Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 8, стр. 431 – 433 *25 апреля 1989 г.*

СВЕРХСИЛЬНЫЙ ВОЛНОВОЙ КОЛЛАПС

В.Е.Захаров, Н.Е.Косматов, В.Ф.Швец

Показано, что волновой коллапс, описываемый нелинейным уравнением Шредингера, может приводить к формированию "горящей точки", поглощающей энергию из окружающего пространства. Изучены различные режимы такого "сверхсильного" коллапса.

1. В теории волновых коллапсов уже высказывались идеи [1–3], что в результате коллапса образуется долгоживущая, локализованная во всех измерениях зона диссипации малого размера (горящая точка), поглощающая волновую энергию из окружающего пространства. Эффект этот назывался "эффектом воронки" [1], "эффектом нуклеации" [2], "распределенным коллапсом" [3]. В настоящей статье мы предлагаем для этого весьма важного с разных точек зрения эффекта название сверхсильный коллапс. Мы обсуждаем вопрос о возникновении сверхсильного коллапса в наиболее фундаментальной модели волнового коллапса – нелинейном уравнении Шредингера (НУШ) при выполнении максимальной пространственной симметрии

$$i\psi_t + \psi_{rr} + \frac{d-1}{r}\psi_r + |\psi|^s\psi = 0. \tag{1}$$

Размерность пространства d полагается произвольной (возможно дробной).

Коллапс в рамках уравнения (1) имеет место, если $sd \geqslant 4$. При $sd = 4$ ("критический случай"[4–7]) коллапс является сильным – в точку коллапса попадает фиксированная энергия, конечная часть которой диссипирует, после чего режим коллапса сменяется режимом разлета. При $sd > 4$ ("сверхкритический коллапс") приближение к точке коллапса происходит по автомодельному закону

$$\psi(r,t) = (t_0 - t)^{-1/s - i\kappa} g\left(\frac{r}{\sqrt{t_0 - t}}\right). \tag{2}$$

Справедливость этого утверждения была подтверждена рядом численных экспериментов [6–8]. Если после коллапса в этом случае также происходит разлет, то коллапс является слабым – диссипирующая в зоне коллапса энергия обращается в нуль при уменьшении коэффициента нелинейного затухания. Фактически, однако, коллапс является слабым только при выполнении неравенства

$$4 < sd < 2s + 2, \quad s > 1. \tag{3}$$

В противоположном случае $sd \geqslant 2s + 2$ (имеющем место только при $d > 2$) в результате развития коллапса может осуществиться сверхсильный коллапс – формирование горящей точки, поглощающей энергию квазистационарным образом.

2. Эта возможность обеспечивается тем, что при $sd > 2s + 2$ уравнение (1) имеет точное сингулярное решение

$$\psi = \frac{A}{r^{2/s}}, \qquad A = \left[\frac{2}{s^2}(sd - 2s - 2)\right]^{1/s}. \tag{4}$$

При $2s + 2 < sd < 2s + 4$ наряду с решением (4) имеется семейство стационарных сингулярных решений, имеющих при $r \to 0$ асимптотику

$$|\psi| = \frac{A}{r^{2/s}}(1 + A_1 r^{\mu} + \dots), \qquad \mu = \frac{2}{s}(2s + 4 - sd) > 0, \qquad A_1 = qP^2, \tag{5}$$

где $P = -\lim\limits_{r\to 0} |\psi|^2 r^{d-1}\dfrac{d}{dr}Arg\,\psi$ – поток энергии в особенность (см. также [9]; выражение для константы $q = q(s, d) > 0$ мы не приводим). Для $d = 3$ указанный случай осуществляется при показателях нелинейности $2 < s < 4$. В случае $sd = 2s+4$ ($s = 4$ при $d = 3$) уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство стационарных сингулярных решений, для которых

$$|\psi| = \frac{B}{r^{2/s}}, \qquad B^4 \left[B^s - \left(\frac{2}{s}\right)^2\right] = P^2 , \tag{6}$$

а при $sd > 2s + 4$ решение (4) является изолированным, но уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство "квазиклассических" (в смысле статьи [10]) решений с асимптотикой

$$|\psi| = \frac{c}{r^\gamma}(1 + C_1 r^\nu + \dots), \tag{7}$$

где $C = P^\alpha$, $\gamma = \alpha(d-1)$, $\nu = \alpha(sd - 2s - 4) > 0$; $\alpha = \dfrac{2}{s+4}$, $C_1(s, d) > 0$.

Наконец, на нижнем пределе рассматриваемой области параметров $sd = 2s + 2$ (частный, но физически наиболее важный вариант которого $d = 3$, $s = 2$ рассматривался в работах [3, 9]) может иметь место специальное стационарное решение

$$|\psi| = \frac{(2/s^2)^{1/s}}{r^{2/s}\,|\ln r|^{1/s}} , \tag{8}$$

в окрестности которого также существует семейство сингулярных решений с потоком. Существование сингулярных стационарных решений уравнения (1) с ненулевым потоком аналогично известному в квантовой механике явлению "падения на центр" (см., например, [11]). Поскольку поглощение энергии при формировании таких решений может значительно превосходить (за достаточно длительное время) поглощение энергии в единичном сильном коллапсе, разумно называть такие режимы сверхсильными коллапсами.

3. Для проверки факта установления стационарных режимов сверхсильного коллапса мы проводили численное интегрирование уравнения (1), дополненного слагаемым вида $i\beta|\psi|^m\psi$, что отвечает введению нелинейного затухания, сосредоточенного вблизи особенности $r \approx 0$. Расчеты велись в переменных $\dfrac{d\tau}{dt} = |\psi(0,\tau)|^s$, $\xi = r|\psi(0,\tau)|^{s/2}$ по методике [5, 7]. Ниже представлены результаты для $s = 2$, $\beta = 10^{-9}$, $m = 6$ и $\psi(r, 0) = \exp(-r^2/16)$. Размерность d изменялась в пределах $2,5 \leqslant d \leqslant 5$, так что сетка вариантов покрывала все возможные режимы динамики. При фиксации размерности $d = 3$ и варьировании s качественная картина не меняется.

Во всех вариантах мы наблюдали уверенный выход решения на моду слабого автомодельного коллапса в инерционном интервале, до включения на уровне $|\psi(0,\tau)|^2 \sim 10^4 - 10^5$ нелинейного затухания. Из рис. 1, на котором представлены зависимости амплитуды в центре от времени, видно, что поведение решения при $d = 2{,}5$ характерно для обычного сценария слабого коллапса; после выгорания энергии начинается разлет. При $d = 3$ наблюдается колебательный режим, который условно можно считать квазистационарным. Для вариантов $d = 3{,}5$, $d = 4$, $d = 5$ поведение амплитуды близко к стационарному. Таким образом, гипотеза о существовании горящих точек эффективно подтверждается. Мы получили также согласие пространственного поведения установившейся моды коллапса приведенным выше формулам. Так, из рис. 2 видно, что величина $F(\xi) = \xi^\gamma \dfrac{|\psi(\xi,\tau)|}{|\psi(0,\tau)|^{\gamma s/2}}$ (для представленных вариантов $\gamma = 2/s = 1$) за пределами эффективного радиуса действия нелинейного затухания практически перестает зависеть от пространственной переменной. Наконец, существование стационарных сингулярных решений (5) – (7) уравнения (1) подтверждено нами посредством прямого численного интегрирования стационарного уравнения с разрывным коэффициентом затухания $\beta = \beta_0\,\theta(r_0 - r)$, $r_0 \ll 1$.

Подчеркнем, что горящие точки, питаемые постоянным потоком энергии, могут существовать независимо от степени нелинейности только при $d > 2$ (реально, для трехмерных физических систем). В случаях $d \leqslant 2$ возможен (при $sd > 4$) только слабый коллапс, который и наблюдался в работе [8] при изучении уравнения (1) с $d = 1$ и $s = 6$ в качестве предполагаемой модели трехмерной задачи. Теперь ясно, что такое предположение оказывается неоправданным, и постоянство произведения sd не гарантирует качественного сходства поведения решений при понижении размерности.

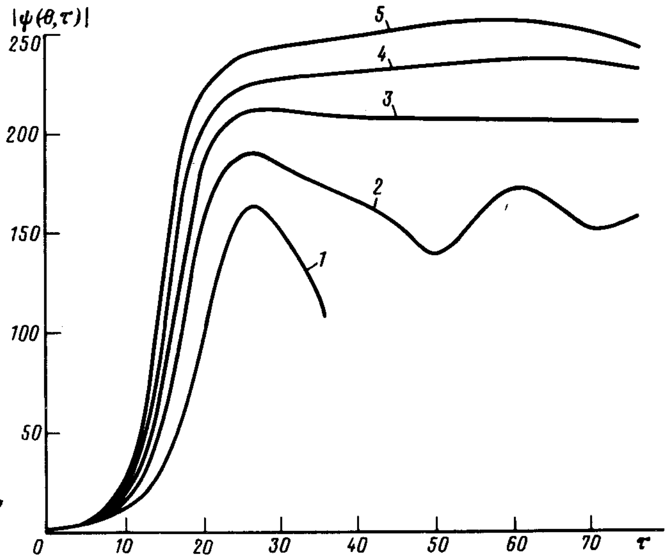

Рис. 1

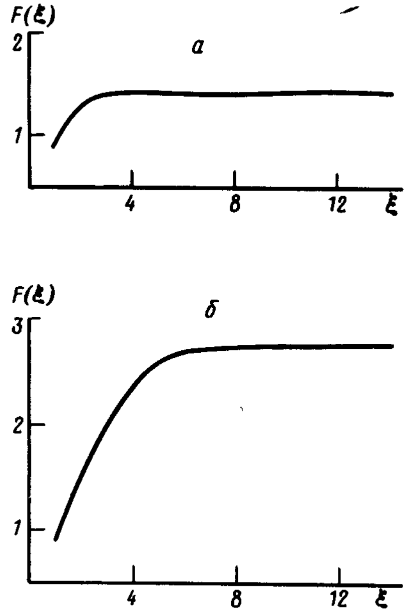

Рис. 2

Рис. 1. Эволюция поля в центре для $s = 2$ и различных вариантов: $1 - d = 2{,}5$; $2 - d = 3$; $3 - d = 3{,}5$; $4 - d = 4$; $5 - d = 5$

Рис. 2. Пространственная структура решения в квазистационарном состоянии для вариантов: $а - d = 3{,}5$; $б - d = 4$

Отметим в заключение, что квазистационарность режима сверхсильного коллапса понимается нами в смысле заметного превышения времени жизни режима над временем предшествующей динамики в инерционном интервале.

Литература

1. *Захаров В.Е., Щур Л.Н.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 2019.
2. *Doolen G.D., DuBois D.F., Rose H.A.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 804.
3. *Vlasov S.V., Piskunova L.I., Talanov V.I.* In: Nonlin.and Turb. Proc. in Physics, 1988, **2**, 210, *Kiev.*
4. *Rypdal K., Rasmussen J.J.* Physica Scripta, 1986, **33**, 498.
5. *Захаров В.Е., Швец В.Ф.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 227.
6. *McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L.* Phys. Rev. A, 1986, **34**, 1200.
7. *Kosmatov N.E., Petrov I.V., Shvets V.F., Zakharov V.E.* Preprint N°1365, Space Research Institute, 1988.
8. *Захаров В.Е., Литвак А.Г., Ракова Е.Н. и др.* ЖЭТФ, 1988, **94**, 107.
9. *Малкин В.М.,* Письма в ЖЭТФ, 1988, **48**, 603.
10. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 1310.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1963.

Поступила в редакцию
20 февраля 1989 г.

Научный совет АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика"