*Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 7, стр. 365 – 368* *10 апреля 1989 г.*

# ТОРОНЫ, ПРОЕКТОНЫ, РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И ФЕРМИОННЫЕ КОНДЕНСАТЫ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ СИГМА-МОДЕЛЯХ

*А.Морозов, А.Рослый*

Рассматриваются аналоги инстантонных решений с дробными топологическими зарядами.

Из-за суммирования по всем типам граничных условий в производящие функционалы двумерных $N=2$ суперсимметричных сигма-моделей дают вклад всевозможные отображения римановых поверхностей в факторы сигма-модельного многообразия M по группе Г, оставляющей действие инвариантным. Если поля удовлетворяют классическим уравнениям движения, то эти отображения описывают непертурбативные флуктуации: инстантоны, тороны и т.п. На некоторых из этих классических решений имеется в точности две фермионные нулевые моды, и таким образом насыщаются конденсаты $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, возникающие в $N=2$ суперсимметричных сигма-моделях. Рассмотрен простейший пример этого явления, для которого M/Г являются несингулярными многообразиями без границы: флаговые пространства $M = F_n = SU(n+1)/U(1)^n$.

1. Двумерные $N=2$ суперсимметричные сигма-модели $L = \int K(\Phi) d^2z d^2\theta d^2\bar{\theta}$ строятся по кэлеровым многообразиям M с кэлеровым потенциалом K. Во всех сигма-моделях на компактных кэлеровых многообразиях имеются инстантоны, являющиеся решениями уравнений дуальности $\bar{\partial}\phi = 0$. Число вещественных нулевых фермионных мод $n_F$ в поле инстантона определяется теоремой об индексе:

$$n_F = \frac{2}{\pi} \int R_{m\bar{n}} \partial\phi^n_{inst} \overline{\partial\phi^n_{inst}} d^2z.$$

Инстантонное исчисление в суперсимметричных теориях [1] позволило, в частности, доказать, что из существования решений уравнений дуальности с $n_F$ фермионными нулевыми модами вытекает существование фермионных конденсатов $\langle (\bar{\psi}\psi)^{n_F/2} \rangle$. Принцип распадения корреляций, если он справедлив для таких суперсимметричных теорий, означает тогда, что должны существовать и парные конденсаты $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. К образованию именно такого конденсата привело бы классическое решение с $n_F = 2$. Пока что такое решение известно только для $SU(N)$ суперсимметричной модели Янга–Миллса при $d=4$ [2]. Это хорошо известные т'Хоофтовские тороны [3]. В 1984 г. авторами совместно с А.С.Шварцем (не-

опубликовано) было найдено решение с $n_F = 2$ для двумерной $O_3$-сигма-модели ($M = SU(2)/U(1)$-двумерная сфера) – так называемый проектон (см. ниже).

2. Общая постановка задачи о непертурбативном квантовом описании теории с заданным классическим лагранжианом подразумевает суммирование по всем граничным условиям на бесконечности пространства-времени. Физические поля при этом могут принимать значения в минимальном из многообразий полей, совместимом с симметриями исходного действия. Таким образом, следует рассматривать всевозможные отображения $S^{(d)} \to M/\Gamma$. В конформно инвариантных теориях $S^{(d)}$ – это любые конформно плоские $d$-мерные многообразия, для двумерных сигма-моделей $S^{(2)}$ – любые римановы поверхности, возможно, с краем или с особенностями. M – многообразие, в котором принимают значения поля, в данном случае – сигма-модельное многообразие. Г – какая-то подгруппа инвариантности классического действия. В различные корреляторы дают вклад различные топологические классы отображений, отличающиеся выбором $S^{(d)}$ и Г. Парные фермионные корреляторы определяются отображениями с $n_F = 2$.

По-видимому, под M иногда разумно понимать целый класс эквивалентности сигма-модельных многообразий. В случаях с дискретными группами Г фактор M/Г может оказаться сингулярным многообразием – орбифолдом. Это происходит уже в случае $M = CP^n$ [1]. В наиболее простых случаях Г действует на M свободно – без неподвижных точек, – и M/Г является обычным несингулярным многообразием без края (но, возможно, неориентируемым). Мы разберем ниже один такой пример с $M = F_n = SU(n+1)/U(1)^n$.

3. Начнем с простейшего варианта $O_3$ сигма-модели: $M = F_1 = SU(2)/U(1) = CP^1$ = двумерная сфера. Этот пример особенно прост из-за совпадения размерностей многообразия M и пространства-времени. Если задать на бесконечности пространства-времени граничные условия $\phi(z) \to \text{const}$ при $|z| \to \infty$, отвечающие сфере, то отображение $CP^1 \to F_1$ с минимальным топологическим зарядом (ТЗ) – инстантон – описывает полевую конфигурацию с четырьмя вещественными фермионными нулевыми модами: $n_F = 4$. Отображение с $n_F = 2$ должно быть "вдвое меньшим": $CP^1/Z_2 \to F_1/Z_2$. Пространство-время $CP^1/Z_2$ не может иметь сингулярностей по крайней мере ни в каких конечных точках, так что в данном случае желательно, чтобы $Z_2$ действовала на $CP^1$ без неподвижных точек. Такая $Z_2$-изометрия у $CP^1$ имеется: в комплексных координатах $z$ на $CP^1$ она действует по правилу $z \to -1/\bar{z}$. Неподвижные точки должны были бы удовлетворять равенству $|z|^2 = -1$, так что их не существует. Фактор-пространство $CP^1/Z_2$ – это неориентируемая риманова поверхность без края – вещественное проективное пространство $RP^2$. Отображение пространства-времени $CP^1/Z_2$ в сферу $F_1$, имеющее единичный в обычном смысле ТЗ, не является минимальным, если рассматривать его как отображение в многообразие $RP^2 = F_1/Z_2$. Минимальное отображение $CP^1/Z_2 \to F_1/Z_2$ имеет ТЗ $= 1/2$ и приводит к вдвое меньшему числу нулевых мод $n_F = 2$.

Стоит отметить еще, что факторизация по антиголоморфной $Z_2$-изометрии не нарушает уравнений дуальности. Склейка различных карт (неголоморфная), конечно, согласована для тождественного отображения $CP^1/Z_2 \to F_1/Z_2$. Построенный таким образом "проектон" решает задачу о классической конфигурации с $n_F = 2$ в случае сферы. Для того, чтобы убедиться в непригодности для этой цели "торона", достаточно убедиться, что любое отображение тора $R^2/Z_1 \times Z_1 \to F_1/Z_2$ (при любой мыслимой $Z_2$-изометрии) продолжается до отображения $R^2/Z_1 \times Z_1 \to F_1$ и потому имеет целый ТЗ.

---

[1] Недавно этот пример рассмотрен А.Житницким [4]. С технической точки зрения его анализ является частным случаем теории струн на орбифолдах (см., например, [5]). Другим частным случаем этой теории является анализ вихревых отображений [6].

4. В общем случае сигма-модели на многообразии $F_n$ для инстантонного решения $n_F = 4$ [7], поэтому для наших целей требуется конфигурация с половинным ТЗ. Чтобы построить соответствующее решение нужно найти: а) какую-то $Z_2$-симметрию $F_n$; б) отображение какой-либо римановой поверхности в $F_n/Z_2$, которое не продолжается до отображения во все $F_n$. Мы покажем, что проектон решает задачу при всех $n$.

Например, кэлерово многообразие $F_2 = SU(3)/U(1) \times U(1)$ вкладывается как комплексное подмногообразие в произведение $CP^2 \times CP^2$. Пространство $CP^2 = SU(3)/SU(2) \times U(1)$ может быть записано в однородных координатах $p_1, p_2, p_3$. Пусть однородные координаты на втором $CP^2$ — $q_1, q_2, q_3$. Тогда $F_2$ задается в $CP^2 \times CP^2$ аналитическим уравнением $p_i q_i = 0$. На произведении $CP^2 \times CP^2$ транзитивно действует группа $SU(3) \times SU(3)$; уравнения $p_i q_i = 0$ и, следовательно, $F_2$ инвариантны относительно диагональной подгруппы $SU(3)$. Группа инвариантности отдельной точки $F_2$ равна $U(1) \times U(1)$, скажем, для $p_2 = p_3 = q_1 = q_3 = 0$ это вращения фаз чисел $p_1 \neq 0$ и $q_2 \neq 0$. Свободное действие дискретной антиголоморфной $Z_2$-изометрии на $F_2$ можно определить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} p_1 \to +\bar{p}_2 \\ p_2 \to -\bar{p}_1 \\ p_3 \to +\bar{p}_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} q_1 \to +\bar{q}_2 \\ q_2 \to -\bar{q}_1 \\ q_3 \to +\bar{q}_3 \end{pmatrix} .$$

Это преобразование не изменяет уравнение $p_i q_i = 0$. В $CP^2 \times CP^2$ оно имеет неподвижные точки: из

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda\bar{p}_2 & \qquad q_1 &= \mu\bar{q}_2 \\ p_2 &= -\lambda\bar{p}_1 & \qquad q_2 &= -\mu\bar{q}_1 \\ p_3 &= \lambda\bar{p}_3 & \qquad q_3 &= \mu\bar{q}_3 \end{aligned}$$

с произвольными комплексными $\lambda$ и $\mu$ следует только, что $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$. Однако, эти точки не попадают в подмногообразие $F_2$: для них уравнение $p_i q_i = 0$ приобрело бы вид $p_3 q_3 = 0$, и $p_3$ или $q_3$ должно было бы также обратиться в ноль, что невозможно (все однородные координаты не равны нулю одновременно). Решение задачи об отображении с $n_F = 2$ снова дается проектоном: $CP^1/Z_2 \to F_2/Z_2$. Если однородные комплексные координаты в пространстве-времени $CP^1$ — $u_1, u_2 (z = u_1/u_2)$, то отображение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 & \qquad q_1 &= -u_2 \\ p_2 &= u_2 & \qquad q_2 &= u_1 \\ p_3 &= 0 & \qquad q_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что оно не продолжается до отображения $CP^1/Z_2 \to F_2$, и потому имеет половинный ТЗ, а соответствующее $n_F = 2$.

Для анализа произвольного многообразия $F_n$ удобно использовать другое представление — в терминах верхних треугольных комплексных $(n+1) \times (n+1)$ матриц $V : V_{ii} = 1$, $V_{ij} = 0$ при $i > j$, см. например, [7]. Кэлеров потенциал строится по главным минорам $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы $VV^+$: $K = \sum_{i=1}^{n} \ln \Delta_i$. Симметрия метрики и многообразия $F_n$ и действия сигма-модели — это преобразование, при котором $K$ изменяется на голоморфную или антиголоморфную функцию, например, когда $\Delta_i$ умножаются на квадраты модулей аналитических функций от элементов $V$. Антиголоморфная $Z_2$-симметрия на $F_n$ может быть задана, к примеру, так: $V \to (A\bar{V}B)'$. Здесь матрица $A$ отличается от единичной элементом $A_{n,n} = +1/\sqrt{V_{n,n+1}}$, а $B$ — заменой $2 \times 2$ блока в правом нижнем углу на $-i\sigma_2$. Умножение на матрицу $B$ меняет местами два последние столбца и умножает один из них на $-1$. Штрих обо-

значает перестановку двух последних элементов нижней строки. Например, для $n = 1$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to (A\bar{V}B)' = \left[\begin{pmatrix} 1/\bar{\zeta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\zeta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]' = \begin{pmatrix} 1 & -1/\bar{\zeta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1/\bar{\zeta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что операция, обозначенная штрихом, не влияет на $n$ первых главных миноров $(n+1)\times(n+1)$ матрицы $VV^+$, так что можно не обращать на нее внимание. При таком преобразовании $VV^+ \to A\bar{V}BB^+\bar{V}^+A^+ = A\overline{VV^+}A$ и $\Delta_i \to \bar{\Delta}_i = \Delta_i$ для $i = 1, \ldots, n-1$, а $\Delta_n \to$ $\to \dfrac{1}{|V_{n,n+1}|^2}\Delta_n$, так что это действительно изометрия. Указанное преобразование переводит элемент $V_{n,n+1}$ в $-1/\overline{V_{n,n+1}}$, поэтому неподвижных точек нет. Понятно, что проектон, заданный формулой $V_{n,n+1} = z$ (остальные $V_{ij} = 0$, $i \neq j$) является искомой конфигурацией с $n_F = 2$. Для ясности приведем более явные формулы для антиголоморфного преобразования в случаях $n = 2, 3$:

$$F_2 : \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \bar{\eta} & -\bar{\xi} \\ 0 & 1 & -1/\bar{\zeta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad F_3 : \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\gamma} & -\bar{\beta} \\ 0 & 1 & \bar{\eta} & -\bar{\xi} \\ 0 & 0 & 1 & -1/\bar{\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Таким образом, мы показали, что проблема парных фермионных конденсатов в $N = 2$ суперсимметричных сигма-моделях на флаговых многообразиях решается в рамках простейшего обобщения "торонной идеологии": анализом проектонов. Не потребовалось даже введения сингулярных фактор-многообразий. Подробный анализ других сигма-моделей нами не проводился. Ясно, что ограничиться только проектонами и только несингулярными многообразиями в общем случае не удастся. Однако, вряд ли следует сомневаться в том, что на этом пути в каждом конкретном случае может быть найдено решение.

Мы признательны М.А.Шифману, постоянно стимулировавшему наш интерес к проблеме фермионных конденсатов, и А.Р.Житницкому и А.С.Шварцу за обсуждения.

**Литература**

1. *Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А.* ЭЧАЯ, 1986, 17, 472.
2. *Cohen E., Gomez C.* Phys. Rev. Lett., 1984, 52, 237.
3. *t'Hooft G.* Comm. Math. Phys., 1981, 81, 267.
4. *Житницкий А.Р.* Препринт ИЯИ СО АН СССР 87-15; ЖЭТФ, 1988, 6, и в печати.
5. *Atick J., Dixon L., Griffin P., Nemeschansky D.* Preprint SLAC-PUB-4273/87.
6. *Коган Я.И.* Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, 556.
7. *Perelomov A.M., Prafi M.C.* Nucl. Phys. B, 1985, 258, 647.

Институт теоретической и
экспериментальной физики

Поступила в редакцию
20 февраля 1989 г.