Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 7, стр. 372 – 375 *10 апреля 1989 г.*

ФЕРМИОННЫЙ КИРАЛЬНЫЙ ДЕТЕРМИНАНТ В ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ШОТТКИ

А.С.Лосев

Получена формула произведения для θ-функций на римановых поверхностях, с помощью которой фермионный детерминант с произвольной характеристикой представляется в виде бесконечного произведения в параметризации Шоттки.

1. Ключевую роль в теории струн играют киральные детерминанты, входящие в выражения для многопетлевых струнных статсумм и амплитуд. В работе [1] они были выражены через θ-функции, в частности там было показано, что безаномальная комбинация $\lambda_p(E) = (\det \bar\partial_0)^{1/2} \det \bar\partial_{1/2}(E)$ равна $c_p \theta(\vec{\alpha}/\vec{\beta})(\tau)$, где $\det \bar\partial_j(E)$ – киральный детерминант на j-дифференциалах на поверхности рода p с коэффициентами из плоского линейного расслоения E, α_k и β_k, $k = \overline{1,p}$ – вещественные числа, задающие функции склейки в этом расслоении (см. п. 2), c_p – константа, зависящая только от рода поверхности.

В подходе, основанном на сшивании римановых поверхностей с границами, развитом в работах [3], выражение для λ_p по построению оказывается "унитарным", т. е. $c_p = g^{-2+2p}$, где g — константа трехструнного взаимодействия, но ответы записываются в виде бесконечного произведения в параметризации Шоттки. Связь между двумя представлениями для λ_p вытекает из полученной в этой статье формулы разложения θ-функции на римановой поверхности в бесконечное произведение, обобщающей хорошо известное разложение для рода один (тождество Якоби):

$$\theta(z)(\tau) = \prod_{n>0} (1 + \exp(2\pi i z) q^{n-\frac{1}{2}})(1 + \exp(-2\pi i z) q^{n-\frac{1}{2}})(1 - q^n), \tag{1}$$

где $q = \exp(2\pi i \tau)$

2. В параметризации Шоттки риманова поверхность рода p представляет собой риманову сферу, из которой вырезаны $2p$ дисков D_k, D'_k, $k = \overline{1,p}$, а границы дырок — окружности S_k, S'_k — попарно сшиты дробно-линейными преобразованиями γ_k: $S'_k = \gamma_k(S_k)$. Преобразования γ_k порождают группу G называемую группой Шоттки. Произвольный элемент из G может быть представлен в виде

$$\gamma = \gamma_{i_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i_N}^{m_N} .$$

Определим $n_k(\gamma)$ — число вхождений в γ образующих так: $n_k = \sum_{\alpha,\, i_\alpha = k} m_\alpha$.

Каждый элемент из группы Шоттки G в некоторой системе координат, получаемой из исходной дробно-линейным преобразованием ψ, является дилатацией:

$$\psi_0 \gamma_0 \psi^{-1}(z) = K_\gamma z .$$

Число K_γ называется множителем элемента γ.

В качестве A_k-циклов на сшитой римановой поверхности Σ_p выберем окружности S_k, а в качестве B_k-циклов — некоторые кривые, соединяющие точки $P_k \in S_k$ и $\gamma_k(P_k) \in S'_k$.

Расслоение на Σ_p задается функциями склейки на A- и B-циклах, так расслоению j-дифференциалов отвечают функции склейки, равные 1 на B-циклах и $(\gamma'_k(z))^j$ на A_k-циклах.

Среди 2^{2p}-спинорных структур есть базисная, связанная с описанным выше выбором A- и B-циклов. Ее функции склейки равны 1 на B-циклах и $\sqrt{\gamma'_k(z)}$ на A_k-циклах, причем выбор знака у корня следующим образом согласован с выбором B-циклов: зафиксируем окружность S_k и точку P_k на ней, рассмотрим путь $\gamma_k(z, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ в группе дробно-линейных преобразований, соединяющий единицу и $\gamma_k(z)$, и такой, что точка $P_k(t) = \gamma_k(P_k, t)$ движется по B_k циклу из P_k в $\gamma_k(P_k)$. Тогда знак корня $\sqrt{\gamma'_k(z)}$ восстанавливается по непрерывности $(\sqrt{\gamma'_k(z, 0)} = \sqrt{1} = 1)$. Выбор знака у $\sqrt{\gamma'_k(z)}$, $k = 1, p$ задает знак у $\sqrt{\gamma'(z)}$ для любого γ из группы Шоттки и позволяет определить правильный знак у $K_\gamma^{1/2}$. 2^{2p}-спинорных структур на Σ_p задаются двумя p-мерными целочисленными векторами $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, при этом структуре $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ отвечают функции склейки, равные $\sqrt{\gamma'_k(z)}(-1)^{\beta_k}$ на A_k и $(-1)^{\alpha_k}$ на B_k.

Расслоению j-дифференциалов, тензорно умноженному на произвольное плоское расслоение E соответствуют описанные выше функции склейки при вещественных векторах $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

3. Основной результат статьи — представление θ-функции на римановой поверхности в виде бесконечного произведения:

$$\theta(\mathbf{Y})(\hat{\tau}_p) = \prod_\gamma{}' \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \exp(2\pi i \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}) K_\gamma^{m-\frac{1}{2}})(1 + \exp(-2\pi i \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}) K_\gamma^{m-\frac{1}{2}})(1 - K_\gamma^m), \tag{2}$$

где произведение вычисляется по примитивным классам сопряженных элементов (элемент $\gamma \in G$ примитивен, если $|K_\gamma| < 1$ и $\gamma = \tilde{\gamma}^q$, для $\tilde{\gamma} \in G$ только при $q = \pm 1$), $\hat{\tau}_p$ – матрица периодов поверхности Σ_p; вычисленная при описанном выше выборе A- и B-циклов, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\gamma)$.

Идея доказательства (2) состоит в том, что при вещественных $\mathbf{Y}$ левая часть (2) равна $\lambda_p(E)$ для расслоения E с $\vec{\alpha} = 0$, $\vec{\beta} = 2\mathbf{Y}$, [1], и в этом случае формулу (2) можно доказать, интегрируя тензор энергии-импульса по модулям в представлении Шоттки (для $\mathbf{Y} = 0$ это проделал Мартинек [2]). После чего справедливость (2) следует из аналитичности по левой и правой частей соотношения (2).

Докажем (2) при вещественных $\mathbf{Y}$.

$$\det \bar{\partial}_{1/2}(E) = \int D\psi D\tilde{\psi} \exp\left(\int \tilde{\psi} \bar{\partial} \psi\right), \tag{3}$$

где ψ $(\tilde{\psi})$ – $\frac{1}{2}$ – дифференциал с коэффициентами из плоского расслоения $E(E^{-1})$. Голоморфный тензор энергии-импульса такой системы равен $T = \frac{1}{2}(\tilde{\psi}\partial\psi - (\partial\tilde{\psi})\psi)$. Следуя Мартинеку найдем вакуумное среднее этого тензора из функции Грина:

$$\langle T \rangle = \lim_{z \to w} \left[\frac{1}{2}\partial_w G(z, w) - \frac{1}{2}\partial_z G(z, w) - \frac{1}{(z-w)^2}\right], \tag{4}$$

где

$$G(z, w) = \langle \tilde{\psi}(z)\psi(w) \rangle .$$

Функция Грина $G(z, w)$ имеет единственный полюс первого порядка и однозначно определяется своими автоморфными свойствами:

$$\begin{aligned} G(z, \gamma_k(w)) &= \exp(2\pi i Y_k)\sqrt{\gamma_k'(w)}\, G(z, w), \\ G(\gamma_k(z), w) &= \exp(-2\pi i Y_k)\sqrt{\gamma_k'(z)}\, G(z, w). \end{aligned} \tag{5}$$

откуда

$$G(z, w) = \sum_{\gamma \in G} \frac{\sqrt{\gamma'(z)}\exp(-2\pi i \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n})}{\gamma(z) - w},$$

где сумма ведется по всем элементам группы Шоттки. Рассуждая далее аналогично Мартинеку и используя его ответ для $(\det \partial_0)^{1/2}$, получим, что $\lambda_p(E)$ для вещественных $\mathbf{Y}$ с точностью до зависящей только от рода константы совпадает с правой частью (2). Константа в соотношении (2) устанавливается при переходе к вырожденной поверхности $K_{\gamma_k} \to 0$, что завершает доказательство формулы (2) для вещественных $\mathbf{Y}$.

4. Согласно Книжнику [1]

$$\lambda_p(E) = c_p \exp 1/4\,(i\pi\vec{\alpha}\hat{\tau}_p\vec{\alpha} + 2\pi i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\,\theta\,(1/2(\vec{\beta} + \hat{\tau}_p\vec{\alpha}))\,(\hat{\tau}_p), \tag{6}$$

Подстановка в (6) формулы бесконечного произведения (2) дает представление $\lambda_p(E)$ в параметризации Шоттки. В следующей нашей работе мы получим его методом сшивания.

Автор благодарен А.Герасимову, А.Морозову, А.Рослому и К.Тер-Мартиросяну за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. *Knizhnik V.G.* Phys. Lett. B, 1986, **108**, 247; *Alvarez-Gaume L., Moore G., Vafa C.* Comm. Math. Phys., 1986, **106**, 1.
2. *Martinec E.* Nucl. Phys. B, 1987, **281**, 157.

3. *Alessandrini V., Amati D.* Nuovo Cimento A, 1971, **4**, 793; *Montonen C.* Nuovo Cimento, A, 1974, **19**, 69; *LeClair A.* Nucl. Phys. B, 1988, **297**, 603; *Di Vecchia P., Hornfeck K., Frau M. et al.* Phys. Lett. B, 1988, **211**, 301; *Petersen J., Sidenius J., Tollsten A.* Phys. Lett. B, 1988, **213**, 30; *Pezzella F.* Preprint NORDITA--88/24 P, Copenhagen, 1988.

Институт теоретической и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
3 марта 1989 г.
