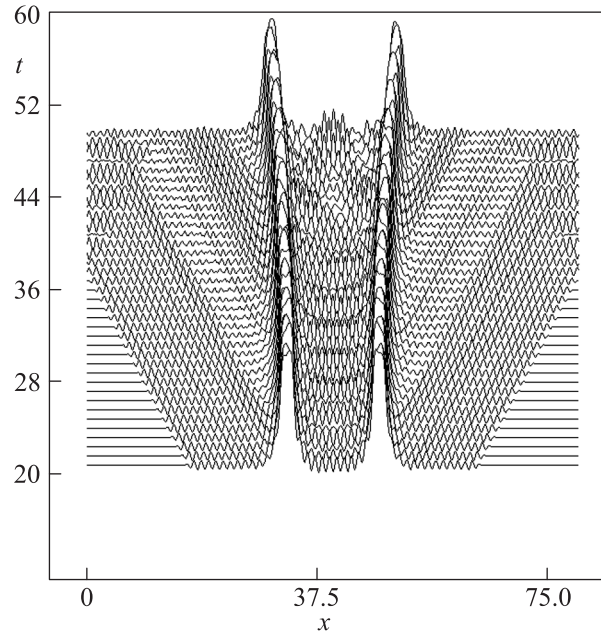


Рис. 3. Отталкивание локализованных решений одного знака

движения. Хотя предложенная модель не имеет гамильтонова формализма, это не исключает перспективы построения подобных моделей с приближенно сохраняющейся энергией. Но, теряя строгое сохранение функции Гамильтона, в данной модели можно получить возможность взаимодействия между солитоноподобными решениями на больших расстояниях, как было показано выше. Кроме того, представленная модель интересна с методологической точки зрения, как пример системы со взаимодействием между солитоноподобными решениями, которую можно легко обобщить на двумерный и трехмерный случай.

1. A. Hasegawa and M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers*, Springer, Berlin, Heidelberg (1990).
2. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Dissipative Solitons, Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, Heidelberg (2005).
3. A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, and S. E. Trullinger, *Physica D* **1**(1), 1 (1980).
4. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля*, УРСС, М. (1999).
5. Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной: теория горячего Большого взрыва*, УРСС, М. (2008).
6. G. E. Brown, *Selected papers, with commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme*, World Scientific 20th Century Physics, World Scientific, Singapore (1995).
7. S. R. Coleman, *Phys. Rev. D* **11**, 2088 (1975).

8. *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. by A. Scott, Routledge, N.Y. (2004).
9. X. Jiang, Z. Fan, Z. Chen, W. Pang, Y. Li, and B. Malomed, *Phys. Rev. A* **93**, 023633 (2016).
10. B. A. Malomed, *Phys. J. Special Topics* **225**, 2507 (2016).
11. G. Fodor, P. Forgacs, Z. Horvath, and A. Lukacs, *Phys. Rev. D* **78**, 025003 (2008).
12. J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, P. Dyke, and R. G. Hulet, *New J. Phys.* **15**, 063006 (2013).
13. Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 135 (2015).
14. Р. К. Салимов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 500 (2019).
15. Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988).