

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ $1/f$ -ШУМА В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МЕТАЛЛАХ

Б.Л.Альтшулер, Б.З.Стивак

Показано, что спектр низкочастотного неравновесного электрического шума в макроскопическом образце неупорядоченного металла при малых размерах измерительных контактов существенным образом флуктуирует от реализации к реализации. Рассмотрены классический и квантовый вклады в эти флуктуации.

1. Принято считать, что шум  $1/f$  возникает из-за наличия в образце так называемых двух-уровневых систем (ДУС) — атомов или групп атомов, которые могут находиться в двух относительно устойчивых состояниях. Эти состояния ДУС рассеивают электроны по-разному, поэтому переходы между ними меняют сопротивление образца во времени, т. е. вызывают неравновесные электрические шумы. Естественно думать, что переходы эти происходят случайно с характерным для каждой ДУС временем  $\tau_j$ . Тогда сечение рассеяния электроном  $j$ -й ДУС  $s_j(t) = s_{j0} + \delta s_j(t)$  флуктуирует во времени с лоренцевским спектром

$$\langle \delta s_j(t_1) \delta s_k(t_2) \rangle_{\omega} \equiv \lim_{\theta \rightarrow \infty} (8\pi i \theta)^{-1} \int_{-\theta}^{+\theta} d(t_1 + t_2) \int_{-\infty}^{\infty} d(t_1 - t_2) \delta s_j(t_1) \delta s_k(t_2) \times \\ \times \exp[i\omega(t_1 - t_2)] \propto \delta_{jk} \tau_j [(\omega \tau_j)^2 + 1]^{-1}. \quad (1)$$

Простейший (назовем его классическим) механизм влияния изменения на сопротивление состоит в изменении вблизи  $j$ -й ДУС длины свободного пробега, т. е. флуктуирует локальная проводимость. С другой стороны, остаточное сопротивление образца крайне чувствительно к изменению случайного потенциала из-за эффектов квантовой интерференции<sup>2,3</sup>.

Если в образце всего одна ДУС, то временная зависимость сопротивления  $R(t) = R_0 + \delta R(t)$  имеет вид так называемого телеграфного сигнала:  $R(t)$  принимает всего два значения, а флуктуации имеют лоренцевский спектр. В маленьких образцах  $R(t)$  — совокупность нескольких телеграфных сигналов, а  $\langle \delta R(t_1) \delta R(t_2) \rangle_{\omega}$  — сумма лоренцевских линий<sup>4,5</sup>. Если в образце много ДУС с вкладками одного порядка в  $R(t)$ , то спектр шумов определяется распределением  $P(\tau_j)$  времен релаксации  $\tau_j$

$$\langle \delta R(t_1) \delta R(t_2) \rangle_{\omega} \propto \int P(\tau) [(\omega \tau)^2 + 1]^{-1} \tau d\tau. \quad (2)$$

Считается, что  $P(\tau)$  в очень широком интервале  $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$  имеет вид

$$P(\tau) = g \tau^{-1}; \quad g = [\ln(\tau_{max}/\tau_{min})]^{-1} \quad (3)$$

приводящий при подстановке в (2) к закону  $1/\omega$  для спектра шумов.

Однако даже если размер образца стремится к бесконечности, закон  $1/\omega$  справедлив не всегда. Мы покажем, что при измерении сопротивления **объемным** четырехконтактным методом спектр флуктуаций  $\delta R(t)$  случаен и существенно зависит от расположения ДУС, если размеры контактов малы.

2. Мы начнем с классической задачи. Набору ДУС с временами релаксации  $\tau_j$ , расположенных в точках  $\mathbf{r}_j$  соответствует локальная проводимость

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_0 + \sum_j \delta\sigma_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (4)$$

где  $\delta\sigma_j(t)$  — случайные функции времени с лоренцевским спектром

$$\langle \delta\sigma_j(t_1) \delta\sigma_j(t_2) \rangle_\omega = \delta_{jk} \beta \tau_j [(\omega \tau_j)^2 + 1]^{-1}. \quad (5)$$

Локальное электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и ток  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \delta\mathbf{j}(\mathbf{r})$  определяются из уравнения непрерывности  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , которое, направив внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}_0$  вдоль оси  $x$ , можно записать в виде

$$\text{div } \delta\mathbf{j}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{\partial}{\partial x} \sigma(\mathbf{r}, t) + \sigma_0 \text{div } \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6)$$

Из (4), (5), (6) следует, что флуктуации электрического потенциала  $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)$ , и спектр их шумов выражаются через функцию Грина уравнения Лапласа  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\delta\varphi(\mathbf{r}, t) = E_0 \sigma_0^{-1} \sum_j \delta\sigma_j(t) \frac{\partial}{\partial x} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$$

$$K_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \delta\varphi(\mathbf{r}, t_1) \delta\varphi(\mathbf{r}', t_2) \rangle_\omega = \left(\frac{E_0}{\sigma_0}\right)^2 \sum_j \beta \tau_j \frac{1}{(\omega \tau_j)^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \frac{\partial}{\partial x'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_j). \quad (7)$$

Этот спектр зависит от расположения ДУС  $\{\mathbf{r}_j\}$ , т. е. он — случайная функция  $\omega$ . Усредняя по  $\{\mathbf{r}_j\}$ , можно получить **средний спектр**  $\bar{K}_\omega$  и его автокорреляционную функцию  $Z_{\omega, \omega'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{K_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') K_{\omega'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{K}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{K}_{\omega'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}$  (черта сверху означает усреднение по  $\{\mathbf{r}_j\}$ ). Если  $L$  — размер образца, а  $n$  — концентрация ДУС, совершающих переходы, то

$$\bar{K}_\omega = g\beta n E_0^2 \sigma_0^{-2} I_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{1}{\omega}; \quad Z_{\omega, \omega'} = g\beta^2 n E_0^4 \sigma_0^{-4} \left\{ \ln\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) \frac{I_2}{\omega^2 - \omega'^2} - \frac{gI_1^2}{\omega\omega'} L^{-d} \right\} \quad (8)$$

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \int [\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) / \partial x]^n [\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) / \partial x]^n d\mathbf{r}_0$$

В трехмерном случае ( $d=3$ )  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$  и интегралы по  $\mathbf{r}_0$  в (8) расходятся на нижнем пределе. При  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  их следует обрезать на размере контакта  $a$ . В случае  $L \rightarrow \infty$  второе слагаемое в фигурных скобках (8) можно опустить. В результате

$$\bar{K}_\omega(\mathbf{r} = \mathbf{r}') \propto E_0^2 \beta n (4\pi\sigma_0)^{-2} \frac{1}{\omega a} \left[ \ln\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}\right) \right]^{-1} \quad (9)$$

$$Z_{\omega, \omega'}(\mathbf{r} = \mathbf{r}') \propto \left(\frac{E_0}{4\pi\sigma_0}\right)^4 \frac{\beta^2 n}{a^5} \left[ \ln\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \ln\left(\frac{\omega}{\omega'}\right). \quad (10)$$

Согласно (9), (10) флуктуации спектра значительно больше среднего  $Z_{\omega, \omega'} \gg \bar{K}_\omega^2$ , если выполнено условие  $na^3 \ll \ln(\tau_{max} / \tau_{min})$ .

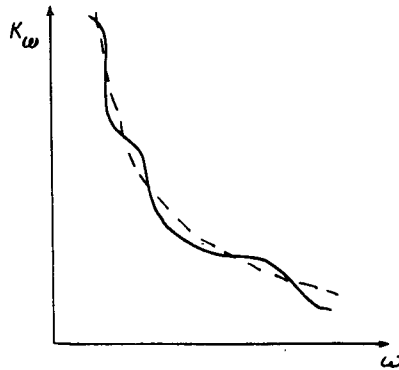
Причина сильных флуктуаций — в быстром спадании  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . Спектр шумов на частоте  $\omega$  определяет ближайшая к точке наблюдения ДУС с  $\tau \approx \omega^{-1}$ . В сфере радиуса  $(ng)^{-1/3}$  есть примерно одна (см. (3)) ДУС с временем релаксации из интервала  $(\tau, 2\tau)$ . Она и определяет  $K_\omega$  при  $\omega\tau \approx 1$ . Случайность в расположении этих ДУС приводит к случайным осцилляциям спектра шумов  $K_\omega$  с характерным "периодом"  $\Delta\omega \approx \omega$  (рисунок). С ростом размера контакта  $a$  амплитуда осцилляций падает и при  $a > (ng)^{-1/3}$ , когда  $K_\omega$  определяется вкладами сразу многих ДУС, становится меньше  $\bar{K}_\omega$ .

В двумерном случае ( $d = 2$ )  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = (2\pi)^{-1} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$  и интеграл  $I_1$  (9) — логарифмический. Если теперь  $n$  — двумерная плотность ДУС, то

$$\bar{K}_\omega(\mathbf{r} = \mathbf{r}') \propto \left(\frac{E_0}{2\pi\sigma_0}\right)^2 \beta n \left[\ln\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}\right)\right]^{-1} \frac{1}{\omega} \ln\left(\frac{L}{a}\right)$$

$$Z_{\omega, \omega'}(\mathbf{r} = \mathbf{r}') \propto \left(\frac{E_0}{2\pi\sigma_0}\right)^4 \beta^2 n \left[\ln\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}\right)\right]^{-1} \frac{1}{a^2(\omega^2 - \omega'^2)} \ln\left(\frac{\omega}{\omega'}\right). \quad (11)$$

Видно, что при  $d = 2$  флуктуации значительно слабее, чем при  $d = 3$ : условие сильных флуктуаций  $nga^2 \ln(L/a) \ll 1$  всегда нарушается при  $L \rightarrow \infty$ , хотя отличие  $K_\omega$  от  $\bar{K}_\omega$  может быть значительным и при очень больших  $L$ . Дело в том, что при  $d = 2$  суммарный вклад ДУС, удаленных от контакта на расстояния от  $r$  до  $2r$ , в  $K_\omega$  от величины  $r$  не зависит.



Спектр шумов при конкретной реализации  $K_\omega$  (сплошная линия) и усредненный по реализациям  $\bar{K}_\omega \propto \omega^{-1}$  (пунктир)

Что касается корреляции  $\delta\varphi$  в разных точках  $r$  и  $r'$ , то  $Z_{\omega, \omega'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg a$  отличается от (11), (1) только заменой  $a$  на  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , т. е.  $Z \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{4-3d}$ .

3. Квантовые эффекты нельзя описать на языке локальной проводимости, но при конечной температуре  $T$  и  $L \rightarrow \infty$  образец можно разбить на кубы, которые ведут себя как независимые классические резисторы. Минимальный размер такого куба  $L_0$  — это либо длина  $L_T = (hD/T)^{1/2}$ , где  $D = l\tau_e/d$  — коэффициент диффузии,  $l$  и  $\tau_e$  — длина и время свободного пробега электрона, либо длина сбоя фазы  $L_\varphi$ . Кондактансы кубов размера  $L_0$  разбросаны на величину порядка  $e^2/h$  <sup>6, 7</sup>.

К сбою фазовой когерентности наряду с другими причинами приводят и "быстрые" ДУС — те, для которых  $\omega\tau \ll 1$ . При этом  $L_0$  определяется из условия равенства числа "быстрых" ДУС в объеме  $L_0^d$  числу  $N_0 = \mathcal{U}_0^{d-2}/\delta s$  примесей, изменение сечения которых на  $\delta s$  меняет кондактанс куба на  $e^2/h$  <sup>2, 3</sup>. Поскольку ДУС с временами релаксации из интервала  $(\omega^{-1}, 2\omega^{-1})$  в  $\ln(1/\omega\tau_{min}) \gg 1$  раз меньше, чем "быстрых", т. е. в объеме  $L_0^d$  их много меньше  $N_0$ , их вклады в  $\delta\varphi$  независимы — вероятность электрону, проходя через куб рассеяться на двух таких ДУС пренебрежимо мала. Поэтому при  $a \gg L_0$  фор-

мулы  $(7 \div 11)$  справедливы, а квантовый вклад в  $\beta$  порядка

$$\beta_q \approx e^2 L_0^4 / h^2 N_0 \quad (a \gg L_0), \quad (12)$$

т. к. при переходе в одной ДУС кондактанс куба меняется на  $e^2/h$ .

С точки зрения классических эффектов размер элементарного куба  $- l$ , а относительное изменение его кондактанса при переходе в одной ДУС  $\approx \delta s l^{1-d}$ . Поэтому классический вклад в  $\beta$  порядка

$$\beta_c \approx \left( \frac{e^2}{h} \frac{\delta s}{\lambda^{d-1}} l^2 \right)^2 \quad (13)$$

( $\lambda$  — длина волны электрона). Отметим, что квантовый вклад в  $\beta$  в отличие от классического линеен по  $\delta s$ . Согласно (12), (13) шум определяется квантовыми эффектами при  $(L_0/l)^{6-d} > l^{d-1} \delta s \lambda^{2-2d}$  (ср., например, <sup>8</sup>).

Если  $a < L_0$ , то в трехмерном случае величина квантового вклада в шум увеличивается по сравнению с (12) в  $L_0/a$  раз. Дело в том, что на масштабах  $< L_0$  изменение проводимости из-за одной ДУС не имеет  $\delta$ -образного вида (4), а спадает степенным образом <sup>9</sup>.

#### Литература

1. Коган Ш.М. УФН, 1985, 145, 285.
2. Альтшулер Б.Л., Спивак Б.З. Письма в ЖЭТФ, 1985, 42, 363.
3. Feng S., Lee P.A., Stone A.D. Phys. Rev. Lett., 1986, 56, 1960.
4. Ralls R.S., Buhman R.A. Phys. Rev. Lett., 1988, 60, 2434.
5. Track K.E., Prober D.E. Jap. J. Appl. Phys., 1987, 26, Suppl. 26 3, 1635.
6. Lee P.A., Stone A.D. Phys. Rev. Lett., 55, p. 1622.
7. Альтшулер Б.Л. Письма в ЖЭТФ, 1985, 42, 530.
8. Гальперин Ю.М., Карпов В.Г., Козуб В.И. ЖЭТФ, 1989, 95.
9. Зюзин А.Ю., Спивак Б.З. ЖЭТФ, 1987, 93, 994.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
20 марта 1989 г.