Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 7, стр. 369 – 372 *10 апреля 1989 г.*

БОЗОНИЗАЦИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯТОРОВ В МОДЕЛИ ВЕССА–ЗУМИНО–ВИТТЕНА

А.В.Маршаков

Рассматривается представление двумерных конформных теорий поля с алгеброй токов в терминах свободных полей. Предлагается процедура Доценко–Фатеева и вычисляются корреляторы в $SU(2)_k$ теории Весса–Зумино–Виттена.

1. В настоящее время широкое распространение получила гипотеза о том, что двумерные конформные теории поля, первоначально возникшие при изучении статистических моделей, являются классическими решениями в теории струн. С другой стороны, чрезвычайно плодотворной является идея, согласно которой вычисление корреляторов в произвольной конформной теории может быть сведено к вычислению в теории струн, то есть к представлению через свободные поля, как это было сделано в [1] для минимальных моделей [2]. Представление через свободные поля (так называемая "бозонизация") может оказаться особенно полезным при вычислении корреляторов на поверхности старшего рода. Ниже будет предложена процедура Доценко–Фатеева для вычисления корреляторов на сфере в простейшей модели Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ) [3] с $SU(2)_k$ алгеброй токов [4].

2. Алгебру токов $SU(2)_k$ можно реализовать следующим образом[1)] :

$$J_+(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} w(z), \qquad H(z) = iq\partial\phi(z) - w(z)\chi(z)$$
$$J_-(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} [w(z)\chi^2(z) - 2iq\chi(z)\partial\phi(z) + 2(1-q^2)\,\partial\chi(z)], \tag{1}$$

где w, χ – бозонные 1-, 0-дифференциалы, ϕ – скалярное поле, принимающее значение в окружности, $\partial \equiv \partial/\partial z$, параметр q связан с уровнем алгебры k соотношением: $2q^2 = k + 2$. Поля w, χ, ϕ являются *свободными* в смысле:

$$w(z)\chi(z') = (z-z')^{-1} + \ldots, \qquad \phi(z)\phi(z') = -\log(z-z') + \ldots .$$

Систему w, χ можно уже в буквальном смысле бозонизовать как бозонную систему j-, $(1-j)$-дифференциалов [7] (при $j = 1$):

$$w = -\partial\xi e^{-u} = -i\partial v e^{-u+iv}, \quad \chi = \eta e^{u} = e^{u-iv}$$

$$\xi(z)\eta(z') = (z-z')^{-1} + \ldots, u(z)u(z') = -\log(z-z') + \ldots, v(z)v(z') = -\log(z-z') + \ldots$$

Тогда выражения для генераторов (1) примут вид:

$$J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial v e^{-u+iv}, \qquad H = iq\partial\phi + \partial u$$
$$J_- = \frac{1}{\sqrt{2}} [2q\partial\phi - 2iq^2\,\partial u + (1-2q^2)\,\partial v] e^{u-iv} . \tag{2}$$

Тензор энергии-импульса системы определяется стандартной сугаваровской конструкцией:

$$T = 1/2q^2 : 2J_+J_- + H^2 : = w\partial\chi + T_\phi = T_u + T_v + T_\phi, \tag{3}$$

---

1) Об этом представлении автору сообщил Вл.Доценко (см. [5] и для случая произвольной алгебры [6]).

то есть тензор энергии-импульса представляет собой сумму "удлиненных" тензоров:

$$T_\varphi = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + i\sqrt{2}\alpha_{0,\varphi}\partial^2\varphi, \quad \varphi = u, v, \phi$$

$$\alpha_{0,u} = i/2\sqrt{2}, \quad \alpha_{0,v} = 1/2\sqrt{2}, \quad \alpha_{0,\phi} = -1/2\sqrt{2}q \ .$$

Отметим, что тензор энергии-импульса (3), (4) в действительности является тензором системы *свободных* скалярных полей, в отличие от случая, рассмотренного в [8].

3. Конформные поля в теории с алгеброй токов (2) и тензором энергии-импульса (3) естественно искать в виде экспонент от скаляров ϕ, u, v. Проверяя операторные разложения с токами (2), легко убедиться, что вершинные операторы:

$$V_j = \exp(i\frac{j}{q}\phi), \quad V_{j,-1} = \exp(i\frac{j}{q}\phi)\chi = \exp(i\frac{j}{q}\phi + u - iv),$$
$$V_{j,-2} = \exp(i\frac{j}{q}\phi)\chi^2 = \exp(i\frac{j}{q}\phi + 2(u - iv)), \ldots, V_{j,-2j} \equiv V_{-j} \ . \tag{5}$$

образуют представление $SU(2)_k$ веса j. Размерности операторов серии (5) одинаковы (χ имеет нулевую размерность) и равны:

$$\Delta_j = \frac{j(j+1)}{2q^2} = \frac{j(j+1)}{k+2} \ .$$

Операторы серии (5) могут быть представлены в виде:

$$V_{j,\,m-j} = \exp(i\frac{j}{q}\phi)\chi^{j-m} = \exp(i\frac{j}{q}\phi + (j-m)(u - iv)),$$

где $m = j, j-1, \ldots, -j$ – "проекция момента".

4. Перейдем к вычислению корреляторов на сфере. Из гравитационной аномалии [9] следует, что коррелятор в выбранной плоской метрике зависит от точки ее особенности, точнее, является дифференциалом степени $-c/3$, где c – центральный заряд [10]. Поскольку центральный заряд ВЗВ теории $SU(2)_k$:

$$c = c_\phi + c_u + c_v = (1 - 24\alpha^2_{0,\phi}) + (1 - 24\alpha^2_{0,u}) + (1 - 24\alpha^2_{0,v}) = 3 - 3/q^2$$

отличается от центрального заряда системы трех свободных скалярных полей, необходимо в точке особенности метрики R (в бесконечности, если метрика $ds^2 = dzd\bar{z}$) вставить "вакуумный заряд" [1] (с размерностью $\Delta_s = 1/q^2$ и нулевой проекцией момента):

$$V_s(R) = \exp[\frac{i}{q}\phi(R)]\chi(R) = \exp[\frac{i}{q}\phi(R) + u(R) - iv(R)] \ . \tag{6}$$

Таким образом, корреляторы в теории будут явно зависеть от точки сингулярности метрики R, но их можно нормировать на некоторый множитель [11], и рассматривать зависимость только от точек, где будут вставлены операторы конформной теории.

С учетом вышесказанного для отличной от нуля двухточечной функции будет иметь:

$$\langle V_{j,\,m-j}(z)\,\tilde{V}_{j,\,m'-j}(0)\rangle_s \sim \frac{\delta_{m+m',\,0}}{z^{2\Delta_j}} \ ,$$

где усреднение понимается как континуальный интеграл по свободным полям с *обязательной вставкой* вакуумного заряда (6). Операторы с "волной" имеют вид:

$$\tilde{V}_{j,\,m-j} \equiv V_{-1-j,\,1+j+m} \tag{7}$$

Заметим, что они не образуют представления алгебры (1), (2), но имеют размерность и проекцию момента ту же, что и $V_{j,\ m-j}$.

Вычислим теперь четырехточечный коррелятор полей в фундаментальном представлении $j = 1/2$. Обозначим "+" $= (m = 1/2)$, "−" $= (m = -1/2)$. Имеем четыре возможных оператора:

$$V_+ = \exp\left(\frac{i}{2q}\phi\right), \qquad V_- = \exp\left(\frac{i}{2q}\phi + u - iv\right)$$

$$\tilde{V}_+ = \exp\left(-i\frac{3}{2q}\phi - 2u + 2iv\right), \quad \tilde{V}_- = \exp\left(-i\frac{3}{2q}\phi - u + iv\right) \quad .$$

Будем вычислять коррелятор, содержащий три оператора (5) и один оператор (7), как в [1]. Коррелятор будет иметь вид:

$$\langle \tilde{V}_-(0)\, V_+(x)\, V_+(1)\, V_-(\infty)\, Q \rangle_s \quad , \tag{8}$$

где помимо вставки (6) необходимо для обеспечения закона сохранения заряда вставить так называемый оператор Фейгина–Фукса [1, 12], являющийся интегралом по замкнутому контуру от оператора единичной размерности. Для рассматриваемой теории оператор единичной размерности есть:

$$J(t) = \exp\left(-\frac{i}{q}\phi(t) - u(t) + iv(t)\right)[A\,\partial u(t) + B\,\partial v(t)]\,.$$

Наличие констант A и B приводит к умножению корреляционной функции на численный фактор $(A - iB)$, поэтому можно просто положить:

$$J(t) = \exp\left(-\frac{i}{q}\phi(t)\right) w(t) = -\,i\partial v \exp\left[-\frac{i}{q}\phi - u + iv\right] \tag{9}$$

$$Q = \oint J\ .$$

Подставляя (9) в (8) и проводя элементарные вычисления, получим:

$$\oint dt\, \langle \tilde{V}_-(0) V_+(x) V_+(1)\, V_-(\infty)\, J(t) \rangle_s \propto \oint dt\, t^{(1-k)/(k+2)} (t-1)^{-1/(k+2)} (t-x)^{-1/(k+2)}\,.$$

В зависимости от выбора контура интегрирования будем иметь два независимых решения:

$$F\left(\frac{1}{k+2},\ -\frac{1}{k+2},\ \frac{k}{k+2},\ x\right); \qquad F\left(\frac{1}{k+2},\ \frac{3}{k+2},\ \frac{k+4}{k+2},\ x\right),$$

($F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — — гипергеометрическая функция) уравнений Книжника–Замолодчикова [4].

Наконец, вычисляя указанным образом коррелятор полей:

$$\langle \Phi_{j_1, m_1}(0)\, \Phi_{j_2, m_2}(x)\, \Phi_{j_3, m_3}(1)\, \Phi_{j_4, m_4}(\infty) \rangle, \quad \sum_{i=1}^{4} m_i = 0, \quad j_4 = \sum_{i=1}^{3} j_i - l$$

можно убедиться, что необходимо сделать ровно l вставок оператора Q (9). Простое вычисление приводит к результату для коррелятора:

$$\sum_\gamma C_\gamma \oint \prod_1^l dt_i \prod_{i<j} (t_i - t_j)^{-\frac{1}{q^2} - \gamma_{ij}} \prod_1^l t_i^{-\frac{j_1}{q^2} - \gamma_i^{(1)}} (t_i - 1)^{-\frac{j^3}{q^2} - \gamma_i^{(3)}} (t_i - x)^{-\frac{j_2}{q^2} - \gamma_i^{(2)}}$$

где

$$\gamma = 0{,}1:\ \Sigma\gamma = l, \quad \gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(3)}\ . \tag{10}$$

C_γ — некоторые коэффициенты. Выбирая различные контуры интегрирования, в (10) можно получить $l + 1$ независимых решений уравнений Книжника–Замолодчикова [13].

Изложенная процедура может быть развита для более общего случая моделей ВЗВ [14].

Автор признателен А.Герасимову, Вл.Доценко, А.Миронову за полезные обсуждения и, особенно, А.Морозову за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Литература

1. *Dotsenko Vl.S., Fateev V.A.* Nucl. Phys. B, 1984, **240**, [FS12], 312.
2. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys. B, 1984, **241**, 333.
3. *Witten E.* Comm. Math. Phys., 1984, **92**, 455.
4. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys. B, 1984, **243**, 83;
5. *Wakimoto M.* Comm. Math. Phys., 1986, **104**, 605; *Alekseev A., Shatashvili S.* Preprint LOMI E-16-88.
6. *Фейгин Б.Л., Френкель Э.В.* УМН, 1988, **43**, 227; *Morozov A.* Preprint ITEP, 1989.
7. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Nucl. Phys. B, 1986, **271**, 93.
8. *Li K., Warner N.* Preprint CERN-TH, 5047/88; *Griffin P., Nemeschansky D.* Preprint SLAC-PUB-4666/88; *Kiritsis E.B.* Preprint CALT-68-1508, 1988.
9. *Alvarez–Gaume L., Witten E.* Nucl. Phys. B, 1983, **234**, 269.
10. *Knizhnik V.G.* Phys. Lett. B, 1986, **180**, 247.
11. *Герасимов А., Морозов А.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **48**, 409.
12. *Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б.* Функ. Анализ и прилож., 1983, 17, 241.
13. *Christe P., Flume R.* Preprint Bonn-HE-86-10, 1986.
14. *Morozov A. et al.* Preprint ITEP, 1989.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 февраля 1989 г.