

## Нелинейная динамика оптического параметрического осциллятора на диполяритах

О. Ф. Васильева<sup>1)</sup>, А. П. Зинган, В. В. Васильев

Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, МД 3300 Тирасполь, Молдова

Поступила в редакцию 29 марта 2020 г.

После переработки 29 марта 2020 г.

Принята к публикации 5 апреля 2020 г.

Изучена динамика диполяритонных состояний в планарном микрорезонаторе при накачке состояния, отвечающего средней диполяритонной ветви. При этом накачка осуществляется двумя лазерными импульсами с близкими частотами. Показано, что в условиях точного резонанса имеют место аperiодические и периодические режимы превращения диполяритонов накачки в диполяритоны холостых и сигнальных мод.

DOI: 10.31857/S1234567820090013

Смешанные экситон-фотонные состояния в планарных полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных состояний с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора, в результате чего формируются верхняя и нижняя микрорезонаторные экситон-поляритонные моды. Большой интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. В [14–18] при исследовании свойств оптического параметрического экситон-поляритонного осциллятора использовались два одинаковых фотона накачки на нижней ветви закона дисперсии. Однако в [19, 20] было показано, что два различных пучка накачки можно конвертировать в два вырожденных на частоте фотонов сигнальной и холостой мод. Наличие двух различных пучков накачки дает большие возможности для генерации сигнального и холостого пучков с наперед заданными свойствами. В [21–23] теоретически изучена динамика поляритонов, когда накачка осуществляется двумя лазерами с близкими частотами. Найдены аperiодические и периодические режимы превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод. Показано, что введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы.

В [24] впервые наблюдалась новая квазичастица-диполяритон – бозонная частица, которая образуется в связанных двойных квантовых ямах в микрорезонаторе. По сравнению с экситон-поляритоном диполяритон является суперпозицией фотона микрорезонатора, прямого и непрямого экситона. Здесь прямой экситон является связанным состоянием электронно-дырочной пары одной и той же ямы, а не прямой экситон образуется путем связывания электрона и дырки соседних ям. Связанное состояние фотона микрорезонатора с прямым и непрямым экситонами приводит к формированию собственных мод системы с тремя ветвями закона дисперсии, нижней, средней и верхней диполяритонными ветвями [25]. Благодаря большому дипольному моменту диполяритона он был предложен в качестве идеальной квазичастицы для генерации терагерцового излучения [26–32].

В [33] была изучена динамика экситон-диполяритонного осциллятора в синфазном режиме по двум каналам рассеяния. Показано, что в условиях точного резонанса имеет место аperiодический режим превращения диполяритонов накачки в диполяритоны холостых и сигнальных мод. В [34] была исследована динамика диполяритонных состояний по трем каналам рассеяния. Показано, что в зависимости от начальной разности фаз и начальных плотностей диполяритонов накачки, сигнальной и холостой моды возможны периодические, аperiодические режимы эволюции, а также покой системы, при отличном от нуля периоде колебаний (накачка осуществлялась в одной точке закона дисперсии). В [35] было предложено использование диполяритонов для генерации терагерцового излучения, за счет возбуждения системы двумя

<sup>1)</sup>e-mail: florina\_of@mail.ru

различными по частоте лазерными импульсами (накачкой).

Цель данного сообщения – изучить динамику диполяритонных возбуждений в режиме параметрического осциллятора на временах, намного меньших времени релаксации возбуждений среды при накачке средней ветви в двух близких по энергии точках закона дисперсии. Мы будем считать, что оба пучка накачки различаются по амплитуде (интенсивности), однако энергии фотонов различаются слабо. Мы считаем, что с помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных диполяритонов. Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования диполяритонов. Квантовая яма вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропусканием, отражением и потерями [24–31, 36]. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации вторичных субимпульсов излучения.

Рассмотрим ситуацию, когда диполяритоны большой плотности возбуждаются на средней ветви закона дисперсии (рис. 1) двумя мощными импульсами

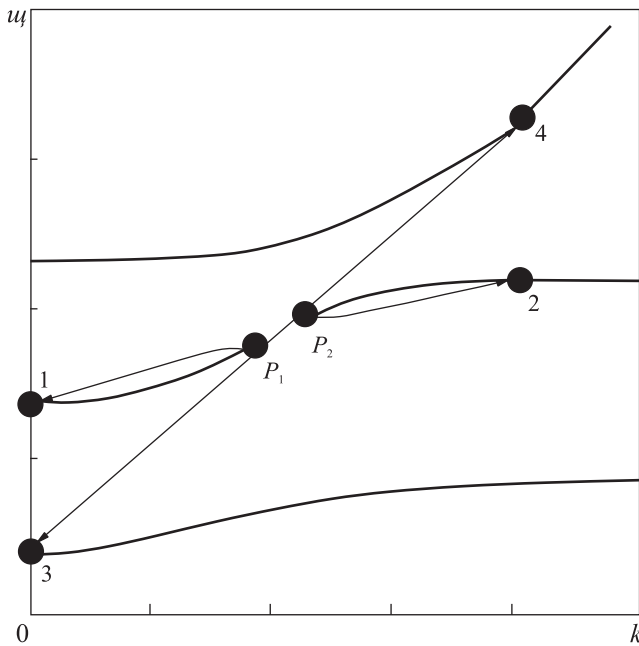


Рис. 1. Энергетическая схема диполяритонов

лазерного излучения (накачкой) [25]. При этом возможны три канала рассеяния диполяритонов, удовлетворяющие законам сохранения энергии и импульса. Один из них – это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием диполяритонов сиг-

нальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии. Другой канал – это рассеяние пары диполяритонов накачки с образованием сигнального диполяритона на нижней ветви и холостого диполяритона на верхней ветви закона дисперсии. Наконец, третий канал – это рассеяние сигнального и холостого диполяритонов средней ветви в сигнальный диполяритон нижней ветви и холостой диполяритон верхней ветви. При больших уровнях возбуждения плотности диполяритонов на указанных модах могут быть достаточно большими. Переходы по каждому из указанных каналов могут происходить как в прямом, так и в обратном направлениях. Это и определяет динамику изменения плотностей диполяритонов на каждой моде. Гамильтониан взаимодействия, описывающий процесс параметрического рассеяния *pump*-диполяритонов в диполяритоны сигнальной и холостой мод, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & \hbar g_1 (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_2 \hat{a}_1) + \\ & + \hbar g_2 (\hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_3 \hat{a}_4) + \\ & + \hbar g (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ \hat{a}_1 \hat{a}_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g$  – константы взаимодействия по каждому каналу рассеяния,  $\hat{a}_{p_{1,2}}$  и  $\hat{a}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – операторы уничтожения диполяритонов накачки первого и второго импульсов, а также сигнальной ( $i = 1, 3$ ) – и холостой ( $i = 2, 4$ ) мод соответственно.

Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов  $\hat{a}_{p_{1,2}}$  и  $\hat{a}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Усредняя эту систему и используя приближение среднего поля (*mean field approximation*), получаем следующую систему эволюционных уравнений для комплексных амплитуд диполяритонов  $a_{p_{1,2}} = \langle \hat{a}_{p_{1,2}} \rangle$ ,  $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, 4$ ):

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{p_1} = & \omega_{p_1} a_{p_1} + g_1 a_{p_2}^* a_1 a_2 + g_2 a_{p_2}^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_{p_2} = & \omega_{p_2} a_{p_2} + g_1 a_{p_1}^* a_1 a_2 + g_2 a_{p_1}^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_1 = & \omega_1 a_1 + g_1 a_2^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_2^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_2 = & \omega_2 a_2 + g_1 a_1^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_1^* a_3 a_4, \\ i\dot{a}_3 = & \omega_3 a_3 + g_2 a_1^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_4^* a_1 a_2, \\ i\dot{a}_4 = & \omega_4 a_4 + g_2 a_3^* a_{p_1} a_{p_2} + g a_3^* a_1 a_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_{p_{1,2}}$ ,  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – собственные частоты диполяритонов. В условиях точного резонанса, когда  $\omega_{p_1} + \omega_{p_2} = \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ , решения этих уравнений ищем в виде:  $a_{p_{1,2}} = A_{p_{1,2}} \exp(i\varphi_{p_{1,2}})$ ,  $a_i = A_i \exp(i\varphi_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), где  $A_{p_{1,2}}$ ,  $A_i$  и  $\varphi_{p_{1,2}}$ ,  $\varphi_i$  – действительные амплитуды и фазы. Вводя далее плотности диполяритонов  $N_{p_{1,2}} = A_{p_{1,2}}^2$ ,  $N_j = A_j^2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),

мы приходим к следующей системе нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{p_1} = \dot{N}_{p_2} = & -2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}} \times \\ & \times (g_1\sqrt{N_1N_2}\sin\theta_{12} + g_2\sqrt{N_3N_4}\sin\theta_{34}), \\ \dot{N}_1 = \dot{N}_2 = & 2\sqrt{N_1N_2} \times \\ & \times (g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}\sin\theta_{12} + g\sqrt{N_3N_4}\sin(\theta_{12} - \theta_{34})), \\ \dot{N}_3 = \dot{N}_4 = & 2\sqrt{N_3N_4} \times \\ & \times (g_2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}\sin\theta_{34} - g\sqrt{N_1N_2}\sin(\theta_{12} - \theta_{34})), \\ \dot{\theta}_{12} = & g_1 \left( -\sqrt{N_1N_2} \frac{N_{p_1} + N_{p_2}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}} + (N_1 + N_2) \sqrt{\frac{N_{p_1}N_{p_2}}{N_1N_2}} \right) \times \\ & \times \cos\theta_{12} - g_2(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_3N_4}{N_{p_1}N_{p_2}}} \cos\theta_{34} + \\ & + g\sqrt{N_3N_4} \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{N_1N_2}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \\ \dot{\theta}_{34} = & g_2 \times \\ & \times \left( -(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_3N_4}{N_{p_1}N_{p_2}}} + \frac{(N_3 + N_4)\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}}{\sqrt{N_3N_4}} \right) \times \\ & \times \cos\theta_{34} - g_1(N_{p_1} + N_{p_2}) \sqrt{\frac{N_1N_2}{N_{p_1}N_{p_2}}} \cos\theta_{12} + \\ & + g\sqrt{N_1N_2} \frac{N_3 + N_4}{\sqrt{N_3N_4}} \cos(\theta_{12} - \theta_{34}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\theta_{12} = \varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} - \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\theta_{34} = \varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} - \varphi_3 - \varphi_4$ .

Отметим, что вклад в динамику диполяритонов в уравнениях (2)–(3) вносят только слагаемые, соответствующие индуцированным переходам между различными диполяритонными состояниями. При больших уровнях возбуждения именно эти слагаемые являются определяющими. Считаем, что характерные времена спонтанных процессов намного больше характерных времен индуцированных переходов, так что за время протекания индуцированных переходов спонтанные переходы не успевают совершиться. Поэтому далее мы ими пренебрегаем.

Дополним систему (3) начальными условиями:  $N_{p_1}|_{t=0} = N_{p_10}$ ,  $N_{p_2}|_{t=0} = N_{p_20}$ ,  $N_j|_{t=0} = N_{j0}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ),  $\theta_{12}|_{t=0} = \theta_{12,0}$ ,  $\theta_{34}|_{t=0} = \theta_{34,0}$ . Из (3) удастся получить следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} N_{p_1} + N_{p_2} + 2(N_1 + N_3) &= N_{p_10} + N_{p_20} + 2(N_{10} + N_{30}), \\ N_2 - N_1 &= N_{20} - N_{10}, \quad N_4 - N_3 = N_{40} - N_{30}, \\ g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\cos\theta_{12} + g_2\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_3N_4}\cos\theta_{34} + \\ &+ g\sqrt{N_1N_2N_3N_4}\cos(\theta_{12} - \theta_{34}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= g_1\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}}\cos\theta_{12,0} + \\ &+ g_2\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{30}N_{40}}\cos\theta_{34,0} + \\ &+ g\sqrt{N_{10}N_{20}N_{30}N_{40}}\cos(\theta_{12,0} - \theta_{34,0}), \end{aligned} \quad (4)$$

которые представляют собой законы сохранения чисел частиц в системе и закон сохранения энергии.

Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений (3) в общем случае не представляется возможным. Поэтому далее рассмотрим ряд частных случаев.

Если рассматривать решения системы уравнений при равенстве нулю начальных плотностей диполяритонов сигнальной и холостой мод на верхней и нижней ветвях закона дисперсии  $N_{30} = N_{40} = 0$ , то система уравнений (3) значительно упрощается и приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{N}_{p_1} = \dot{N}_{p_2} &= -2g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\sin\theta_{12}, \\ \dot{N}_1 = \dot{N}_2 &= 2g_1\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}\sin\theta_{12}, \\ \dot{\theta}_{12} &= g_1 \times \\ &\times \left( -\sqrt{N_1N_2} \frac{N_{p_1} + N_{p_2}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}}} + (N_1 + N_2) \sqrt{\frac{N_{p_1}N_{p_2}}{N_1N_2}} \right) \cos\theta_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (5), получаем интегралы движения

$$\begin{aligned} N_{p_1} + N_1 &= N_{p_10} + N_{10}, \\ N_{p_2} + N_1 &= N_{p_20} + N_{10}, \\ N_2 - N_1 &= N_{20} - N_{10}, \\ \cos\theta_{12} &= \frac{\sqrt{N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}}}{\sqrt{N_{p_1}N_{p_2}N_1N_2}} \cos\theta_{12,0} \end{aligned} \quad (6)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии  $N_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \pm 2g_1(N_1(N_1 + N_{20} - N_{10})(N_{p_10} + N_{10} - N_1) \times \\ &\times (N_{p_20} + N_{10} - N_1) - N_{p_10}N_{p_20}N_{10}N_{20}\cos^2\theta_{12,0})^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) видно, что особенности эволюции плотности диполяритонов  $N_1(t)$  определяются начальными плотностями  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  и  $N_{p_10}$ ,  $N_{p_20}$ , начальной разностью фаз  $\theta_{12,0}$ , а также направлением изменения начальной скорости  $\dot{N}_1(t)|_{t=0}$ , т.е. знаками (+) и (–) в (7). Если начальная разность фаз  $\theta_{12,0} = \pm(2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то мгновенная разность фаз  $\theta_{12}(t)$  в процессе эволюции сохраняется равной  $\theta_{12,0}$ . Поэтому рассмотрим наиболее простой случай

эволюции, когда  $\theta_{12,0} = \pm(2n+1)\pi/2$ . В этом случае, используя интегралы движения, уравнение (7) можно привести к виду:

$$\dot{N}_1^2 + W(N_1) = 0, \quad (8)$$

где  $W(N_1)$  – потенциальная и  $\dot{N}_1^2$  – кинетическая энергии эквивалентного нелинейного осциллятора. Потенциальная энергия  $W(N_1)$  определяется выражением:

$$W(N_1) = -4g_1^2 N_1(N_1 + N_{20} - N_{10}) \times \\ \times (N_{p10} + N_{10} - N_1)(N_{p20} + N_{10} - N_1). \quad (9)$$

Вид решения  $N_1(t)$  уравнения (8) определяется корнями алгебраического уравнения  $W(N_1) = 0$ , которые зависят от начальных параметров системы  $N_{10}, N_{20}, N_{p10}, N_{p20}$ .

Рассмотрим эволюцию системы, когда начальная плотность накачки первого импульса больше начальной плотности накачки второго импульса  $N_{p10} > N_{p20}$ . При этом будем считать, что начальная плотность диполяритонов холостой моды больше начальной плотности сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии  $N_{20} > N_{10}$ . Уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора  $W(N_1) = 0$  в этом случае имеет четыре действительных корня, которые располагаются в следующем порядке:  $N_{10} + N_{p10} > N_{10} + N_{p20} > 0 > N_{10} - N_{20}$ . Динамика системы в этом случае является периодической (рис. 2а), диполяритоны накачки попарно превращаются в диполяритоны сигнальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии и обратно. Решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{20} - N_{10})(N_{p20} + N_{10})\operatorname{sn}(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}{N_{p20} + N_{20} - (N_{p20} + N_{10})\operatorname{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (10)$$

где  $\operatorname{sn}(x)$  – эллиптическая функция Якоби,  $f(\varphi_0, k) = F(\varphi_0, k) - K(k)$ ,  $F(\varphi_0, k)$  – неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$  и параметром  $\varphi_0$ ,  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл [37, 38]. Величины  $k$  и  $\varphi_0$  выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{20} + N_{p10})(N_{10} + N_{p20})}{(N_{10} + N_{p10})(N_{20} + N_{p20})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{20} + N_{p20})N_{10}}{(N_{10} + N_{p20})N_{20}}}. \quad (11)$$

Из (10) легко получить амплитуду  $A$  и период  $T$  колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{10} + N_{p20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{10})}}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что амплитуда колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии определяется начальной плотностью диполяритонов накачки второго импульса, т.е. наименьшей плотностью накачки. Амплитуда колебаний линейно растет с ростом  $N_{10}$  и  $N_{p20}$ . Что касается периода колебаний, то с ростом начальной плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии, период колебаний монотонно уменьшается.

Если  $N_{20} < N_{10}$ , то уравнение  $W(N_1) = 0$  имеет четыре действительных корня которые располагаются следующим образом:  $N_{10} + N_{p10} > N_{10} + N_{p20} > N_{10} - N_{20} > 0$ . Динамика системы в этом случае также является периодической (рис. 2б) и решение уравнения (9) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{10} - N_{20})(N_{p20} + N_{10})}{N_{p20} + N_{10} - (N_{p20} + N_{20})\operatorname{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (13)$$

где  $k$  и  $\varphi_0$  выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{10} + N_{p10})(N_{20} + N_{p20})}{(N_{10} + N_{p20})(N_{20} + N_{p10})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{10} + N_{p20})N_{20}}{(N_{20} + N_{p20})N_{10}}}. \quad (14)$$

Из (13) можно получить амплитуду  $A$  и период  $T$  колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{20} + N_{p20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}}. \quad (15)$$

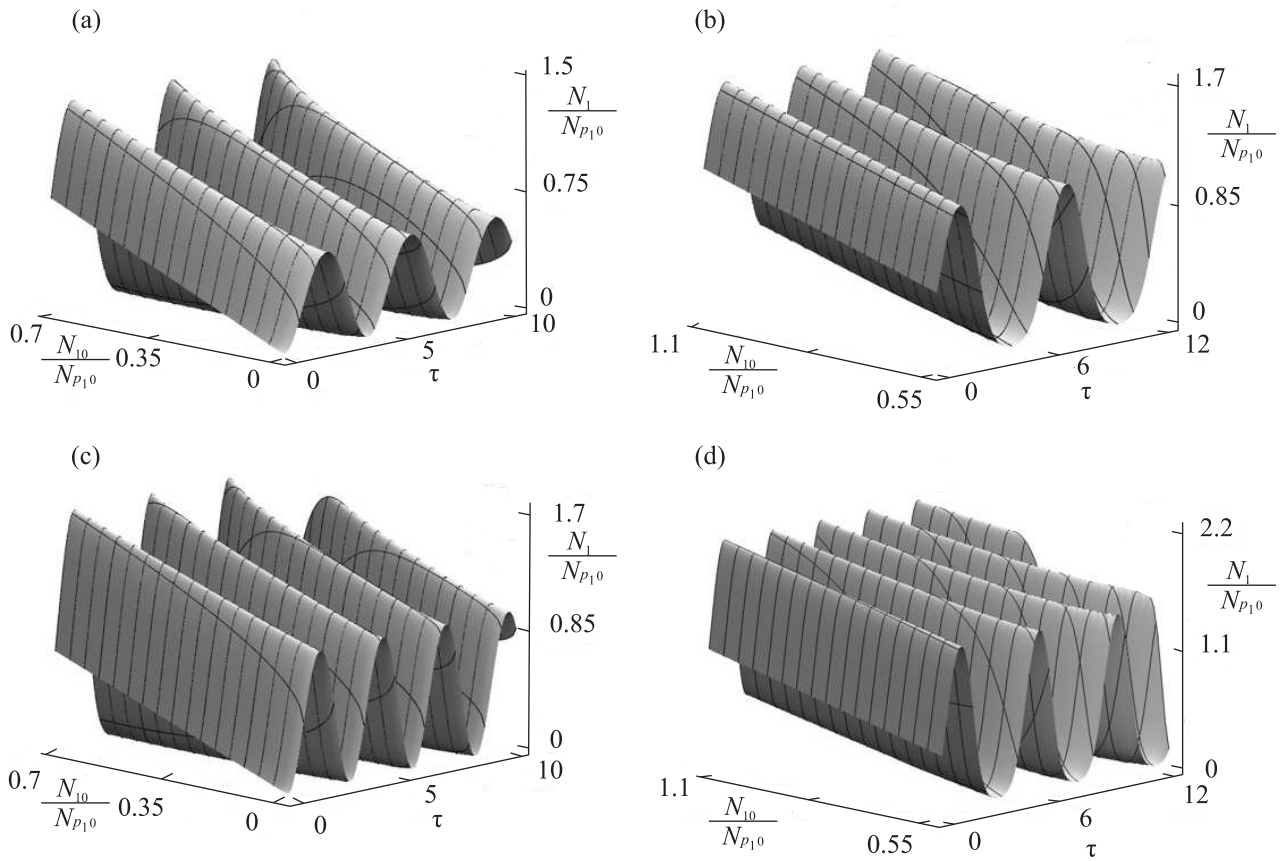


Рис. 2. Временная эволюция плотности диполяритонов  $N_1/N_{p10}$  в зависимости от нормированной начальной плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии и при фиксированных значениях начальных плотностях диполяритонов  $N_{20}/N_{p10} = 0,8$ ,  $N_{p20}/N_{p10} = 0,6$  (a);  $N_{20}/N_{p10} = 0,5$ ,  $N_{p20}/N_{p10} = 0,6$  (b);  $N_{20}/N_{p10} = 0,8$ ,  $N_{p20}/N_{p10} = 1,6$  (c);  $N_{20}/N_{p10} = 0,5$ ,  $N_{p20}/N_{p10} = 1,6$  (d). Здесь  $\tau = g_1 t$

Если начальная плотность накачки первого импульса меньше начальной плотности накачки второго импульса  $N_{p10} < N_{p20}$ . При этом будем считать, что  $N_{20} > N_{10}$ , уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора  $W(N_1) = 0$  также имеет четыре действительных корня  $N_{10} + N_{p20} > N_{10} + N_{p10} > 0 > N_{10} - N_{20}$ . Эволюция диполяритонов является периодической (рис. 2c) и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{20} - N_{10})(N_{p10} + N_{10})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}{N_{p10} + N_{20} - (N_{p10} + N_{10})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}. \quad (16)$$

Величины  $k$  и  $\varphi_0$  выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{20} + N_{p20})(N_{10} + N_{p10})}{(N_{10} + N_{p20})(N_{20} + N_{p10})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{20} + N_{p10})N_{10}}{(N_{10} + N_{p10})N_{20}}}. \quad (17)$$

Амплитуда  $A$  и  $T$  период колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{10} + N_{p10}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p20} + N_{10})(N_{p10} + N_{20})}}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что амплитуда колебаний определяется наименьшей плотностью накачки.

Если  $N_{20} < N_{10}$ , уравнение  $W(N_1) = 0$  по-прежнему имеет четыре действительных корня  $N_{10} + N_{p_{20}} > > N_{10} + N_{p_{10}} > N_{10} - N_{20} > 0$  и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{(N_{10} - N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}{N_{p_{10}} + N_{10} - (N_{p_{10}} + N_{20})\text{sn}^2(\sqrt{(N_{p_{20}} + N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}g_1 t \pm f(\varphi_0, k))}, \quad (19)$$

где  $k$  и  $\varphi_0$  выражаются формулами:

$$k^2 = \frac{(N_{10} + N_{p_{20}})(N_{20} + N_{p_{10}})}{(N_{10} + N_{p_{10}})(N_{20} + N_{p_{20}})}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{10} + N_{p_{10}})N_{20}}{(N_{20} + N_{p_{10}})N_{10}}}. \quad (20)$$

Из (19) амплитуда  $A$  и период  $T$  колебаний плотности диполяритонов сигнальной моды

$$A = N_{20} + N_{p_{10}}, \quad T = \frac{2K(k)}{g_1 \sqrt{(N_{p_{20}} + N_{20})(N_{p_{10}} + N_{10})}}. \quad (21)$$

Из (19) и рисунка 2d, видно, что эволюция системы является периодической.

На рисунке 2 представлены графики временной эволюции плотности диполяритонов сигнальной моды. Эволюция системы представляет собой периодические превращения диполяритонов сигнальной и холостой мод в диполяритоны накачки обоих импульсов и обратно. Амплитуда колебаний линейно увеличивается с ростом начальной плотности диполяритонов сигнальной (холостой) моды на средней ветви закона дисперсии.

Если в начальный момент времени плотность диполяритонов сигнальной и холостой моды на средней ветви закона дисперсии равны  $N_{20} = N_{10}$ , то уравнение для потенциальной энергии нелинейного осциллятора  $W(N_1) = 0$  имеет один двукратно вырожденный корень, равный нулю. Эволюция диполяритонов в этом случае будет аperiodической (рис. 3) и решение уравнения (8) запишется в виде:

$$N_1 = \frac{ab \left( \frac{b}{a} - \frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}} \right) (1 - \text{th}^2(\pm \sqrt{ab}g_1 t))}{a \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}}} \text{th}(\pm \sqrt{ab}g_1 t) \right)^2 - b \left( \sqrt{\frac{N_{p_{20}}}{N_{p_{10}}}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \text{th}(\pm \sqrt{ab}g_1 t) \right)^2}, \quad (22)$$

где  $a = N_{p_{10}} + N_{10}$ ,  $b = N_{p_{20}} + N_{10}$ .

На рисунке 3 представлена аperiodическая эволюция плотности диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии. Из (22) и рисунка 3 видно, что решение со знаком “+” монотонно растет со временем от значения  $N_1 = N_{10}$  до предельного значения  $N_1 = N_{p_{20}} + N_{10}$ , затем происходит монотонное убывание плотности диполяритонов сигнальной моды до нуля, чем эволюция и завершается. Если рассматривать решение (22) со знаком “-”, то плотность диполяритонов сигнальной моды на средней ветви закона дисперсии монотонно уменьшается от значения  $N_1 = N_{10}$  до нуля. Таким образом, все диполяритоны сигнальной моды попарно превратились в диполяритоны накачки обоих импульсов, чем эволюция и завершилась. Процесс эволюции происходит с истощением диполяритонов сигнальной (холостой) моды.

Если в начальный момент времени отсутствуют либо диполяритоны накачки первого импульса, ли-

бо диполяритоны накачки второго импульса, то, как видно из (4), будет работать только третий канал рассеяния, т.е. будут возникать периодические и аperiodические режимы превращения диполяритонов сигнальной и холостой мод на средней ветви закона дисперсии в диполяритоны сигнальной и холостой моды на верхней и нижней ветви закона дисперсии без участия диполяритонов накачки обоих импульсов [34].

Таким образом, при накачке средней диполяритонной ветви в двух близких точках закона дисперсии возможен периодический и аperiodический процессы превращения пары диполяритонов накачки обоих импульсов в диполяритоны сигнальной и холостой мод. Также необходимо отметить, что при накачке диполяритонной ветви в одной точке закона дисперсии при начальной разности фаз  $\theta_{12,0} = \pm(2n + 1)\pi/2$  наблюдался только аperiodический режим эволюции превращения пары диполяритонов

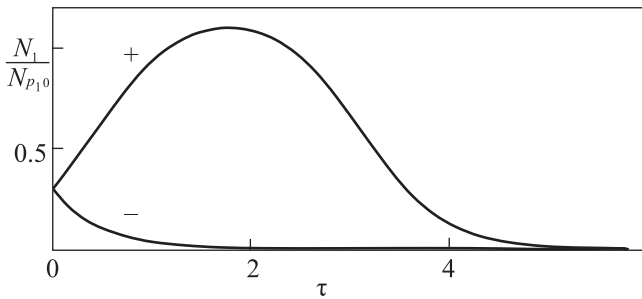


Рис. 3. Временная эволюция плотности диполяритонов  $N_1/N_{p10}$  при фиксированных значениях начальных плотностей диполяритонов  $N_{10}/N_{p10} = N_{20}/N_{p10} = 0.3$ ,  $N_{p20}/N_{p10} = 0.8$ . Здесь  $\tau = g_1 t$

накачки в диполяритоны сигнальной и холостой мод [34]. Таким образом, введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы и к возникновению новых бифуркационных переходов от аperiodического режима эволюции к периодическому.

1. A. V. Kavokin and G. Malpuech, *Thin Films, Nanostructures: Cavity Polaritons*, ed. by V. M. Agranovich and D. Taylor, Elsevier, Amsterdam (2003).
2. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
3. A. Kavokin, *Appl. Phys. A* **89**, 241. (2007).
4. M. M. Glazov and K. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 245317 (2006).
5. I. A. Shelykh, R. Johne, D. D. Solnyshkov, A. V. Kavokin, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **76**, 155308 (2007).
6. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **63**, 193305 (2001).
7. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **62**, R4825 (2000).
8. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
9. J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **62**, R16247 (2000).
10. C. Ciuti, *Phys. Rev. B* **69**, 245304 (2004).
11. P. Schwendimann, C. Ciuti, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **68**, 165324 (2003).
12. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. Porras, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **65**, 073309 (2002).
13. I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, and G. Malpuech, *Phys. Status Solidi B* **242**, 2271 (2005).
14. О. Ф. Васильева, П. И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* **115**, 922 (2013).

15. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *Оптика и спектроскопия* **111**, 831 (2011).
16. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *ФТТ* **53**, 1216 (2011).
17. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanophotonics* **6**, 061805 (2012).
18. P. I. Khadzhi and O. F. Vasilieva, *J. Nanoelectronics and Optoelectronics* **9**, 295 (2014).
19. C. J. Mc Konstrie, S. Radic, and M. G. Raymer, *Opt. Express* **12**, 5037 (2004).
20. Y. Okawachi, M. Yu. K. Luke, D. O. Carvalho, S. Ramelow, A. Farsi, M. Lipson, and A. L. Gaeta, *Opt. Lett.* **40**, 5267 (2015).
21. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, П. И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* **125**, 425 (2018).
22. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, В. В. Васильев, *ЖЭТФ* **157**(1), 144 (2020).
23. О. Ф. Васильева, А. П. Зинган, В. В. Васильев, *Оптика и спектроскопия* **128**(2), 242 (2020).
24. P. Cristofolini, G. Christmann, S. I. Tsintzos, G. Deligeorgis, G. Konstantinidis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, *Science* **336**, 704 (2012).
25. A. V. Nalitov, D. D. Solnyshkov, N. A. Gippius, and G. Malpuech, *Phys. Rev. B* **90**, 235304 (2014).
26. О. Кюриенко, А. В. Kavokin, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 176401 (2013).
27. K. Kristinsson, О. Кюриенко, T. C. H. Liew, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. B* **88**, 245303 (2013).
28. K. Kristinsson, О. Кюриенко, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. A* **89**, 023836 (2014).
29. О. Кюриенко, I. A. Shelykh, and T. C. H. Liew, *Phys. Rev. A* **90**, 033807 (2014).
30. I. A. Shelykh, О. Кюриенко, K. Kristinsson, and T. C. H. Liew, *Proc. Intern. Const. Nanomaterials: Applications and Properties* **3**, 02NAESF03 (2014).
31. J.-Y. Li, S.-Q. Duan, and W. Zhang, *EPL* **108**, 67010 (2014).
32. О. Кюриенко, О. V. Kibis, and I. A. Shelykh, *Opt. Lett.* **42**(12), 2398 (2017).
33. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, *Письма в ЖЭТФ* **102**(9), 665 (2015).
34. П. И. Хаджи, О. Ф. Васильева, И. В. Белоусов, *ЖЭТФ* **153**(2), 179 (2018).
35. A. Seedhouse, J. Wilkes, V. D. Kulakovskii, and E. A. Muljarov, *Opt. Lett.* **44**(17), 4339 (2019).
36. T. Byrnes, G. V. Kolmakov, R. Y. Kezerashvili, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B* **90**, 125314 (2014).
37. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М. (1963).
38. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, М. (1971).