Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 8, с. 494 – 500 © 2020 г. 25 апреля

Эффективная групповая скорость и форма пучков-близнецов

П. А. Прудковский[1)]

Физический факультет, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 октября 2019 г.
После переработки 1 апреля 2020 г.
Принята к публикации 1 апреля 2020 г.

Теоретически исследованы форма и скорости распространения импульсов пучков-близнецов в процессе их генерации при параметрическом рассеянии света – в случае, когда задержки, вызванные дисперсией групповых скоростей, превышают длину импульса накачки. Показано, что эффективная групповая скорость импульса рассеянного излучения определяется средним арифметическим групповых скоростей на частоте рассеянного излучения и на частоте накачки. Для больших коэффициентов параметрического усиления численно найдены элементы матрицы рассеяния, показано, что перемешивание спектральных компонент рассеянного излучения может приводить к существенному сужению импульсов пучков-близнецов. Наконец, для случая генерации широкополосных пучков-близнецов последовательно в двух кристаллах с апериодической доменной структурой показано, что видность трехчастотной интерференции уменьшается по мере отставания импульса накачки от импульсов рассеянного излучения.

DOI: 10.31857/S123456782008011X

Хорошо известно, что при спонтанном параметрическом рассеянии света происходит рождение пар фотонов, описывающихся единым квантовым состоянием – так называемых бифотонов. Рост интенсивности накачки приводит к переходу в вынужденный режим рассеяния, при котором рассеянный свет состоит из большого числа бифотонных пар. Подобное состояние неклассического света принято называть пучками-близнецами [1].

Неклассические свойства пучков-близнецов исследовались, начиная с конца прошлого века. Так как в двух пучках рассеянного излучения одинаковое число фотонов, то можно зарегистрировать подавление флуктуаций разности их интенсивностей ниже уровня дробового шума [2–6]. Позже были исследованы более нетривиальные свойства пучков-близнецов: корреляции между числами фотонов в двух пучках, полученные при помощи статистики фотоотчетов [7–10], квадратурное сжатие [11], возможность наблюдения неклассических корреляций в различных оптических схемах [12–14]. Было показано, что пучки-близнецы можно использовать для прецизионных измерений [15–18] и приготовления макроскопического пучка света с подавленными флуктуациями интенсивности [19].

Вынужденный режим параметрического рассеяния требует достаточно большой интенсивности накачки. Поэтому обычно для генерации пучков-близнецов используется импульсная накачка. Если длина когерентности накачки составляет единицы пикосекунд, то важную роль начинает играть согласование групповых скоростей накачки и пучков-близнецов [20, 21]. Учет расплывания импульсов пучков-близнецов или отставания импульса накачки от них из-за дисперсии групповых скоростей крайне важен при использовании оптических схем с несколькими нелинейными кристаллами [22–25], а также при генерации широкополосных пучков-близнецов в кристаллах с апериодической доменной структурой [25–28]. В данной работе теоретически исследовано, как от параметров импульса накачки и дисперсионных свойств кристалла зависит скорость распространения пучков-близнецов в процессе их генерации в нелинейном кристалле с периодической или апериодической доменной структурой и их форма на выходе из него.

Рассмотрим процесс генерации бифотонного излучения при коллинеарном параметрическом взаимодействии в нелинейном кристалле под действием накачки с центральной частотой $\omega_p = 2\omega_0$. В случае линейного распространения импульсы излучения на частотах $\omega_0 \pm \Omega$, вошедшие в кристалл вместе с импульсом накачки, на выходе были бы смещены относительно импульса накачки в соответствии с дисперсией групповых скоростей. Для примера на рис. 1 показано время прохождения импульсов с разными частотами через кристалл ниобата лития (легированного 5 % оксида магния) толщиной $L = 5$ мм. Одна-

[1)]e-mail: vysogota@gmail.com

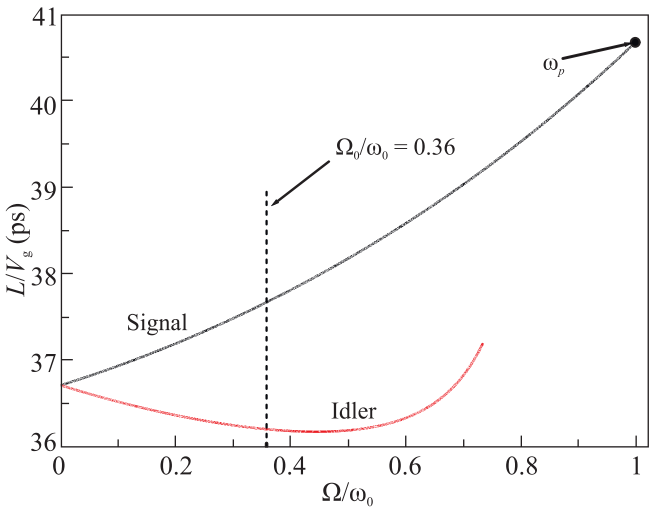

Рис. 1. (Цветной онлайн) Время линейного прохождения импульсов с различными частотами $\omega_0 \pm \Omega$ через кристалл ниобата лития толщиной $L = 5$ мм. Частота ω_0 соответствует длине волны $\lambda_0 = 1064$ нм. Для частоты $\Omega_0 = 0.36\omega_0$ импульс на частоте сигнального излучения $\omega_0 + \Omega$ обгоняет импульс накачки на 3.0 пс, а на сопряженной холостой частоте $\omega_0 - \Omega$ – на 4.4 пс

ко процесс нелинейного взаимодействия вносит дополнительное изменение фазы распространяющихся через кристалл волн и тем самым меняет их эффективную групповую скорость.

Для начала рассмотрим решение в случае непрерывной накачки. Положительно-частотную часть рассеянного поля запишем в виде

$$E^{(+)}(t,z) = e^{-i\omega_0 t}\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{a}(\Omega,z)e^{i\{k(\omega_0+\Omega)z-\Omega t\}}d\Omega, \quad (1)$$

где $\hat{a}(\Omega,z)$ – оператор уничтожения фотонов на частоте $\omega_0+\Omega$, причем компоненты с $\Omega > 0$ относятся к сигнальной, а с $\Omega < 0$ – к холостой части рассеянного излучения. Эволюция операторов поля в кристалле описывается уравнениями

$$\frac{\partial \hat{a}(\Omega,z)}{\partial z} = i\gamma \hat{a}^+(-\Omega,z)e^{i\Delta(\Omega)z-iKz}, \quad (2)$$

где коэффициент γ пропорционален амплитуде поля накачки и величине квадратичной восприимчивости, расстройка фазового синхронизма $\Delta(\Omega) = k_p - k(\omega_0+\Omega) - k(\omega_0-\Omega)$, а K – вектор обратной решетки доменной структуры, наведенной в кристалле и обеспечивающей замыкание квазисинхронизма $\Delta(\Omega_0) = K$ на некоей частоте Ω_0. Несложно получить решение уравнения (2) в виде

$$\hat{a}(\Omega,z) = A(\Omega,z)\hat{a}(\Omega,z) + B(\Omega,z)\hat{a}^+(-\Omega,0), \quad (3)$$

где коэффициенты преобразования Боголюбова имеют вид:

$$\begin{cases} A(\Omega,z) = e^{iq(\Omega)z}\Big\{\cos\big(z\sqrt{q^2(\Omega)-|\gamma|^2}\big) - \\ \quad - iq(\Omega)z\,\mathrm{sinc}\big(z\sqrt{q^2(\Omega)-|\gamma|^2}\big)\Big\}, \\ B(\Omega,z) = i\gamma z e^{iq(\Omega)z}\mathrm{sinc}\big(z\sqrt{q^2(\Omega)-|\gamma|^2}\big). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $q(\Omega) = \{\Delta(\Omega) - K\}/2$. Если и сигнальное, и холостое поле на входе в кристалл находятся в вакуумном состоянии, то интенсивность поля на выходе определяется только коэффициентом $B(\Omega,z)$, и для ее расчета достаточно только части выражения для $E^{(+)}(t,z)$:

$$E^{(+)}(t,z) \to i\gamma z\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\left\{\frac{k(\omega_0+\Omega)-k(\omega_0-\Omega)+k_p-K}{2}z-(\omega_0+\Omega)t\right\}}\times$$

$$\times\,\mathrm{sinc}\left\{z\sqrt{q^2(\Omega)-|\gamma|^2}\right\}\hat{a}^+(-\Omega,0)d\Omega. \quad (5)$$

Выражение имеет форму волнового пакета, однако роль эффективного волнового вектора поля играет комбинация волновых векторов на разных частотах. Казалось бы, отсюда следует, что эффективные групповые скорости сопряженных сигнальной и холостой мод должны быть равны:

$$V_g^{(\mathrm{eff})}(\omega_0\pm\Omega) = \left\{\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\frac{k(\omega_0+\Omega)-k(\omega_0-\Omega)}{2}\right)\right\}^{-1} =$$

$$= \frac{2}{V_g^{-1}(\omega_0+\Omega)+V_g^{-1}(\omega_0-\Omega)}. \quad (6)$$

Это, однако, умозрительный вывод, имеющий в основном методическое значение – в случае непрерывной накачки средняя интенсивность рассеянного излучения, рассчитанная с помощью выражения (5), также будет постоянна.

Теперь учтем импульсный характер накачки $E_p(t) = E_0 f(t)e^{-i\omega_p t} \equiv E_0 e^{-i\omega_p t}\int f(\nu)e^{-i\nu t}d\nu$. Ненулевая ширина спектра накачки усложняет уравнения, определяющие эволюцию операторов рассеянного поля в кристалле:

$$\frac{\partial \hat{a}(\Omega,z)}{\partial z} = i\gamma\int f(\nu)\hat{a}^+(\nu-\Omega,z)e^{i\Delta(\Omega,\nu)z-iKz}d\nu. \quad (7)$$

Расстройка синхронизма теперь учитывает как частоту рассеянного поля, так и частоту накачки: $\Delta(\Omega,\nu) = k(\omega_p+\nu) - k(\omega_0+\Omega) - k(\omega_0+\nu-\Omega)$. В этом случае каждая спектральная компонента сигнального излучения связана с целой полосой компонент в спектре холостого излучения, и наоборот. Связь между операторами рассеянного излучения на

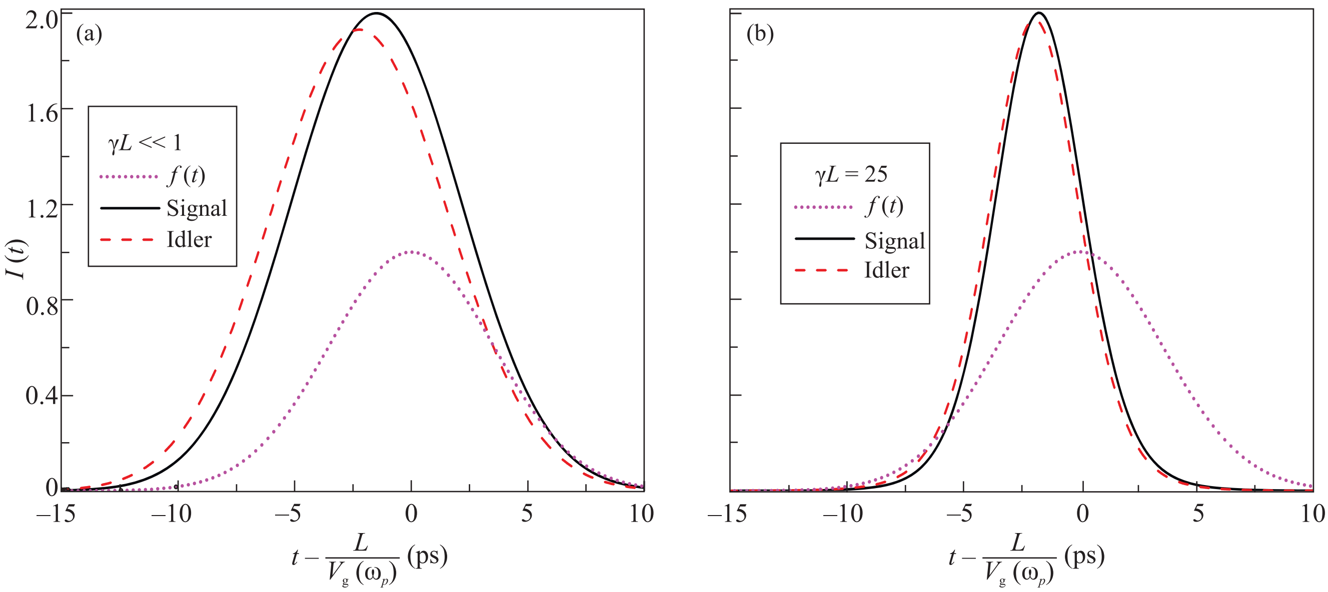

Рис. 2. (Цветной онлайн) Форма импульсов сигнального и холостого излучения с центральной частотой $\omega_0 \pm \Omega$ ($\Omega_0/\omega_0 = 0.36$) на выходе из кристалла ниобата лития для случаев – предельно малого $\gamma L \ll 1$ (a) и большого $\gamma L \approx 25$ (b) коэффициентов параметрического усиления. Для сравнения импульсы нормированы так, чтоб высота импульсов сигнального излучения в обоих случаях была одинакова. Мелким пунктиром показана форма импульса накачки $f(t)$ с $\tau = 5$ пс

выходе из кристалла и операторами на входе теперь определяется матрицей рассеяния [29]:

$$\hat{a}(\Omega, z) = \int \{A(\Omega,\nu,z)\hat{a}(\nu+\Omega,0) + + B(\Omega,\nu,z)\hat{a}^{+}(\nu-\Omega,0)\}d\nu. \quad (8)$$

Найти аналитическое решение системы уравнений (7) уже не представляется возможным. Однако несложно записать приближенное решение при малых величинах коэффициента усиления $\gamma L \ll 1$ [21], описывающее спонтанное параметрическое рассеяние:

$$\hat{a}(\Omega, z) \approx \hat{a}(\Omega, 0) - \gamma z \times \times \int f(\nu)\mathrm{sinc}\{q(\Omega,\nu)z\}\hat{a}^{+}(\nu-\Omega,0)e^{iq(\Omega,\nu)z}d\nu, \quad (9)$$

где снова $q(\Omega,\nu) = \{\Delta(\Omega,\nu) - K\}/2$. Теперь можно записать выражение для средней интенсивности сигнального излучения

$$I_S(t,z) = \langle \mathrm{vac}|E_S^{(-)}(t,z)E_S^{(+)}(t,z)|\mathrm{vac}\rangle = = \int_0^{\omega_0} d\Omega \iint d\nu d\nu' B^*(\Omega+\nu,\nu'+\nu,z) \times \times e^{i\{k(\Omega+\nu)-k(\Omega)\}z-i\nu t} = \gamma^2 z^2 \int_0^{\omega_0} d\Omega \times \left[\iint d\nu' d\nu e^{i\{k(\omega_0+\Omega+\nu)-k(\omega_0+\Omega)+k(\omega_p+\nu'+\nu)-k(\omega_p+\nu')\}\frac{z}{2}-i\nu t} \times \times f^*(\nu')f(\nu'+\nu)\mathrm{sinc}\{q(\Omega,\nu')z\}\mathrm{sinc}\{q(\Omega+\nu,\nu'+\nu)z\}\right], \quad (10)$$

и аналогичное выражение – для интенсивности холостого излучения. Пределы интегрирования по частоте ν определяются шириной спектра накачки, т.е. скоростью спадания функции $f(\nu)$. В дальнейшем мы будем считать, что она имеет гауссову форму $f(\nu) = \exp(-\tau^2\nu^2/2)$, где τ – длина импульса накачки. При любых разумных величинах τ можно считать, что $|\nu| = \tau^{-1} \ll \omega_0$. Форма импульса рассеянного излучения определяется спектром накачки $f(\nu)$ и функциями $\mathrm{sinc}\{q(\Omega,\nu)z\}$, играющими роль формфактора процесса рассеяния. Раскладывая фазовый множитель в ряд по степеням ν, несложно увидеть, что эффективная групповая скорость рассеянного излучения на частоте $\omega_0 + \Omega$ зависит от групповой скорости как на этой частоте, так и на частоте накачки:

$$V_g^{(\mathrm{eff})}(\omega_0+\Omega) = = \left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{k(\omega_0+\Omega+\nu)+k(\omega_p+\nu)}{2}\right)\right\}^{-1} = = \frac{2}{V_g^{-1}(\omega_0+\Omega)+V_g^{-1}(\omega_p)}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что импульсы рассеянного излучения на выходе из нелинейного кристалла обгоняют импульс накачки на интервалы времени, которые в два раза меньше, чем в случае их линейного распространения (см. рис. 1).

Решение при произвольных значениях коэффициента параметрического усиления может быть получено численно. Подставляя преобразования (8) в уравнения (7), получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A(\Omega,\nu,z)}{\partial z} = \\ = i\gamma \displaystyle\int f(\nu')B^*(\nu'-\Omega,\nu+\nu',z)e^{2iq(\Omega,\nu')z}d\nu', \\ \dfrac{\partial B^*(-\Omega,\nu,z)}{\partial z} = \\ = -i\gamma \displaystyle\int f^*(\nu')A(\nu'+\Omega,\nu-\nu',z)\times \\ \times e^{-2iq(-\Omega,\nu')z}d\nu'. \end{cases} \tag{12}$$

Эта система уравнений интегрировалась численно сразу для всех спектральных компонент рассеянного излучения. Подставляя полученные таким образом элементы матрицы рассеяния $B(\Omega,\nu,z)$ в выражение для средней интенсивности рассеянного излучения (10), можно найти форму импульсов пучков-близнецов, возникающих при прохождения импульса накачки через нелинейный кристалл при различных коэффициентах усиления. На рисунке 2 показана форма импульсов сигнального и холостого излучения на выходе из кристалла ниобата лития в случае, когда импульс накачки имеет длину $\tau = 5$ пс, а квазисинхронизм замыкается на частоте $\Omega_0/\omega_0 = 0.36$.

В случае предельно малого коэффициента усиления $\gamma L \ll 1$ (рис. 2a) форма импульсов соответствует аналитическому решению (10). Время, на которое импульсы сигнального и холостого излучения в этом случае обгоняют импульс накачки, действительно в два раза меньше, чем при линейном распространении на рис. 1. При большом коэффициенте параметрического усиления $\gamma L \approx 25$ (рис. 2b) оба импульса становятся заметно уже. Это связано с тем, что чем больше коэффициент усиления, тем больше спектральных компонент рассеянного излучения перемешаны матрицей рассеяния (8): коэффициенты $A(\Omega,\nu,z)$ и $B(\Omega,\nu,z)$ как функции ν оказываются существенно шире спектра накачки $f(\nu)$. Кроме того, максимумы импульсов в этом случае практически совпадают.

Как было отмечено выше, форма импульсов рассеянного излучения определяется спектром накачки $f(\nu)$ и функцией, играющей роль форм-фактора процесса рассеяния в кристалле. Определяющее значение имеет более узкая из них. В случае $\tau = 5$ пс спектр накачки еще достаточно узок, поэтому форма импульсов на рис. 2a похожа на форму импульса накачки. Однако чем короче импульс накачки, тем сильнее форма импульсов пучков-близнецов будет зависеть от размера кристалла и его дисперсионных свойств.

На рисунке 3 показана форма импульсов рассеянного излучения, возникших под действием импульса

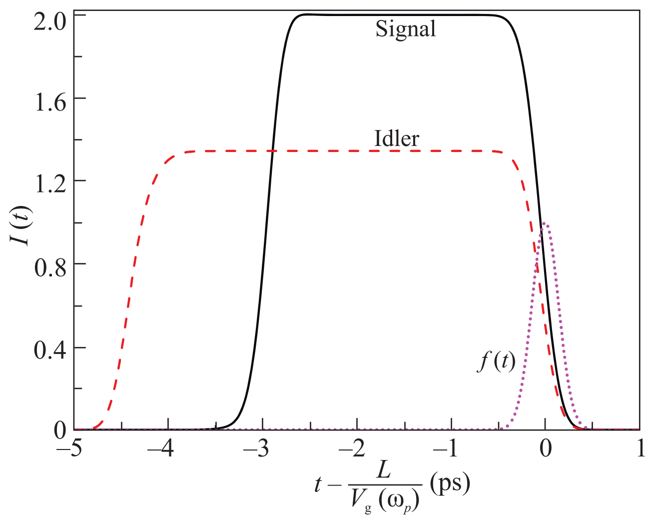

Рис. 3. (Цветной онлайн) Форма импульсов сигнального и холостого излучения на выходе из кристалла ниобата лития, возникших под действием импульса накачки длиной $\tau = 2$ пс

накачки длиной $\tau = 0.2$ пс. Почти прямоугольную форму импульсов в этом случае можно объяснить тем, что узкий импульс накачки, проходя через кристалл, с равной вероятностью рождает бифотонную пару в каждой точке кристалла. Излучение, родившееся в начале кристалла, обгоняет накачку в соответствии с линейной дисперсией групповых скоростей. Излучение, родившееся в самом конце кристалла, выходит из него вместе с импульсом накачки. При этом, как и следует из (11), "центр тяжести" импульсов находится посередине – т.е. совпадает с положением максимумов импульсов в случае длинного импульса накачки. Следует отметить, что в данном случае форма импульсов практически не зависит от коэффициента параметрического преобразования.

Безусловно, измерение формы и взаимного расположения выходящих из кристалла импульсов на пикосекундной шкале времен с экспериментальной точки зрения представляет собой сложную проблему. Однако взаимное смещение импульсов излучения существенно влияет на процессы их нелинейного взаимодействия. Как уже говорилось выше, особенно это проявляется в схемах с несколькими нелинейны-

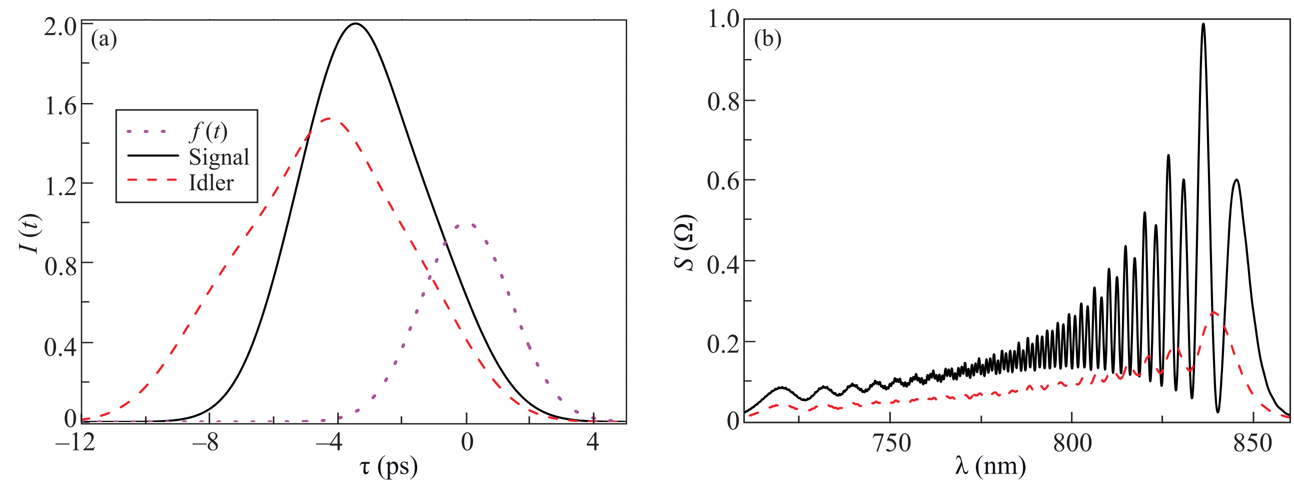

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Форма импульсов широкополосных пучков-близнецов, возникших при параметрическом рассеянии последовательно в двух кристаллах ниобата лития с апериодической доменной структурой с законом изменения вектора обратной решетки (13) под действием импульса накачки длиной $\tau = 2$ пс. (b) – Спектр импульса сигнального излучения как функция длины волны $\lambda = 2\pi c/(\omega_0 + \Omega)$ после прохождения одного (пунктир) и двух (сплошная линия) кристаллов

ми кристаллами. В работе [25] экспериментально исследовалась интерференционная картина в спектре широкополосных пучков-близнецов, возникших при параметрическом рассеянии в двух последовательно расположенных нелинейных кристаллах ниобата лития с апериодической доменной структурой.

Широкий спектр рассеянного излучения в этом случае достигается за счет медленного изменения обратного вектора решетки доменной структуры $K(z)$. Поэтому в разных областях кристалла квазисинхронизм замыкается на разных частотах. В случае двух кристаллов интерференция между излучением на одной и той же частоте, родившимся в разных кристаллах, зависит от набега фаз сразу трех волн – на этой частоте, на сопряженной ей, и на частоте накачки. Однако если за время распространения от одного кристалла к другому импульс накачки отстанет от излучения, родившегося в первом кристалле – интерференция пропадет.

В работе [25] использовались кристаллы с квадратично-гиперболическим законом изменения обратного вектора решетки, предложенным ранее в работе [26]:

$$K(z) = \beta - \frac{\alpha}{4(1+z/L)^2}. \tag{13}$$

Если расстройку синхронизма в кристалле можно аппроксимировать квадратичной зависимостью $\Delta(\Omega) \approx \beta - \alpha(\Omega/\omega_0)^2$, то закон изменения обратного вектора решетки (13) обеспечивает генерацию пучков-близнецов со спектром частот в диапазоне $0.25 < \Omega/\omega_0 < 0.5$, и при этом приводит к квадратичной зависимости фазы коэффициента $B(\Omega, z)$ от частоты, что удобно для ее компенсации в экспериментальных условиях.

Кристаллы в работе [25] были ориентированы поразному: если в первом кристалле период доменов уменьшался от начала к концу, то во втором кристалле он, наоборот, увеличивался. Благодаря этому расстояние между областями кристаллов с малым периодом было достаточно небольшим, чтобы накачка не успевала отстать от рассеянного излучения. Поэтому видность трехчастотной интерференции для спектральных компонент рассеянного излучения, рождавшихся в этих областях кристалла, не уменьшалась.

Форму импульсов, возникших при прохождении импульса накачки через два нелинейных кристалла с доменной структурой (13), а также их спектр можно получить путем численного интегрирования уравнений (12), в которых выражение $2q(\Omega,\nu)z$ заменено на $\Delta(\Omega,\nu)z - \int_0^z K(z')dz'$. На рисунке 4a показана полученная таким образом форма импульсов широкополосных пучков-близнецов на выходе из второго кристалла в случае, когда длина импульса накачки составляет $\tau = 2$ пс, а коэффициент параметрического усиления $\gamma L \approx 25$. Видно, что форма импульсов заметно отличается от гауссовой формы импульса накачки (особенно это проявляется для импульса холостого излучения). При этом разным частям импульсов соответствуют различные частоты, родившиеся в разных областях кристаллов. В середине импульсов находятся спектральные компоненты, родившиеся в областях с малым периодом доменной структуры, тогда как на их крыльях - спектральные компоненты, родившиеся в областях с большим периодом.

На рисунке 4b показан спектр импульса сигнального излучения $S(\Omega) = \int |B(\Omega, \nu)|^2 d\nu$ как функция длины волны $\lambda = 2\pi c/(\omega_0 + \Omega)$на выходе из первого и из второго кристаллов. Хорошо видно, что после второго кристалла в длинноволновой области спектра наблюдается картина трехчастотной интерференции, однако при смещении в коротковолновую область ее видность спадает до нуля – по мере того, как расстояние между областями кристалла, в которых рождается эта часть спектра, растет, и увеличивается отставание накачки от импульсов рассеянного излучения. К сожалению, в работе [25] интерференция была зафиксирована только в небольшой области спектра, и изменение видности интерференционной картины с изменением длины волны в эксперименте пока что не наблюдалось.

Таким образом, для формирования волновых пакетов пучков-близнецов при параметрическом рассеянии под действием импульсной накачки существенную роль играют два фактора: перемешивание различных спектральных компонент в рассеянном излучении (8) и дополнительный нелинейный фазовый набег для каждой спектральной компоненты. В результате форма импульсов пучков-близнецов определяется как спектром импульса накачки, так и форм-фактором процесса рассеяния (10), причем определяющей является более узкая из этих функций, а их эффективные групповые скорости при распространении через нелинейный кристалл заметно отличаются от линейных групповых скоростей на соответствующих частотах.

В случае спонтанного параметрического рассеяния в однородном кристалле бифотонные пары с равной вероятностью рождаются в любой точке кристалла, поэтому в среднем они проходят половину длины кристалла. В результате их эффективная групповая скорость определяется средним арифметическим обратных групповых скоростей на частоте рассеянного излучения и на частоте накачки (11).

В случае вынужденного режима параметрического рассеяния родившееся ранее излучение участвует в процессе рассеяния, что приводит к дополнительному перемешиванию спектральных компонент в рассеянном излучении. Это перемешивание определяется свойствами матрицы рассеяния (8), которая может быть найдена численно. В результате импульсы пучков-близнецов становятся заметно уже импульса накачки, а различие их эффективных групповых скоростей уменьшается (рис. 2b).

Относительные скорости распространения импульсов накачки и рассеянного излучения имеют большое значение для процессов их нелинейного взаимодействия. Так, при генерации широкополосных пучков-близнецов в схеме с двумя кристаллами с апериодической доменной структурой трехчастотная интерференция наблюдается только до тех пор, пока импульс накачки не отстанет от импульсов рассеянного излучения. Поэтому видность интерференционной картины в схеме типа нелинейного интерферометра Маха–Цандера, использованной в работе [25], должна уменьшаться в соответствии с зависимостью, показанной на рис. 4.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 20-02-00621 А.

1. A. Allevi and M. Bondani, Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics **66**, 49 (2017).
2. A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, Phys. Rev. Lett. **59**, 2555 (1987).
3. T. Debuisschert, S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre, Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B **1**, 3 (1989).
4. O. Jedrkiewicz, Y.-K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. A. Lugiato, P. Di Trapani, Phys. Rev. Lett. **93**, 243601 (2004).
5. M. Bondani, A. Allevi, G. Zambra, M. G. A. Paris, and A. Andreoni, Phys. Rev. A **76**, 013833 (2007).
6. I. N. Agafonov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. A **82**, 011801(R) (2010).
7. O. Haderka, J. Perina, Jr., M. Hamar, and J. Perina, Phys. Rev. A **71**, 033815 (2005).
8. E. Waks, B. C. Sanders, E. Diamanti, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **73**, 033814 (2006).
9. J. Perina, J. Krepelka, J. Perina Jr., M. Bondani, A. Allevi, and A. Andreoni, Phys. Rev. A **76**, 043806 (2007).
10. W. Mauerer, M. Avenhaus, W. Helwig, and C. Silberhorn, Phys. Rev. A **80**, 053815 (2009).
11. A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, and P. Nussenzveig, Phys. Rev. Lett. **95**, 243603 (2005).
12. T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009).
13. A. Gatti, E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz, and L. A. Lugiato, Phys. Rev. Lett. **102**, 223601 (2009).
14. K. Yu. Spasibko, F. Toppel, T. Sh. Iskhakov, M. Stobinska, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, New J. Phys. **16**, 013025 (2014).

15. G. Brida, M. Genovese, and I. Ruo Berchera, Nature Photon. **4**, 227 (2010).
16. M. Bondani, A. Allevi, and A. Andreoni, Eur. Phys. J. Spec. Top. **203**, 151 (2012).
17. E.D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I.P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, and M. Genovese, Phys. Rev. Lett. **110**, 153603 (2013).
18. A. Meda, I. Ruo-Berchera, I.P. Degiovanni, G. Brida, M.L. Rastello, and M. Genovese, Appl. Phys. Lett. **105**, 101113 (2014).
19. T. Sh. Iskhakov, V. C. Usenko, R. Filip, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. A **93**, 043849 (2016).
20. A.M. Perez, K.Yu. Spasibko, P.R. Sharapova, O.V. Tikhonova, G. Leuchs, and M.V. Chekhova, Nature Commun. **6**, 7707 (2015).
21. A. Gatti, T. Corti, and E. Brambilla, Phys. Rev. A **92**, 053809 (2015).
22. S. Lemieux, M. Manceau, P.R. Sharapova, O.V. Tikhonova, R.W. Boyd, G. Leuchs, and M.V. Chekhova, Phys. Rev. Lett. **117**, 183601 (2016).
23. M.V. Chekhova and Z.Y. Ou, Advances in Optics and Photonics **8**, 104 (2016).
24. Y. Shaked, Y. Michael, R.Z. Vered, L. Bello, M. Rosenbluh, and A. Pe'er, Nature Commun. **9**, 609 (2018).
25. D.B. Horoshko, M.I. Kolobov, F. Gumpert, I. Shand, F. Konig, and M.V. Chekhova, J. Mod. Optics **67**, 41 (2020).
26. D.B. Horoshko and M.I. Kolobov, Phys. Rev. A **95**, 033837 (2017).
27. M.V. Chekhova, S. Germanskiy, D.B. Horoshko, G.Kh. Kitaeva, M.I. Kolobov, G. Leuchs, C.R. Phillips, and P.A. Prudkovskii, Opt. Lett. **43**, 375 (2018).
28. П. А. Прудковский, Письма в ЖЭТФ **107**, 776 (2018).
29. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, Наука, М. (1980).