Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 4, с. 219 – 222 © 2020 г. 25 февраля

Кварковый и глюонный конденсаты при конечном изоспиновом химическом потенциале

Н. О. Агасян[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 января 2020 г.
После переработки 21 января 2020 г.
Принята к публикации 21 января 2020 г.

Изучается непертурбативный вакуум КХД при конечном изоспиновом химическом потенциале. Из первых принципов выведены низкоэнергетические соотношения для кваркового и глюонного конденсатов. Получены аналитические выражения для кваркового и глюонного конденсатов в пион–конденсатной фазе на древесном уровне киральной теории возмущений. Показано, что кварковый конденсат падает, в то время как глюонный конденсат растет с ростом μ_I.

DOI: 10.31857/S0370274X20040025

1. Явление пионной конденсации в ядерной материи (при конечной барионной плотности) имеет давнюю историю [1–5]. В начале 2000 гг. было показано [6–9], что при нулевой барионной плотности и температуре происходит конденсация заряженных пионов при критическом изоспиновом химическом потенциале $\mu_I^c = m_\pi$. Данное явление изучалось во множестве работ в рамках киральной теории возмущений (КТВ), Намбу–Иона-Лазинио модели, кварк-мезонной модели и их расширений на включение Поляковской петли. Ссылки приведены в работах [10, 11] и недавнем обзоре [12]. На основе этого явления был предложен новый тип компактных звезд – пионные звезды [10, 13]. Конденсаты в квантовой хромодинамике (КХД) в изоспиновой материи изучались в [14].

В квантово-полевых теориях важную роль играют соотношения, которые являются следствиями симметрийных свойств теории. Поиски симметрий и ограничений, которые эти симметрии накладывают на физические характеристики системы, приобретают особое значение в КХД-теории с конфайнментом, где "наблюдаемыми" величинами являются составные состояния – адроны. В понимании непертурбативных вакуумных свойств КХД принципиально важную роль играют низкоэнергетические теоремы или тождества Уорда (масштабные и киральные). В КХД низкоэнергетические теоремы были получены в начале 1980-х гг. [15–17]. Низкоэнергетические теоремы КХД, следующие из общих симметрийных свойств и не зависящие от деталей механизма конфайнмента, позволяют получить информацию, которую иногда невозможно получить каким-либо другим путем. Также они могут быть использованы как "физически разумные" ограничения при построении эффективных теорий и различных моделей КХД-вакуума. В КХД низкоэнергетические теоремы при $T \neq 0$, $\mu_q \neq 0$ были получены в [18, 19]. В магнитном поле низкоэнергетические теоремы и их приложения к различным физическим процессам исследовались в [20–30]. Низкоэнергетические соотношения для тензора энергии-импульса при конечной температуре изучались в [31–35].

В настоящей работе изучается поведение кваркового и глюонного конденсатов при конечном изоспиновом потенциале в пион–конденсатной фазе.

2. В евклидовой формулировке статистическая сумма КХД при наличии изоспинового химического потенциала μ_I может быть записана в виде

$$Z = \int [DA] \prod_{q=u,d} [D\bar{q}][Dq] \exp\left\{-\int_{V_4} d^4x \mathcal{L}\right\}, \quad (1)$$

где лагранжиан КХД имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g_0^2}(G^a_{\mu\nu})^2 + \sum_{q=u,d} \bar{q}\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu - i\frac{\lambda^a}{2}A^a_\mu\right) + \frac{1}{2}\mu_I\gamma_0\tau_3 + m_{0q}\right] q, \quad (2)$$

здесь кварки с ароматом $q = (u, d)$ и затравочной массой m_{0q} и для простоты явно не выписаны "духовые" и фиксирующие калибровку слагаемые. Давление дается выражением $V_4 P\ (\mu_I, m_{0u}, m_{0d}) = \ln Z$.

[1)]e-mail: agasian@itep.ru

Из (1) следует соотношение для глюонного конденсата ($\langle G^2\rangle \equiv \langle (G^a_{\mu\nu})^2\rangle$)

$$\langle G^2\rangle(\mu_I, m_{0u}, m_{0d}) = -4\frac{\partial P}{\partial(1/g_0^2)}. \quad (3)$$

Система, описываемая статистической суммой (1), характеризуется набором размерных параметров $M, \mu_I, m_{0q}(M)$ и безразмерным зарядом $g_0^2(M)$, где M есть ультрафиолетовое обрезание. С другой стороны можно рассмотреть перенормированное давление P_R и, используя размерные и ренорм-групповые свойства P_R, выразить (3) в форме, содержащей производные относительно физического параметра μ_I и перенормированных масс m_q.

Явление размерной трансмутации приводит к появлению непертурбативного размерного параметра

$$\Lambda = M \exp\left\{\int_{\alpha_s(M)}^{\infty} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}\right\}, \quad (4)$$

где $\alpha_s = g_0^2/4\pi$, и $\beta(\alpha_s) = d\alpha_s(M)/d\ln M$ – функция Гелл-Манна–Лоу. Хорошо известно, что масса кварка имеет аномальную размерность и зависит от масштаба M. Ренорм-групповое уравнение для бегущей массы $m_0(M)$ имеет вид $d\ln m_0/d\ln M = -\gamma_m$ и мы использовали $\overline{MS}$ схему, для которой β и γ_m являются независимыми от кварковой массы [19, 36]. Ренорминвариантная масса имеет вид

$$m_q = m_{oq}(M)\exp\left\{\int^{\alpha_s(M)} \frac{\gamma_{m_q}(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)} d\alpha_s\right\}. \quad (5)$$

Далее мы заметим, что так как давление является реном-инвариантной величиной, то его аномальная размерность равна нулю. Таким образом, P_R имеет только нормальную (каноническую) размерность, равную 4. Используя ренорм-инвариантность Λ, можно записать в наиболее общем виде

$$P_R = \Lambda^4 f\left(\frac{\mu_I}{\Lambda}, \frac{m_u}{\Lambda}, \frac{m_d}{\Lambda}\right), \quad (6)$$

где f есть некоторая функция. Из (4), (5) и (6) получаем

$$\frac{\partial P_R}{\partial(1/g_0^2)} = \frac{\partial P_R}{\partial\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial(1/g_0^2)} + \sum_q \frac{\partial P_R}{\partial m_q}\frac{\partial m_q}{\partial(1/g_0^2)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial m_q}{\partial(1/g_0^2)} = -4\pi\alpha_s^2 m_q \frac{\gamma_{m_q}(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}. \quad (8)$$

С учетом (3) глюонный конденсат дается выражением

$$\langle G^2\rangle(\mu_I, m_u, m_d) = \quad (9)$$
$$= -\frac{16\pi\alpha_s^2}{\beta(\alpha_s)}\left(4 - \mu_I\frac{\partial}{\partial\mu_I} - \sum_q (1+\gamma_{m_q}) m_q \frac{\partial}{\partial m_q}\right) P_R.$$

Удобно выбрать такой большой масштаб, что можно взять нижний порядок выражений, $\beta(\alpha_s) \to \to -b\alpha_s^2/2\pi$, где $b = (11N_c - 2N_f)/3$ и $1+\gamma_m \to 1$. Таким образом, мы имеем следующие уравнения для конденсатов:

$$\langle G^2\rangle(\mu_I) = \quad (10)$$
$$= \frac{32\pi^2}{b}\left(4 - \mu_I\frac{\partial}{\partial\mu_I} - \sum_q m_q\frac{\partial}{\partial m_q}\right) P_R \equiv \hat{D} P_R,$$

$$\langle\bar{q}q\rangle(\mu_I) = -\frac{\partial P_R}{\partial m_q}. \quad (11)$$

3. В КХД эффективное давление, из которого можно получить конденсаты $\langle\bar{q}q\rangle(\mu_I)$ и $\langle G^2\rangle(\mu_I)$, используя общие соотношения (10) и (11), записывается в виде

$$P_{\text{eff}}(\mu_I) = -\varepsilon_{\text{vac}} + P_\pi(\mu_I), \quad (12)$$

где $\varepsilon_{\text{vac}} = \frac{1}{4}\langle\theta_{\mu\mu}\rangle$ – непертурбативная плотность энергии вакуума при $\mu_I = 0$ и

$$\langle\theta_{\mu\mu}\rangle = -\frac{b}{32\pi^2}\langle G^2\rangle + \sum_{q=u,d} m_q\langle\bar{q}q\rangle \quad (13)$$

– след тензора энергии-импульса. В уравнении (12) $P_\pi(\mu_I)$ – давление, создаваемое пионами при конечном изоспиновом химическом потенциале. Кварковый и глюонный конденсаты даются уравнениями

$$\langle\bar{q}q\rangle(\mu_I) = -\frac{\partial P_{\text{eff}}}{\partial m_q}, \quad (14)$$

$$\langle G^2\rangle(\mu_I) = \hat{D} P_{\text{eff}}, \quad (15)$$

где оператор $\hat{D}$ определен соотношением (10)

$$\hat{D} = \frac{32\pi^2}{b}\left(4 - \mu_I\frac{\partial}{\partial\mu_I} - \sum_q m_q\frac{\partial}{\partial m_q}\right). \quad (16)$$

Рассмотрим случай $\mu_I = 0$. Используем низкоэнергетическую теорему для производной глюонного конденсата по массе кварка [15]

$$\frac{\partial}{\partial m_q}\langle G^2\rangle = \int d^4x \langle G^2(0)\bar{q}q(x)\rangle =$$
$$= -\frac{96\pi^2}{b}\langle\bar{q}q\rangle + O(m_q), \quad (17)$$

где $O(m_q)$ обозначает линейные члены по массам легких кварков. Получаем следующее соотношение

$$\frac{\partial \varepsilon_{\rm vac}}{\partial m_q} = -\frac{b}{128\pi^2}\frac{\partial}{\partial m_q}\langle G^2\rangle + \frac{1}{4}\langle \bar{q}q\rangle = = \frac{3}{4}\langle \bar{q}q\rangle + \frac{1}{4}\langle \bar{q}q\rangle = \langle \bar{q}q\rangle. \quad (18)$$

Заметим, что три четверти кваркового конденсата происходят из глюонной части непертурбативной плотности энергии вакуума. Действуя аналогичным образом, получим выражение для глюонного конденсата

$$-\hat{D}\varepsilon_{\rm vac} = \langle G^2\rangle. \quad (19)$$

Для того чтобы получить зависимость кваркового и глюонного конденсатов от изоспинового химического потенциала μ_I, используем соотношение Гелл-Манна–Оакса–Реннера (ГОР) ($\Sigma = |\langle \bar{u}u\rangle| = |\langle \bar{d}d\rangle|$)

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle \bar{u}u + \bar{d}d\rangle = (m_u + m_d)\Sigma. \quad (20)$$

Тогда мы находим следующие соотношения

$$\frac{\partial}{\partial m_q} = \frac{\Sigma}{f_\pi^2}\frac{\partial}{\partial m_\pi^2}, \quad (21)$$

$$\sum_q m_q \frac{\partial}{\partial m_q} = (m_u + m_d)\frac{\Sigma}{f_\pi^2}\frac{\partial}{\partial m_\pi^2} = m_\pi^2 \frac{\partial}{\partial m_\pi^2}, \quad (22)$$

$$\hat{D} = \frac{32\pi^2}{b}\left(4 - \mu_I\frac{\partial}{\partial \mu_I} - m_\pi^2\frac{\partial}{\partial m_\pi^2}\right). \quad (23)$$

Давление, из которого можно получить кварковый и глюонный конденсаты в фазе пионного конденсата ($\mu_I > m_\pi$), на древесном уровне киральной теории возмущений имеет вид [10]

$$P_\pi^{ChPT} = \frac{1}{2}f_\pi^2\mu_I^2\left(1 - \frac{m_\pi^2}{\mu_I^2}\right)^2. \quad (24)$$

Используя уравнения (12), (14), (21), (24) для кваркового конденсата при $\mu_I > m_\pi$, находим

$$\Sigma(\mu_I) = \Sigma\frac{m_\pi^2}{\mu_I^2}. \quad (25)$$

Аналогично, для глюонного конденсата в пион-конденсатной фазе, используя уравнения (12), (15), (23), (24), получим

$$\langle G^2\rangle(\mu_I) = \langle G^2\rangle + + \frac{32\pi^2}{b}f_\pi^2\mu_I^2\left(1 - 3\frac{m_\pi^2}{\mu_I^2} + 2\frac{m_\pi^4}{\mu_I^4}\right). \quad (26)$$

При $\mu_I < m_\pi$ система находится в вакуумной фазе и конденсаты равны своим вакуумным значениям. Мы видим, что кварковый конденсат падает с ростом μ_I как $\frac{m_\pi^2}{\mu_I^2}$. Данное поведение хорошо согласуется с ранними численными расчетами [8, 9] и с недавними расчетами на решетке в КХД [37] при нулевой температуре.

Глюонный конденсат в области пионного конденсата ($\mu_I > m_\pi$) сначала уменьшается, достигая своего минимального значения при $\mu_I = 2^{1/4}m_\pi \simeq \simeq 1.19m_\pi$, а затем растет. В точке $\mu_I = 2^{1/2}m_\pi \simeq \simeq 1.41m_\pi$ он сравнивается со своим вакуумным значением $\langle G^2\rangle$ и далее продолжает расти с ростом μ_I. Данное явление можно назвать глюонным катализом при конечном изоспиновом потенциале.

4. В предлагаемой работе изучался непертурбативный вакуум КХД при конечном изоспиновом химическом потенциале. Из первых принципов выведены низкоэнергетические соотношения для кваркового и глюонного конденсатов. Получены аналитические выражения для кваркового и глюонного конденсатов в пион-конденсатной фазе на древесном уровне киральной теории возмущений. Показано, что кварковый конденсат падает, в то время как глюонный конденсат растет с ростом μ_I.

Автор благодарит за поддержку MEPhI Academic Excellence Project (Contract # 02.A03.21.0005).

---

1. A. B. Migdal, ZhETF **61**, 2209 (1971).
2. A. B. Migdal, Phys. Rev. Lett. **31**, 257 (1973).
3. A. B. Migdal, E. E. Saperstein, M. A. Troitsky, and D. N. Voskresensky, Phys. Rep. **192**, 179 (1990).
4. R. F. Sawyer, Phys. Rev. Lett. **29**, 382 (1972).
5. D. J. Scalapino, Phys. Rev. Lett. **29**, 386 (1972).
6. D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 592 (2001).
7. D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Atom. Nucl. **64**, 834 (2001) [Yad. Fiz. **64**, 899 (2001)].
8. J. B. Kogut and D. K. Sinclair, Phys. Rev. D **66**, 014508 (2002).
9. J. B. Kogut and D. K. Sinclair, Phys. Rev. D **66**, 034505 (2002).
10. J. O. Andersen and P. Kneschke, arXiv:1807.08951 [hep-ph].
11. P. Adhikari and J. O. Andersen, arXiv:1909.01131 [hep-ph].
12. M. Mannarelli, Particles **2**(3), 411 (2019).
13. B. B. Brandt, G. Endrodi, E. S. Fraga, M. Hippert, J. Schaffner-Bielich, and S. Schmalzbauer, Phys. Rev. D **98**(9), 094510 (2018).
14. L. He, Y. Jiang, and P. Zhuang, Phys. Rev. C **79**, 045205 (2009).
15. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **191**, 301 (1981).
16. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Sov. J. Part. Nucl. **13**, 224 (1982).

17. A. A. Migdal and M. A. Shifman, Phys. Lett. B **114**, 445 (1982).
18. P. J. Ellis, J. I. Kapusta, and H. B. Tang, Phys. Lett. B **443**, 63 (1998).
19. I. A. Shushpanov, J. I. Kapusta, and P. J. Ellis, Phys. Rev. C **59**, 2931 (1999).
20. N. O. Agasian and I. A. Shushpanov, JETP Lett. **70**, 717 (1999) [Pis'ma v ZhETF **70**, 711 (1999)].
21. N. O. Agasian and I. A. Shushpanov, Phys. Lett. B **472**, 143 (2000).
22. N. O. Agasian and I. A. Shushpanov, JHEP **0110**, 006 (2001).
23. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **64**, 554 (2001) [Yad. Fiz. **64**, 608 (2001)].
24. N. O. Agasian, JETP Lett. **95**, 171 (2012).
25. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **74**, 1230 (2011) [Yad. Fiz. **74**, 1259 (2011)].
26. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **562**, 257 (2003).
27. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **488**, 39 (2000).
28. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **71**, 1967 (2008) [Yad. Fiz. **71**, 1998 (2008)].
29. N. O. Agasian, JETP Lett. **104**(2), 71 (2016) [Pis'ma v **104**(2), 71 (2016)].
30. N. O. Agasian and S. M. Fedorov, Phys. Lett. B **663**, 445 (2008).
31. N. O. Agasian, JETP Lett. **57**, 208 (1993) [Pis'ma v **57**, 200 (1993)].
32. N. O. Agasian, JETP Lett. **74**, 353 (2001).
33. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **519**, 71 (2001).
34. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **68**, 723 (2005) [Yad. Fiz. **68**, 755 (2005)].
35. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **67**, 391 (2004) [Yad. Fiz. **67**, 409 (2004)].
36. T. Muta, *Foundations of Chromodynamics, World Scientific Lecture Notes in Physics 57*, World Scientific, Singapore (1998).
37. B. B. Brandt, G. Endrodi, and S. Schmalzbauer, Phys. Rev. D **97**(5), 054514 (2018).